



Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο
Hellenic Open University

Μέρος II: Πολυβάθμια Συστήματα

Διδάσκων: Ε.Ι. Σαπουντζάκης

Δυναμική των Κατασκευών

Περιεχόμενα

1. Εξισώσεις κίνησης και μέθοδοι επίλυσης
2. Ελεύθερες ταλαντώσεις πολυβαθμίων συστημάτων
3. Απόσβεση στις κατασκευές
4. Δυναμική ανάλυση και απόκριση γραμμικών συστημάτων
5. Σεισμική ανάλυση γραμμικών συστημάτων
6. Μείωση βαθμών ελευθερίας
7. Αριθμητικός υπολογισμός δυναμικής απόκρισης
8. Συστήματα με κατανεμημένη μάζα και ελαστικότητα
9. Σεισμική απόκριση γραμμικώς ελαστικών κτιρίων

Απόσβεση στις Κατασκευές

Απόσβεση στις Κατασκευές

1. Μόρφωση του μητρώου απόσβεσης

- Ο υπολογισμός του μητρώου απόσβεσης είναι απαραίτητος στις περιπτώσεις όπου η ιδιομορφική ανάλυση δεν μπορεί να εφαρμοστεί. Αυτό συμβαίνει σε συστήματα με μη κλασική απόσβεση ή σε μη γραμμικά συστήματα.
- Τα χαρακτηριστικά απόσβεσης μιας κατασκευής είναι δύσκολο να προσδιοριστούν. Συνεπώς, το μητρώο απόσβεσης θα πρέπει να υπολογίζεται από τους ιδιομορφικούς λόγους απόσβεσης, οι οποίοι αντιπροσωπεύουν όλους τους μηχανισμούς ανάλωσης ενέργειας.
- Οι ιδιομορφικοί λόγοι απόσβεσης εκτιμώνται από διαθέσιμα δεδομένα για παρόμοιες κατασκευές που δονήθηκαν κατά τη διάρκεια σεισμών, αλλά δεν παραμορφώθηκαν στην ανελαστική περιοχή. Ελλείψει τέτοιων δεδομένων υπάρχουν διαθέσιμες συστάσεις.

Απόσβεση στις Κατασκευές

1. Μόρφωση του μητρώου απόσβεσης

- **Απόσβεση Rayleigh**

- Θεωρούμε αρχικά απόσβεση ανάλογη της μάζας και ανάλογη της δυσκαμψίας:

$$\mathbf{c} = a_0 \mathbf{m} \quad \& \quad \mathbf{c} = a_1 \mathbf{k}$$

- Τα εν λόγω μητρώα απόσβεσης αντιπροσωπεύουν κλασική απόσβεση, καθώς πληρούν τη συνθήκη ορθογωνικότητας. Η γενικευμένη απόσβεση για την n ιδιομορφή δίδεται ως:

$$C_n = \boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{c} \boldsymbol{\phi}_n = a_0 \boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_n = a_0 M_n = 2\zeta_n \omega_n M_n$$

- και επομένως ο ιδιομορφικός λόγος απόσβεσης δίδεται ως:

$$\zeta_n = \frac{a_0}{2} \frac{1}{\omega_n}$$

Απόσβεση στις Κατασκευές

1. Μόρφωση του μητρώου απόσβεσης

- **Απόσβεση Rayleigh**

- Με δεδομένη την τιμή του λόγου απόσβεσης σε οποιαδήποτε ιδιομορφή, πχ την i μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή του α_0 ως:

$$\alpha_0 = 2\zeta_i\omega_i$$

- Με γνωστή την τιμή του α_0 μπορούμε να υπολογίσουμε το μητρώο \mathbf{c} και κάθε άλλο λόγο απόσβεσης ζ_n . Με παρόμοιο τρόπο για απόσβεση ανάλογη του μητρώου δυσκαψίας, έχουμε:

$$C_n = \boldsymbol{\Phi}_n^T \mathbf{c} \boldsymbol{\Phi}_n = a_1 \boldsymbol{\Phi}_n^T \mathbf{k} \boldsymbol{\Phi}_n = a_1 K_n = a_1 \omega_n^2 M_n = 2\zeta_n \omega_n M_n \quad \zeta_n = \frac{a_1}{2} \omega_n$$

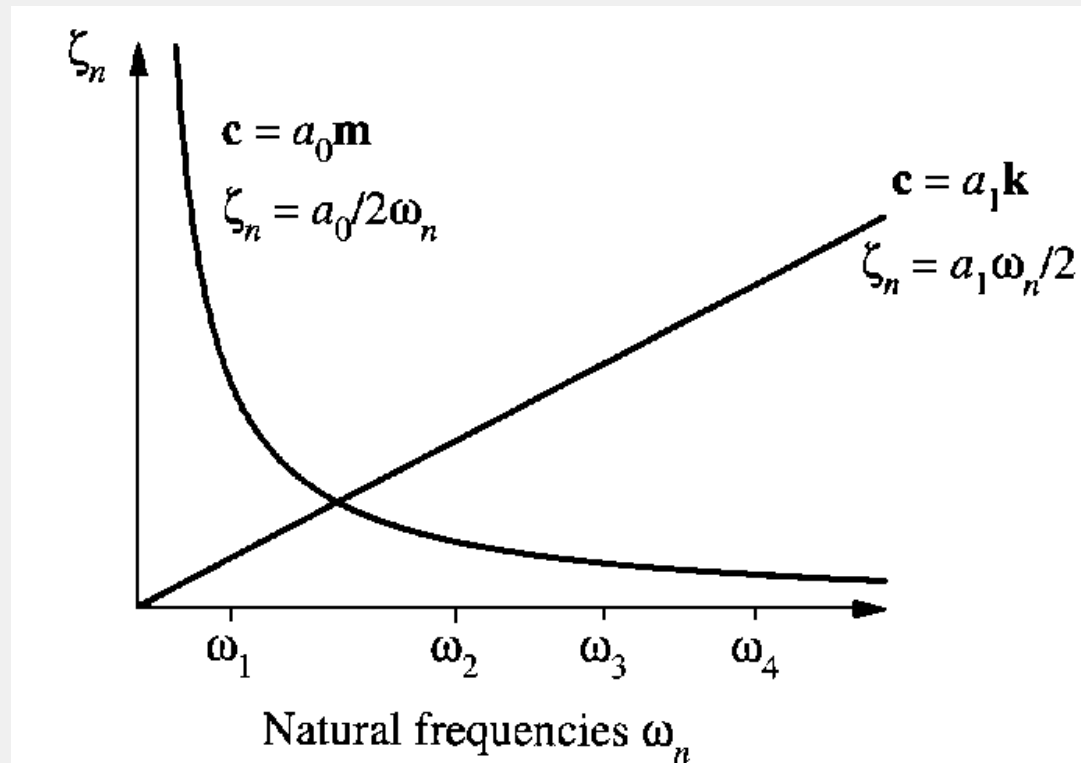
$$a_1 = \frac{2\zeta_i}{\omega_i}$$

Απόσβεση στις Κατασκευές

1. Μόρφωση του μητρώου απόσβεσης

• Απόσβεση Rayleigh

- Η μεταβολή των ιδιομορφικών λόγων απόσβεσης με την ιδιοσυχνότητα για τις δύο θεωρήσεις απόσβεσης που αναλύθηκαν προηγουμένως, φαίνεται στο σχήμα.
- Οι δύο θεωρήσεις δεν είναι αρκετά ρεαλιστικές για τις πρακτικές εφαρμογές καθώς, τα πειραματικά δεδομένα, δείχνουν περίπου τους ίδιους λόγους απόσβεσης για αρκετές ιδιομορφές.



Απόσβεση στις Κατασκευές

1. Μόρφωση του μητρώου απόσβεσης

- **Απόσβεση Rayleigh**

- Πιο ακριβής προσέγγιση είναι η απόσβεση Rayleigh:

$$\mathbf{c} = a_0 \mathbf{m} + a_1 \mathbf{k}$$

- Επομένως ο λόγος ζ_n προκύπτει ως:

$$\zeta_n = \frac{a_0}{2} \frac{1}{\omega_n} + \frac{a_1}{2} \omega_n$$

- Οι συντελεστές a_0 και a_1 μπορούν να προσδιοριστούν εάν ξέρουμε δύο λόγους απόσβεσης i, j :

Απόσβεση στις Κατασκευές

1. Μόρφωση του μητρώου απόσβεσης

- Απόσβεση Rayleigh

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/\omega_i & \omega_i \\ 1/\omega_j & \omega_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \zeta_i \\ \zeta_j \end{Bmatrix}$$

- Με επίλυση του συστήματος προκύπτουν τα a_0 και a_1 ως εξής:

$$a_0 = \zeta \frac{2\omega_i\omega_j}{\omega_i + \omega_j}, \quad a_1 = \zeta \frac{2}{\omega_i + \omega_j}$$

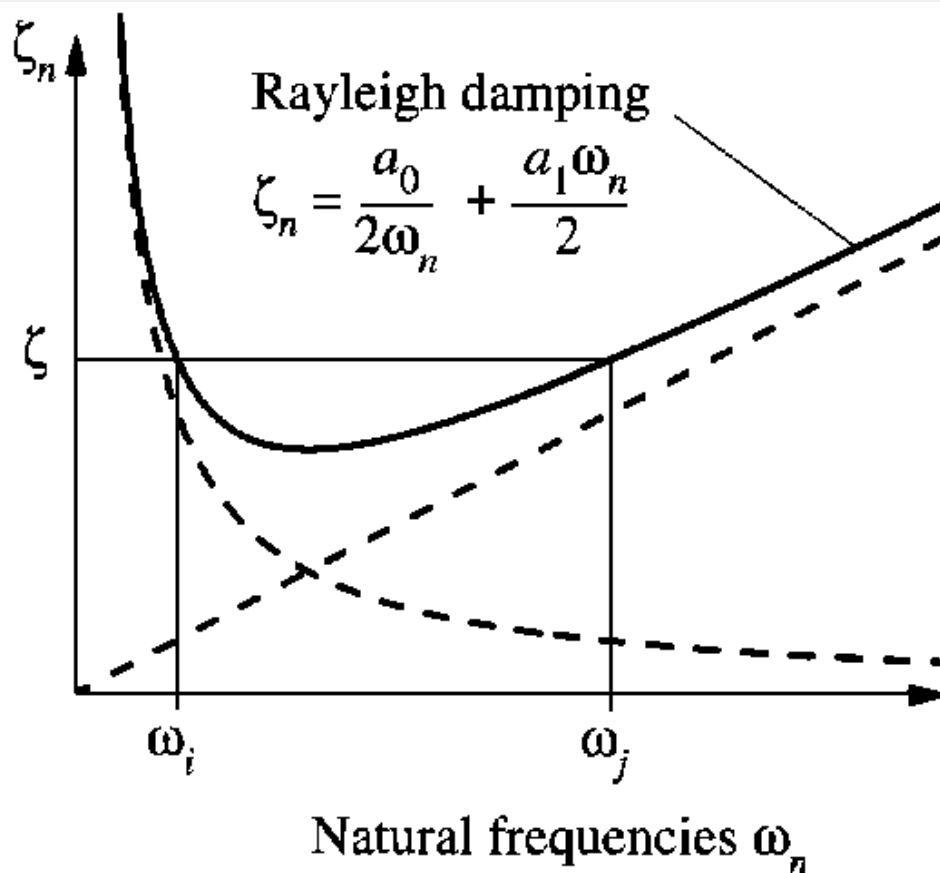
- Συνεπώς το μητρώο απόσβεσης και οι υπόλοιποι λόγοι απόσβεσης μπορούν να προσδιοριστούν.

Απόσβεση στις Κατασκευές

1. Μόρφωση του μητρώου απόσβεσης

- Απόσβεση Rayleigh

- Η μεταβολή των ιδιομορφικών λόγων απόσβεσης με την ιδιοσυχνότητα για την απόσβεση Rayleigh φαίνεται στο σχήμα.



Δυναμική Ανάλυση και Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

Δυναμική Ανάλυση και Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

A. Συστήματα Δυο Βαθμών

1. Ανάλυση συστημάτων δύο βαθμών ελευθερίας χωρίς απόσβεση
2. Αποσβεστήρας ταλαντώσεων ή αποσβεστήρας ρυθμιζόμενης μάζας

B. Ιδιομορφική Ανάλυση

1. Ιδιομορφικές εξισώσεις για συστήματα χωρίς απόσβεση
2. Ιδιομορφικές εξισώσεις για συστήματα με απόσβεση
3. Απόκριση μετατόπισης
4. Εντατικά μεγέθη στοιχείων
5. Ιδιομορφική ανάλυση

Γ. Συμβολές Ιδιομορφικής Απόκρισης

1. Ιδιομορφική ανάπτυξη του διανύσματος διέγερσης $p(t) = s p(t)$
2. Ιδιομορφική ανάλυση για $p(t) = s p(t)$
3. Συντελεστής ιδιομορφικής συμμετοχής
4. Ιδιομορφικές αποκρίσεις και απαιτούμενος αριθμός ιδιομορφών

Δ. Ειδικές Μέθοδοι Ανάλυσης

Δυναμική Ανάλυση και Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

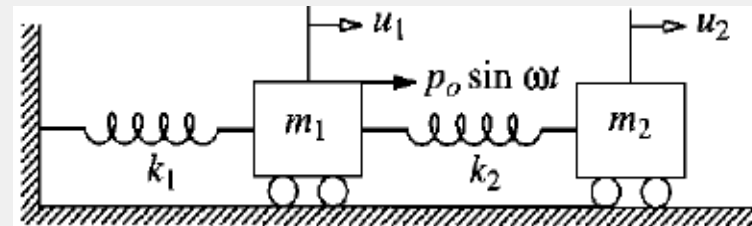
A. Συστήματα Δυο Βαθμών

1. Ανάλυση συστημάτων δύο βαθμών ελευθερίας χωρίς απόσβεση

Σύστημα δύο βαθμών ελευθερίας διεγείρεται από αρμονική δύναμη $p_1(t) = p_0 \sin \omega t$ η οποία εφαρμόζεται στη μάζα m_1

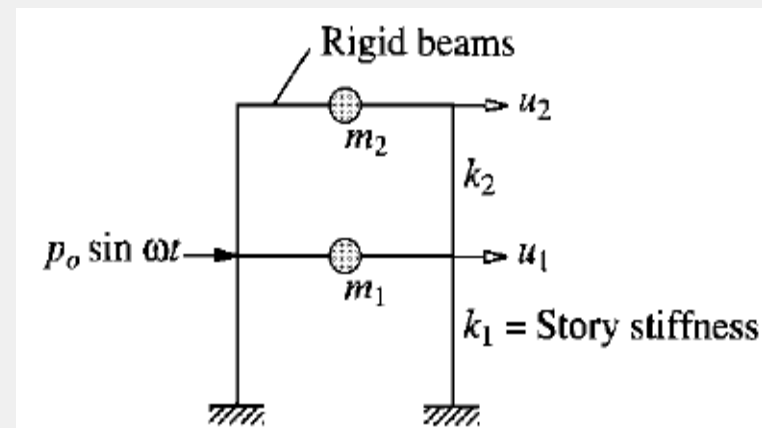
Εξίσωση κίνησης

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \sin \omega t$$



Η λύση της μόνιμης κατάστασης μπορεί να θεωρηθεί ως:

$$\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1_0} \\ u_{2_0} \end{Bmatrix} \sin \omega t$$



Δυναμική Ανάλυση και Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

A. Συστήματα Δυο Βαθμών

1. Ανάλυση συστημάτων δύο βαθμών ελευθερίας χωρίς απόσβεση

Αντικαθιστώντας παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{10} \\ u_{20} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow [\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}] \begin{Bmatrix} u_{10} \\ u_{20} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $[\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}]^{-1}$ έχουμε

$$\begin{Bmatrix} u_{10} \\ u_{20} \end{Bmatrix} = [\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}]^{-1} \begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det[\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}]} \text{adj}[\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}] \begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Η εξίσωση συχνοτήτων $\det[\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}] = 0 \Rightarrow$

$$m_1 m_2 (\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2) = 0$$

Δυναμική Ανάλυση και Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

A. Συστήματα Δυο Βαθμών

1. Ανάλυση συστημάτων δύο βαθμών ελευθερίας χωρίς απόσβεση

Οπότε η εξίσωση γράφεται

$$\begin{Bmatrix} u_{1_0} \\ u_{2_0} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det[\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}]} \begin{bmatrix} k_2 - m_2 \omega^2 & k_2 \\ k_2 & k_1 + k_2 - m_1 \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ή

$$u_{1_0} = \frac{p_0(k_2 - m_2 \omega^2)}{m_1 m_2 (\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)} \quad u_{2_0} = \frac{p_0 k_2}{m_1 m_2 (\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}$$

Δυναμική Ανάλυση και Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

A. Συστήματα Δυο Βαθμών

1. Ανάλυση συστημάτων δύο βαθμών ελευθερίας χωρίς απόσβεση

Οπότε η εξίσωση γράφεται

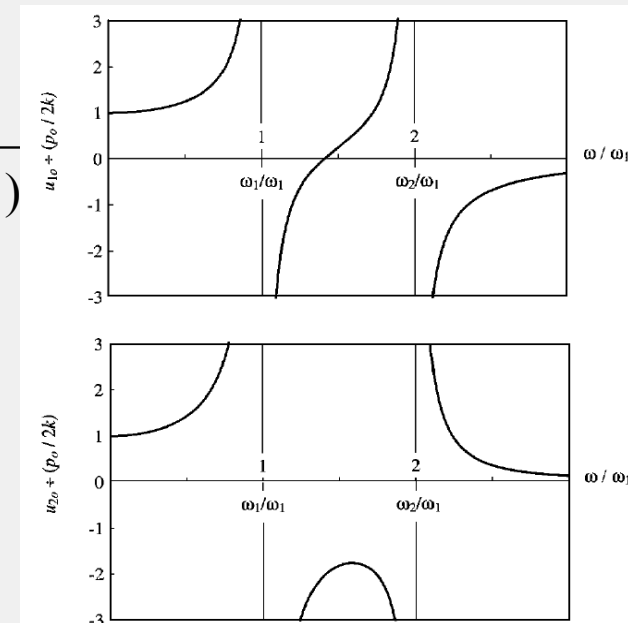
$$\begin{Bmatrix} u_{10} \\ u_{20} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det[\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}]} \begin{bmatrix} k_2 - m_2 \omega^2 & k_2 \\ k_2 & k_1 + k_2 - m_1 \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ή

$$u_{10} = \frac{p_0(k_2 - m_2 \omega^2)}{m_1 m_2 (\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)} \quad u_{20} = \frac{p_0 k_2}{m_1 m_2 (\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}$$

Η καμπύλη απόκρισης-συχνότητας για:

$$\left. \begin{array}{l} m_1 = 2m \quad m_2 = m \\ k_1 = 2k \quad k_2 = k \end{array} \right\}$$



Δυναμική Ανάλυση και Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

B. Ιδιομορφική Ανάλυση

1. Ιδιομορφικές εξισώσεις για συστήματα χωρίς απόσβεση

Οι εξισώσεις κίνησης για γραμμικό σύστημα πολλών β.ε. (MDF) χωρίς απόσβεση

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}(t)$$

Το διάνυσμα μετατόπισης μπορεί να αναπτυχθεί συναρτήσει ιδιομορφικών συνιστωσών

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{r=1}^N \boldsymbol{\varphi}_r q_r(t) = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{q}(t)$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση, οι συζευγμένες εξισώσεις ως προς u_j μπορούν να μετασχηματιστούν σε ένα σύστημα ασύζευκτων εξισώσεων με τις ιδιομορφικές συντεταγμένες $q_n(t)$ ως αγνώστους

$$\sum_{r=1}^N \mathbf{m}\boldsymbol{\varphi}_r \ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^N \mathbf{k}\boldsymbol{\varphi}_r q_r(t) = \mathbf{p}(t)$$

Δυναμική Ανάλυση και Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

B. Ιδιομορφική Ανάλυση

1. Ιδιομορφικές εξισώσεις για συστήματα χωρίς απόσβεση

Προπολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $\boldsymbol{\varphi}_n^T$ λαμβάνουμε

$$\sum_{r=1}^N \boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{m} \boldsymbol{\varphi}_r \ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^N \boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{k} \boldsymbol{\varphi}_r q_r(t) = \boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{p}(t)$$

Λόγω των σχέσεων ορθογωνικότητας, όλοι οι όροι μηδενίζονται εκτός από τον όρο $r=n$

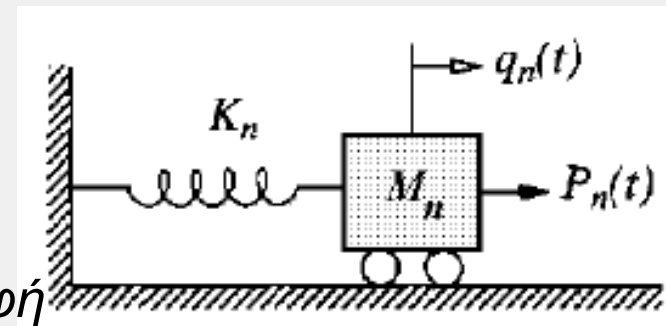
$$\left(\boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{m} \boldsymbol{\varphi}_n \right) \ddot{q}_n(t) + \left(\boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{k} \boldsymbol{\varphi}_n \right) q_n(t) = \boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{p}(t)$$

ή

$$M_n \ddot{q}_n(t) + K_n q_n(t) = P_n(t)$$

M_n Γενικευμένη μάζα για τη n -ιοστή ιδιομορφή

K_n Γενικευμένη δυσκαμψία για τη n -ιοστή ιδιομορφή



Δυναμική Ανάλυση και Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

B. Ιδιομορφική Ανάλυση

1. Ιδιομορφικές εξισώσεις για συστήματα χωρίς απόσβεση

Διαιρώντας με M_n έχουμε: $\ddot{q}_n(t) + \omega^2 q_n = \frac{P_n(t)}{M_n}$

Η παραπάνω εξίσωση καθορίζει τις n -ιοστές ιδιομορφικές συντεταγμένες $q_n(t)$

Το σύστημα των N συζευγμένων εξισώσεων έχει μετατραπεί σε σύστημα N μη συζευγμένων εξισώσεων των ιδιομορφικών συντεταγμένων $q_n(t)$

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}(t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{P}(t)$$

M Πίνακας Γενικευμένων Ιδιομορφικών Μαζών

K Πίνακας Γενικευμένων Ιδιομορφικών Δυσκαμψιών

P Διάνυσμα Γενικευμένων Ιδιομορφικών Δυνάμεων

Δυναμική Ανάλυση και Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

B. Ιδιομορφική Ανάλυση

2. Ιδιομορφικές εξισώσεις για συστήματα με απόσβεση

Οι εξισώσεις κίνησης για γραμμικό σύστημα πολλών β.ε. με απόσβεση

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}(t)$$

Το διάνυσμα μετατόπισης μπορεί να αναπτυχθεί συναρτήσει ιδιομορφικών συνιστωσών

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{r=1}^N \boldsymbol{\varphi}_r q_r(t) = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{q}(t)$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση, οι συζευγμένες εξισώσεις ως προς u_j μπορούν να μετασχηματιστούν σε ένα σύστημα ασύζευκτων εξισώσεων με τις ιδιομορφικές συντεταγμένες $q_n(t)$ ως αγνώστους

$$\sum_{r=1}^N \mathbf{m}\boldsymbol{\varphi}_r \ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^N \mathbf{c}\boldsymbol{\varphi}_r \dot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^N \mathbf{k}\boldsymbol{\varphi}_r q_r(t) = \mathbf{p}(t)$$

Δυναμική Ανάλυση και Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

B. Ιδιομορφική Ανάλυση

2. Ιδιομορφικές εξισώσεις για συστήματα με απόσβεση

Προπολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $\boldsymbol{\varphi}_n^T$:

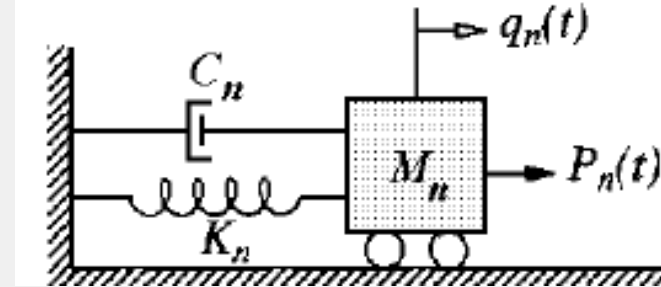
$$\sum_{r=1}^N \boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{m} \boldsymbol{\varphi}_r \ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^N \boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{c} \boldsymbol{\varphi}_r \dot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^N \boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{k} \boldsymbol{\varphi}_r q_r(t) = \boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{p}(t)$$

Λόγω των σχέσεων ορθογωνικότητας, όλοι οι όροι μηδενίζονται εκτός από τον όρο $r=n$ οπότε

$$M_n \ddot{q}_n(t) + \sum_{r=1}^N C_{nr} \dot{q}_r(t) + K_n q_n(t) = P_n(t) \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{P}(t) \quad \text{όπου } \mathbf{C} \text{ Μη Διαγώνιος Πίνακας με συντελεστές } C_{nr}$$

$$\text{Για κλασική απόσβεση } C_{nr} = 0 \text{ για } n \neq r \quad \Rightarrow \quad \ddot{q}_n(t) + 2\zeta_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{P_n(t)}{M_n}$$



Δυναμική Ανάλυση και Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

B. Ιδιομορφική Ανάλυση

3. Απόκριση μετατόπισης

Για δεδομένη εξωτερική φόρτιση η απόκριση ενός πολυβάθμιου συστήματος μπορεί να προσδιοριστεί λύνοντας την εξίσωση $\ddot{q}_n(t) + 2\zeta_n\omega_n\dot{q}_n + \omega_n^2q_n = P_n / M_n$ για τις ιδιομορφικές συντεταγμένες. Από τη στιγμή που οι q_n προσδιοριστούν η συμπεριφορά της n -ιοστής ιδιομορφής στις κομβικές μετατοπίσεις $\mathbf{u}(t)$ είναι

$$\mathbf{u}_n(t) = \boldsymbol{\varphi}_n q_n(t)$$

και συνδυάζοντας αυτές τις ιδιομορφικές συνεισφορές παίρνουμε τις ολικές μετατοπίσεις

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^N \mathbf{u}_n(t) = \sum_{n=1}^N \boldsymbol{\varphi}_n q_n(t)$$

Η διαδικασία είναι γνωστή ως “κλασική μέθοδος επαλληλίας ιδιομορφικών μετατοπίσεων” (classical mode displacement superposition method)

Δυναμική Ανάλυση και Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

B. Ιδιομορφική Ανάλυση

4. Εντατικά μεγέθη στοιχείων

1^η Διαδικασία) Η n -ιοστή ιδιομορφική συμμετοχή $r_n(t)$ σε μια δύναμη του στοιχείου $r(t)$ προσδιορίζεται από τις ιδιομορφικές μετατοπίσεις $\mathbf{u}_n(t)$ χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του στοιχείου, ενώ το εντατικό μέγεθος του στοιχείου προκύπτει από τη συνεισφορά όλων των ιδιομορφών.

$$r(t) = \sum_{n=1}^N r_n(t)$$

2^η Διαδικασία) Οι ισοδύναμες στατικές δυνάμεις που σχετίζονται με τη n -ιοστή ιδιομορφική απόκριση ορίζονται χρησιμοποιώντας τη σχέση $\mathbf{f}_n(t) = \mathbf{k}\mathbf{u}_n(t)$. Αντικαθιστώντας στη σχέση απόκρισης μετατόπισης παίρνουμε:

$$\mathbf{f}_n(t) = \omega_n^2 \mathbf{m} \phi_n q_n(t)$$

Δυναμική Ανάλυση και Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

B. Ιδιομορφική Ανάλυση

5. Ιδιομορφική ανάλυση

Βήματα Διαδικασίας:

- 1) Καθορισμός των ιδιοτήτων της κατασκευής (m, k, ζ_η)
- 2) Προσδιορισμός των ιδιοσυχνοτήτων ω_η και ιδιομορφών ϕ_η
- 3) Υπολογισμός της απόκρισης σε κάθε ιδιομορφή ακολουθώντας τα παρακάτω
 - α) Σχηματισμός των ιδιομορφικών εξισώσεων και επίλυση για την εύρεση των q_η
 - β) Υπολογισμός των επικόμβιων μετατοπίσεων u_n
 - γ) Υπολογισμός των εντατικών μεγεθών των στοιχείων που σχετίζονται με τις επικόμβιες μετατοπίσεις εφαρμόζοντας μια από τις δύο μεθόδους που περιγράφηκαν, για τις επιθυμητές τιμές του χρόνου t
- 4) Συνδυασμός της συνεισφοράς όλων των ιδιομορφών για τον προσδιορισμό της ολικής απόκρισης.

Δυναμική Ανάλυση και Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

Γ. Συμβολές Ιδιομορφικής Απόκρισης

1. Ιδιομορφική ανάπτυξη του διανύσματος διέγερσης $p(t) = \mathbf{s} p(t)$

Θεωρούμε ότι οι επιβαλλόμενες δυνάμεις $p_j(t)$ έχουν την ίδια χρονική κατανομή $p(t)$ και η χωρική κατανομή τους ορίζεται από το \mathbf{s} ανεξάρτητο από το χρόνο

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{s} p(t) \quad \text{όπου} \quad \mathbf{s} = \sum_{r=1}^N s_r = \sum_{r=1}^N \Gamma_r \mathbf{m} \phi_r$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με Φ_n^T και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της ορθογωνικότητας λαμβάνουμε

$$\Gamma_n = \frac{\Phi_n^T \mathbf{s}}{M_n}$$

Η συνεισφορά της n -ιοστής ιδιομορφής στο \mathbf{s} είναι $s_n = \Gamma_n \mathbf{m} \phi_n$

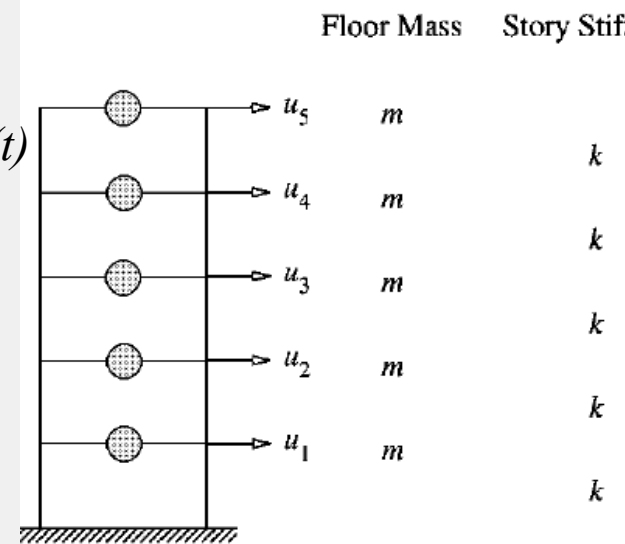
Δυναμική Ανάλυση και Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

Γ. Συμβολές Ιδιομορφικής Απόκρισης

1. Ιδιομορφική ανάπτυξη του διανύσματος διέγερσης $p(t) = s p(t)$

Θεωρούμε ότι η κατασκευή ταλαντώνεται στη n -οστή ιδιομορφή με επιταχύνσεις $\ddot{u}_n(t) = \ddot{q}_n(t) \Phi_n$ και αντίστοιχες αδρανειακές δυνάμεις

$$(\mathbf{f}_I)_n = -\mathbf{m}\ddot{u}_n(t) = -\mathbf{m}\Phi_n\ddot{q}_n(t)$$



Ιδιότητα 1) Το διάνυσμα δύναμης $s_n p(t)$ προκαλεί απόκριση μόνο στη n -οστή ιδιομορφή αλλά καμία απόκριση σε οποιαδήποτε άλλη ιδιομορφή.

Ιδιότητα 2) Η δυναμική απόκριση στη n -οστή ιδιομορφή οφείλεται εξ'ολοκλήρου στο μερικό διάνυσμα δύναμης $s_n p(t)$

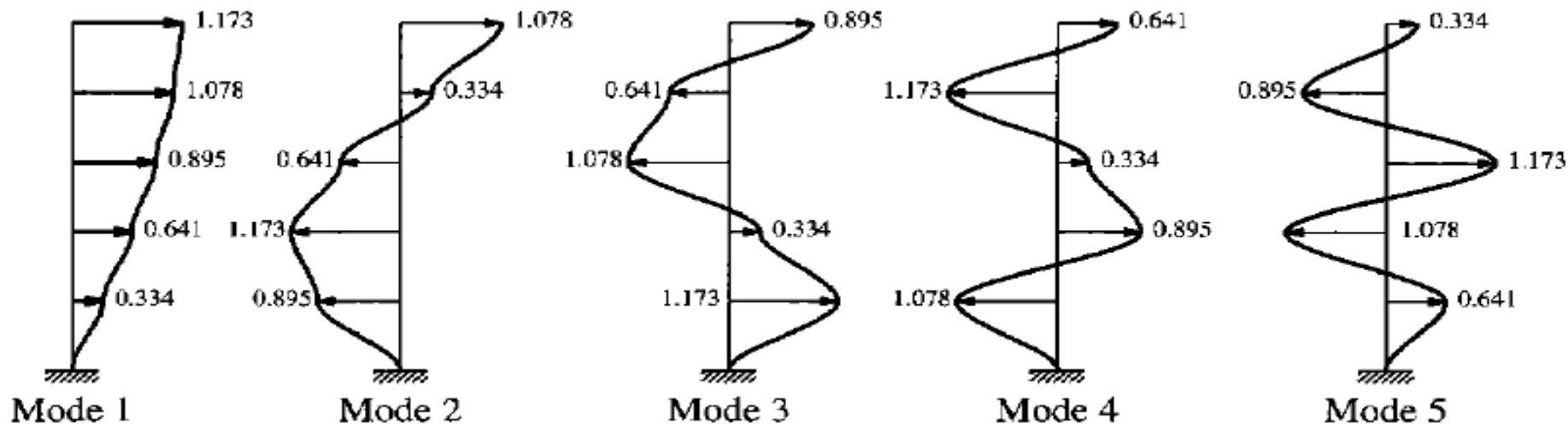
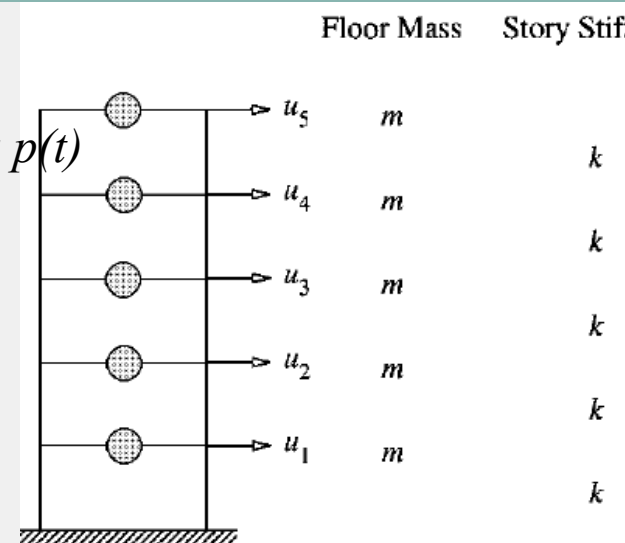
Δυναμική Ανάλυση και Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

Γ. Συμβολές Ιδιομορφικής Απόκρισης

1. Ιδιομορφική ανάπτυξη του διανύσματος διέγερσης $p(t) = s p(t)$

Θεωρούμε ότι η κατασκευή ταλαντώνεται στη v -ιοστή ιδιομορφή με επιταχύνσεις $\ddot{u}_n(t) = \ddot{q}_n(t) \phi_n$ και αντίστοιχες αδρανειακές δυνάμεις

$$(\mathbf{f}_I)_n = -\mathbf{m}\ddot{u}_n(t) = -\mathbf{m}\phi_n\ddot{q}_n(t)$$



Δυναμική Ανάλυση και Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

Γ. Συμβολές Ιδιομορφικής Απόκρισης

2. Ιδιομορφική ανάλυση για $p(t) = s p(t)$

Η γενικευμένη δύναμη $P_n(t) = \Gamma_n M_n p(t)$ για τη n -οστή ιδιομορφή αντικαθίσταται για να προκύψει η ιδιομορφική εξίσωση

$$\ddot{q}_n(t) + 2\zeta_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \Gamma_n p(t)$$

Ο συντελεστής Γ καλείται συντελεστής ιδιομορφική συμμετοχής.

Μειονέκτημα 1) Το Γ δεν είναι ανεξάρτητο από τον τρόπο με τον οποίο κανονικοποιείται η ιδιομορφή.

Μειονέκτημα 2) Το Γ δεν είναι μέτρο της συνεισφοράς της ιδιομορφής στο μέγεθος απόκρισης.

Για να ξεπεράσουμε τα παραπάνω μειονεκτήματα ορίζεται ο συντελεστής ιδιομορφικής συνεισφοράς r_n ως ακολούθως.

Δυναμική Ανάλυση και Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

Γ. Συμβολές Ιδιομορφικής Απόκρισης

2. Ιδιομορφική ανάλυση για $p(t) = s p(t)$

Θα γράψουμε τη λύση $q_n(t)$ για την απόκριση ενός μονοβάθμιου συστήματος. Θεωρούμε σύστημα με μοναδιαία μάζα και χαρακτηριστικά ταλάντωσης – ιδιοσυχνότητας ω_n και λόγο απόσβεσης ζ_n – της n -οστής ιδιομορφής ενός πολυβάθμιου συστήματος που διεγείρεται από δύναμη $p(t)$.

Η εξίσωση της απόκρισης αυτής της n -οστής ιδιομορφής μονοβάθμιου συστήματος επαναλαμβάνεται εδώ με την ποσότητα u να έχει αντικατασταθεί από το σύμβολο D_n για να δοθεί έμφαση στη σχέση με την n -οστή ιδιομορφή.

$$\ddot{D}_n(t) + 2\zeta_n\omega_n\dot{D}_n + \omega_n^2 D_n = p(t)$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει ότι $q_n(t) = \Gamma_n D_n(t)$

Έτσι τα q_n προκύπτουν άμεσα από τα D_n , χρησιμοποιώντας τα διαθέσιμα αποτελέσματα για μονοβάθμια συστήματα υποβαλλόμενα σε τυχαία φόρτιση.

Δυναμική Ανάλυση και Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

Γ. Συμβολές Ιδιομορφικής Απόκρισης

2. Ιδιομορφική ανάλυση για $p(t) = s p(t)$

Η συμβολή της n -οστής ιδιομορφής στις επικόμβιες μετατοπίσεις είναι

$$\mathbf{u}_n(t) = \Gamma_n \Phi_n D_n(t)$$

απ' όπου προκύπτουν οι ισοδύναμες στατικές δυνάμεις

$$\mathbf{f}_n(t) = \mathbf{s}_n \left[\omega_n^2 D_n(t) \right]$$

Η συμβολή της n -οστής ιδιομορφής $r_n(t)$ σε οποιοδήποτε μέγεθος απόκρισης $r(t)$ προσδιορίζεται από τη στατική ανάλυση της κατασκευής υποβαλλόμενη σε δυνάμεις $\mathbf{f}_n(t)$.

$$r_n(t) = r_n^{st} \left[\omega_n^2 D_n(t) \right]$$

Συνδυάζοντας τις συμβολές των αποκρίσεων όλων των ιδιομορφών λαμβάνουμε την ολική απόκριση

$$r(t) = \sum_{n=1}^N r_n(t) = \sum_{n=1}^N r_n^{st} \left[\omega_n^2 D_n(t) \right]$$

Δυναμική Ανάλυση και Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

Γ. Συμβολές Ιδιομορφικής Απόκρισης

3. Συντελεστής ιδιομορφικής συμμετοχής

Η συνεισφορά της n -οστής ιδιομορφής στην ποσότητα απόκρισης r μπορεί να εκφραστεί ως

$$r_n(t) = r^{st} \bar{r}_n \left[\omega_n^2 D_n(t) \right]$$

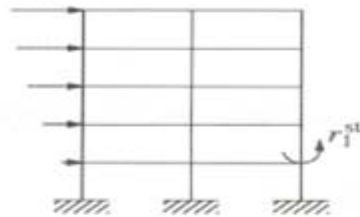
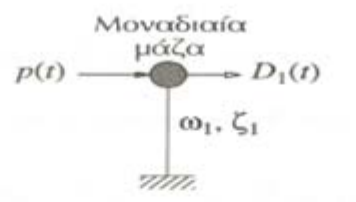
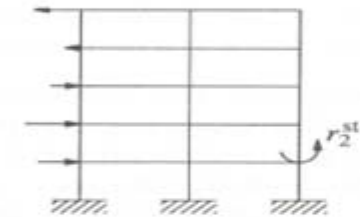
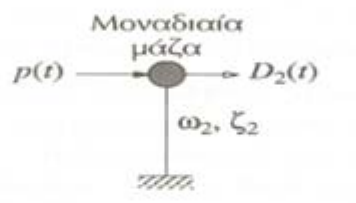

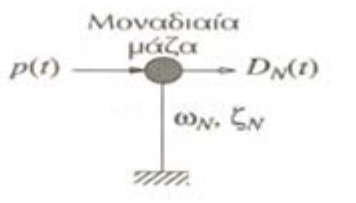
όπου r^{st} η στατική τιμή της r εξαιτίας των εξωτερικών δυνάμεων s και ο n -οστός παράγων ιδιομορφικής συνεισφοράς είναι

$$\bar{r}_n = \frac{r_n^{st}}{r^{st}}$$

Ιδιότητα 1) Είναι αδιαστατοποιημένοι.

Ιδιότητα 2) Είναι ανεξάρτητοι από τον τρόπο με τον οποίο κανονικοποιούνται οι ιδιομορφές.

Ιδιότητα 3) Το άθροισμα των συντελεστών ιδιομορφικής συνεισφοράς όλων των ιδιομορφών είναι ίσο με τη μονάδα.

Ιδιο-μορφή	Στατική ανάλυση της κατασκευής	Δυναμική ανάλυση μονοβάθμιου συστήματος	Ιδιομορφική συνεισφορά στην δυναμική απόκριση
1	<p>Δυνάμεις s_1</p> 	<p>Μοναδιαία μάζα</p> 	$r_1(t) = r_1^{st} [\omega_1^2 D_1(t)]$
2	<p>Δυνάμεις s_2</p> 	<p>Μοναδιαία μάζα</p> 	$r_2(t) = r_2^{st} [\omega_2^2 D_2(t)]$
•	•	•	•
N	<p>Δυνάμεις s_N</p> 	<p>Μοναδιαία μάζα</p> 	$r_N(t) = r_N^{st} [\omega_N^2 D_N(t)]$
Ολική απόκριση			$r(t) = \sum_{n=1}^N r_n(t)$

Εννοιολογική ερμηνεία της ιδιομορφικής ανάλυσης

Δυναμική Ανάλυση και Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

Γ. Συμβολές Ιδιομορφικής Απόκρισης

4. Ιδιομορφικές αποκρίσεις και απαιτούμενος αριθμός ιδιομορφών

Ο παράγων ιδιομορφικής συνεισφοράς και ο παράγων δυναμικής απόκρισης επηρεάζουν τις σχετικές συνεισφορές απόκρισης των διαφόρων ιδιομορφών ταλάντωσης, και ως εκ τούτου και τον ελάχιστο αριθμό ιδιομορφών που πρέπει να συμπεριληφθούν στη δυναμική ανάλυση.

$$r_{n0} = p_0 r_n^{st} \bar{r}_n R_{dn}$$

Συνήθως, στην ανάλυση ενός συστήματος με N β.ε. συμπεριλαμβάνονται οι πρώτες J ιδιομορφές, όπου J μπορεί να είναι αρκετά μικρότερος αριθμός από το N , και η ιδιομορφική άθροιση περικλύπτεται αντιστοίχως οδηγώντας σε σημαντική μείωση του υπολογιστικού κόστους.

Για να κρίνουμε τη συνεισφορά μιας ιδιομορφής στη δυναμική απόκριση μιας κατασκευής, είναι απαραίτητο να θεωρήσουμε τη συνδυασμένη επίδραση των παραγόντων ιδιομορφικής συνεισφοράς και δυναμικής απόκρισης.

Σεισμική Ανάλυση Γραμμικών Συστημάτων

Σεισμική Ανάλυση Γραμμικών Συστημάτων

Μέρος Α: Ανάλυση χρονοϊστορίας απόκρισης

1. Ιδιομορφική ανάλυση

- Εξισώσεις κίνησης:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}_{eff}(t), \quad \mathbf{p}_{eff}(t) = -\mathbf{m}\mathbf{i}\ddot{u}_g(t)$$

- Ιδιομορφικά αναπτύγματα μετατοπίσεων και δυνάμεων:

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^N \boldsymbol{\phi}_n q_n(t) = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{q}$$

- Η χωρική κατανομή των ενεργών σεισμικών δυνάμεων ορίζεται από την ποσότητα $\mathbf{s} = \mathbf{m}\mathbf{i}$. Αυτή η κατανομή μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\mathbf{m}\mathbf{i} = \sum_{n=1}^N \Gamma_n \mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n, \quad \Gamma_n = \frac{L_n}{M_n}, \quad L_n = \boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{m}\mathbf{i}, \quad M_n = \boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n$$

- Η συμβολή της n ιδιομορφής στο διάνυσμα διέγερσης δίνεται ως:

$$\mathbf{s}_n = \Gamma_n \mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n$$

Σεισμική Ανάλυση Γραμμικών Συστημάτων

Μέρος Α: Ανάλυση χρονοϊστορίας απόκρισης

1. Ιδιομορφική ανάλυση

- Ιδιομορφικές εξισώσεις:

$$\ddot{q}_n + 2\zeta_n\omega_n\dot{q}_n + \omega_n^2q_n = -\Gamma_n\ddot{u}_g(t) \Rightarrow$$

$$\ddot{D}_n + 2\zeta_n\omega_n\dot{D}_n + \omega_n^2D_n = -\ddot{u}_g(t), \quad q_n(t) = \Gamma_n D_n(t)$$

- Ιδιομορφικές αποκρίσεις:

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{\Phi}_n q_n(t) = \Gamma_n \mathbf{\Phi}_n D_n(t)$$

- Οι ισοδύναμες στατικές δυνάμεις εξαρτώνται από τη συμβολή \mathbf{s}_n της κάθε ιδιομορφής στη χωρική κατανομή $\mathbf{m}\mathbf{i}$ των \mathbf{p}_{eff} και από την απόκριση της ψευδο-επιτάχυνσης του n μονοβαθμίου:

$$\mathbf{f}_n(t) = \mathbf{s}_n A_n(t), \quad A_n(t) = \omega_n^2 D_n(t)$$

Σεισμική Ανάλυση Γραμμικών Συστημάτων

Μέρος Α: Ανάλυση χρονοϊστορίας απόκρισης

1. Ιδιομορφική ανάλυση

- Η συμβολή r_n της n ιδιομορφής σε οποιαδήποτε ποσότητα $r(t)$ ορίζεται από στατική ανάλυση της κατασκευής με τις δυνάμεις $f_n(t)$. Η ποσότητα r_n^{st} συμβολίζει τη στατική τιμή του r λόγω των εξωτερικών δυνάμεων \mathbf{s}_n :

$$r_n(t) = r_n^{st} A_n(t)$$

- Για τις μετατοπίσεις ισχύει:

$$\mathbf{u}_{st} = \mathbf{k}^{-1} (\Gamma_n \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_n) = \frac{\Gamma_n}{\omega_n^2} \boldsymbol{\phi}_n$$

$$\mathbf{u}_n(t) = \frac{\Gamma_n}{\omega_n^2} \boldsymbol{\phi}_n A_n(t)$$

Σεισμική Ανάλυση Γραμμικών Συστημάτων

Μέρος Α: Ανάλυση χρονοϊστορίας απόκρισης

1. Ιδιομορφική ανάλυση

- Συνολική απόκριση:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^N \mathbf{u}_n(t) = \sum_{n=1}^N \Gamma_n \Phi_n D_n(t)$$

$$r(t) = \sum_{n=1}^N r_n(t) = \sum_{n=1}^N r_n^{st} A_n(t)$$

- Η απόκριση ανώτερων ιδιομορφών, υπό συγκεκριμένες συνθήκες (οι ιδιοσυχνότητες να είναι τόσο μικρές ώστε η ψευδο-επιτάχυνση σχεδόν να ταυτίζεται με την επιτάχυνση του εδάφους) να προσδιοριστούν από στατική και όχι δυναμική ανάλυση, έτσι ισχύει:

$$r(t) = \sum_{i=1}^{N_d} r_n^{st} A_n(t) - \ddot{u}_g(t) \left(r^{st} - \sum_{i=1}^{N_d} r_n^{st} \right), \quad r^{st} = \sum_{i=1}^{N_d} r_n^{st}$$

Σεισμική Ανάλυση Γραμμικών Συστημάτων

Μέρος Α: Ανάλυση χρονοϊστορίας απόκρισης

1. Ιδιομορφική ανάλυση

- Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί και για περιπτώσεις στροφικής κίνησης της βάσης:

$$\mathbf{p}_{eff}(t) = -\mathbf{m}\mathbf{i}\ddot{\theta}_g(t)$$

- Όπου \mathbf{i} είναι το διάνυσμα των στατικών μετατοπίσεων όλων των β.ε. για μοναδιαία στροφή στη βάση

Σεισμική Ανάλυση Γραμμικών Συστημάτων

Μέρος Α: Ανάλυση χρονοϊστορίας απόκρισης

2. Πολυώροφα κτίρια συμμετρικής κάτοψης

- Θεωρείται πολυώροφο κτίριο συμμετρικής κάτοψης με άκαμπτα διαφράγματα που υποβάλλεται σε οριζόντια μετακίνηση της βάσης του. Ισχύει:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = -\mathbf{m}\mathbf{1}\ddot{u}_g(t)$$

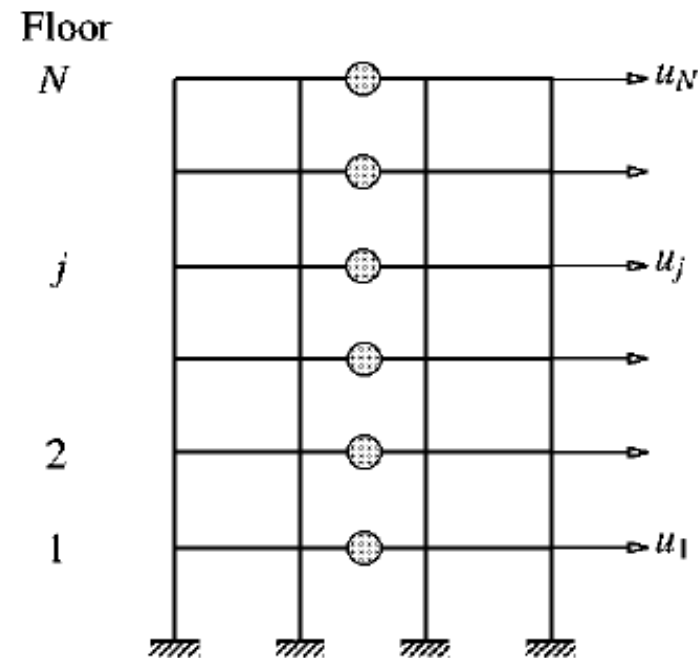
- Η χωρική κατανομή των ενεργών σεισμικών δυνάμεων ορίζεται από την ποσότητα $\mathbf{s}=\mathbf{m}\mathbf{1}$. Αυτή η κατανομή εκφράζεται ως:

$$\mathbf{m}\mathbf{1} = \sum_{n=1}^N \Gamma_n \mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n$$

$$\Gamma_n = \frac{L_n^h}{M_n}, \quad L_n^h = \sum_{j=1}^N m_j \varphi_{jn}, \quad M_n = \sum_{j=1}^N m_j \varphi_{jn}^2$$

- Η συμβολή της n ιδιομορφής στο διάνυσμα διέγερσης δίνεται ως:

$$\mathbf{s}_n = \Gamma_n \mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n, \quad s_{jn} = \Gamma_n m_j \varphi_{jn}$$



Σεισμική Ανάλυση Γραμμικών Συστημάτων

Μέρος Α: Ανάλυση χρονοϊστορίας απόκρισης

2. Πολυώροφα κτίρια συμμετρικής κάτοψης

- Η πλευρική μετατόπιση του j ορόφου του κτιρίου δίνεται ως:

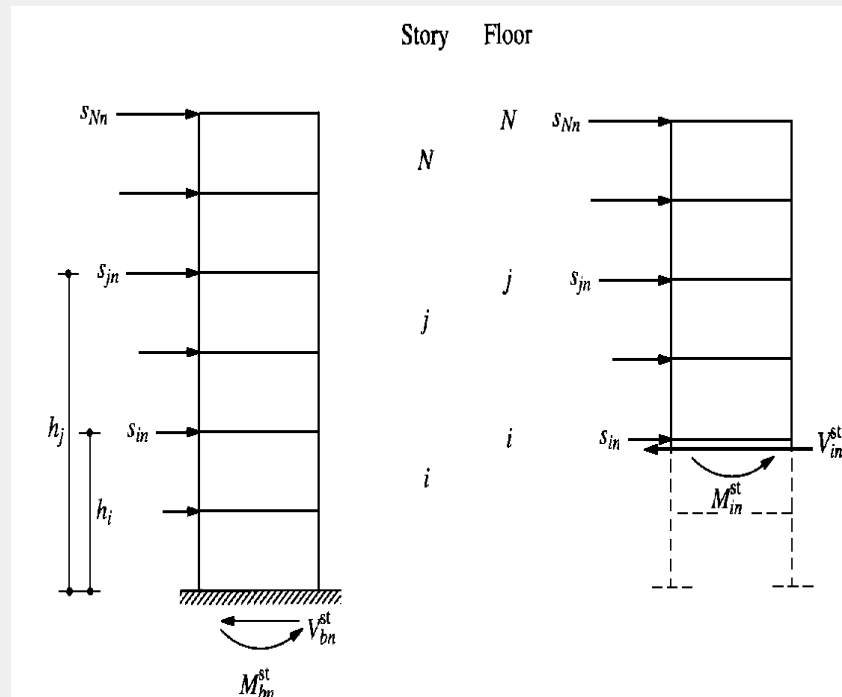
$$u_{jn}(t) = \Gamma_n \varphi_{jn} D_n(t)$$

- Η σχετική μετατόπιση ή η παραμόρφωση του ορόφου j δίνεται από τη διαφορά της μετατόπισης σε σχέση με τον κάτω όροφο:

$$\begin{aligned} \Delta_{jn}(t) &= u_{jn}(t) - u_{j-1,n}(t) = \\ &= \Gamma_n (\varphi_{jn} - \varphi_{j-1,n}) D_n(t) \end{aligned}$$

- Οι ισοδύναμες στατικές δυνάμεις για τη n ιδιομορφή δίνονται ως:

$$\mathbf{f}_n(t) = \mathbf{s}_n \mathbf{A}_n(t), \quad f_{jn}(t) = s_{jn} A_n(t)$$



Σεισμική Ανάλυση Γραμμικών Συστημάτων

Μέρος Α: Ανάλυση χρονοϊστορίας απόκρισης

2. Πολυώροφα κτίρια συμμετρικής κάτοψης

- Η απόκριση $r_n(t)$ εξαιτίας της n ιδιομορφής δίδεται ως:

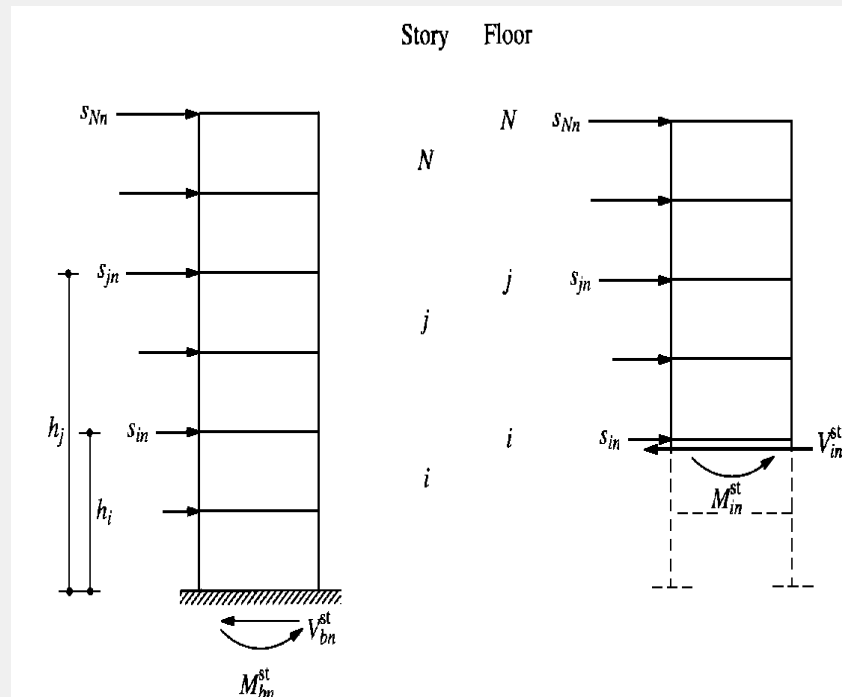
$$r_n(t) = r_n^{st} A_n(t)$$

- Η συνολική απόκριση δίνεται ως:

$$r(t) = \sum_{n=1}^N r_n(t) = \sum_{n=1}^N r_n^{st} A_n(t)$$

- Οι επιταχύνσεις των πατωμάτων μπορούν να υπολογιστούν ως:

$$\ddot{u}_j^t(t) = \ddot{u}_g(t) + \sum_{n=1}^N \Gamma_n \varphi_{jn} \ddot{D}_n(t)$$



Σεισμική Ανάλυση Γραμμικών Συστημάτων

Μέρος Α: Ανάλυση χρονοϊστορίας απόκρισης

2. Πολυώροφα κτίρια συμμετρικής κάτοψης

- Σύνοψη:
 1. Καθορισμός εδαφικής επιτάχυνσης $\ddot{u}_g(t)$ αριθμητικά σε κάθε χρονικό βήμα Δt .
 2. Προσδιορισμός ιδιοτήτων κατασκευής: Καθορισμός μητρώων μάζας και δυσκαμψίας \mathbf{m} , \mathbf{k} και εκτίμηση ιδιομορφικών λόγων απόσβεσης ζ_n .
 3. Υπολογισμός ιδιοσυχνοτήτων ω_n ($T_n=2\pi/\omega_n$) και ιδιομορφών ταλάντωσης φ_n .
 4. Υπολογισμός ιδιομορφικών συνιστωσών \mathbf{s}_n της κατανομής ενεργών σεισμικών δυνάμεων.

Σεισμική Ανάλυση Γραμμικών Συστημάτων

Μέρος Α: Ανάλυση χρονοϊστορίας απόκρισης

2. Πολυώροφα κτίρια συμμετρικής κάτοψης

- Σύνοψη:
5. Προσδιορισμός της συνεισφοράς της n ($n=1 \dots N$) ιδιομορφής στην συνολική απόκριση ως εξής:
 - Στατική ανάλυση του κτιρίου υπό τις πλευρικές δυνάμεις \mathbf{s}_n για να προσδιοριστεί η ιδιομορφική στατική απόκριση r_n^{st} για κάθε επιθυμητή ποσότητα απόκρισης r .
 - Προσδιορισμός απόκρισης ψευδο-επιτάχυνσης $A_n(t)$ του μονοβαθμίου συστήματος της n ιδιομορφής για την επιτάχυνση εδάφους $\ddot{u}_g(t)$, χρησιμοποιώντας αριθμητικές μεθόδους χρονικών βημάτων.
 - Προσδιορισμός της $r_n(t)$.
 6. Επαλληλίζουμε τις συνεισφορές των ιδιομορφών $r_n(t)$ και λαμβάνουμε την ολική απόκριση:

Σεισμική Ανάλυση Γραμμικών Συστημάτων

Μέρος Α: Ανάλυση χρονοϊστορίας απόκρισης

2. Πολυώροφα κτίρια συμμετρικής κάτοψης

- Ενεργός ιδιομορφική μάζα και ιδιομορφικό ύψος:

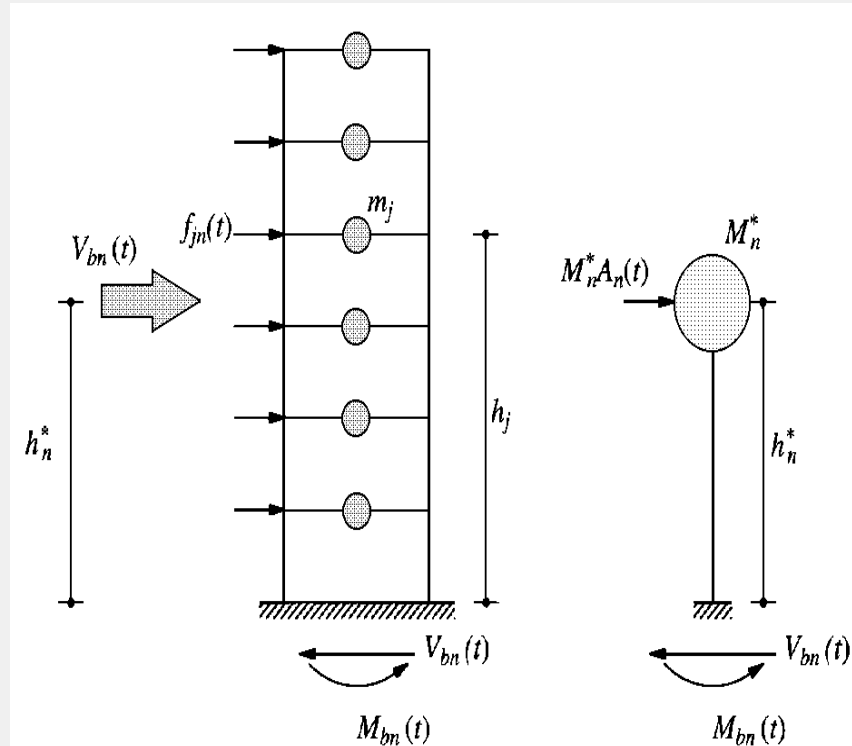
$$M_n^* = \Gamma_n L_n^h = \frac{(L_n^h)^2}{M_n}, \quad h_n^* = \frac{L_n^{\vartheta}}{L_n^h}, \quad L_n^{\vartheta} = \sum_{j=1}^N h_j m_j \varphi_{jn}$$

- Οι παραπάνω ποσότητες έχουν φυσικό νόημα που θα προσδιοριστεί στη συνέχεια. Θεωρούμε τη τέμνουσα βάσης της n ιδιομορφής:

$$V_{bn}(t) = V_{bn}^{st} A_n(t)$$

- Η V_{bn}^{st} αντικαθίσταται από (βλ. Πίνακα 13.2.1):

$$V_{bn}(t) = M_n^* A_n(t)$$



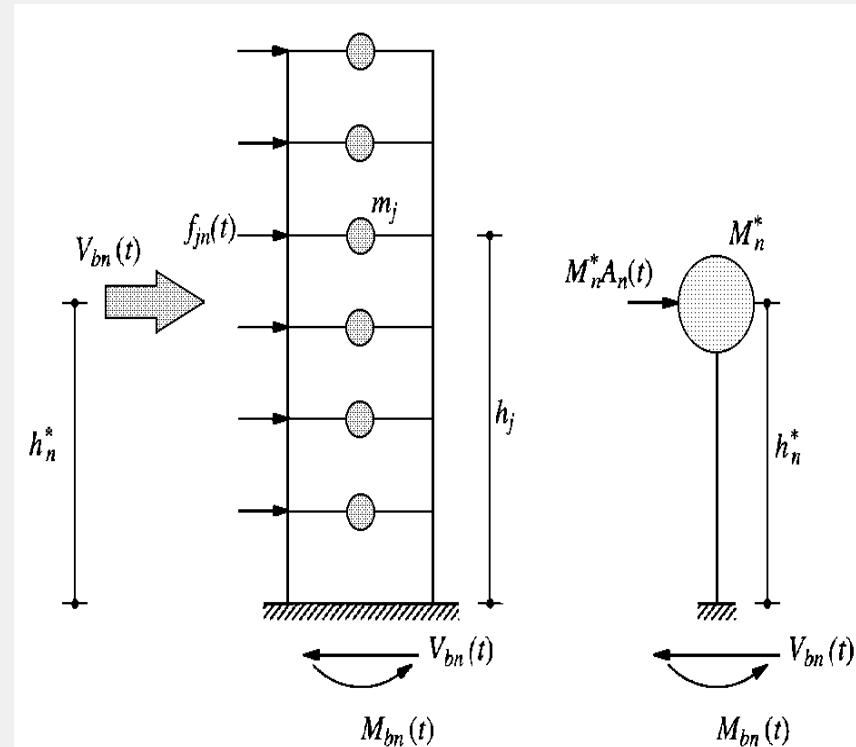
Σεισμική Ανάλυση Γραμμικών Συστημάτων

Μέρος Α: Ανάλυση χρονοϊστορίας απόκρισης

2. Πολυώροφα κτίρια συμμετρικής κάτοψης

- Η παραπάνω σχέση είναι αντίστοιχη με αυτή που δίνει την τέμνουσα βάσης σε ένα μονώροφο κτίριο. Γίνεται λοιπόν φανερό ότι εάν η μάζα ενός μονοβαθμίου με ιδιοσυχνότητα ω_n και ζ_n είναι ίση με M_n^* τότε παράγει την ίδια τέμνουσα βάσης με την n ιδιομορφή ενός πολυωρόφου κτιρίου όπου οι μάζες είναι κατανομημένες στους ορόφους. Έτσι η ποσότητα M_n^* ονομάζεται ενεργός ιδιομορφική μάζα τέμνουσας βάσης ή ενεργός ιδιομορφική μάζα. Επίσης Ισχύει:

$$\sum_{n=1}^N M_n^* = \sum_{j=1}^N m_j$$



Σεισμική Ανάλυση Γραμμικών Συστημάτων

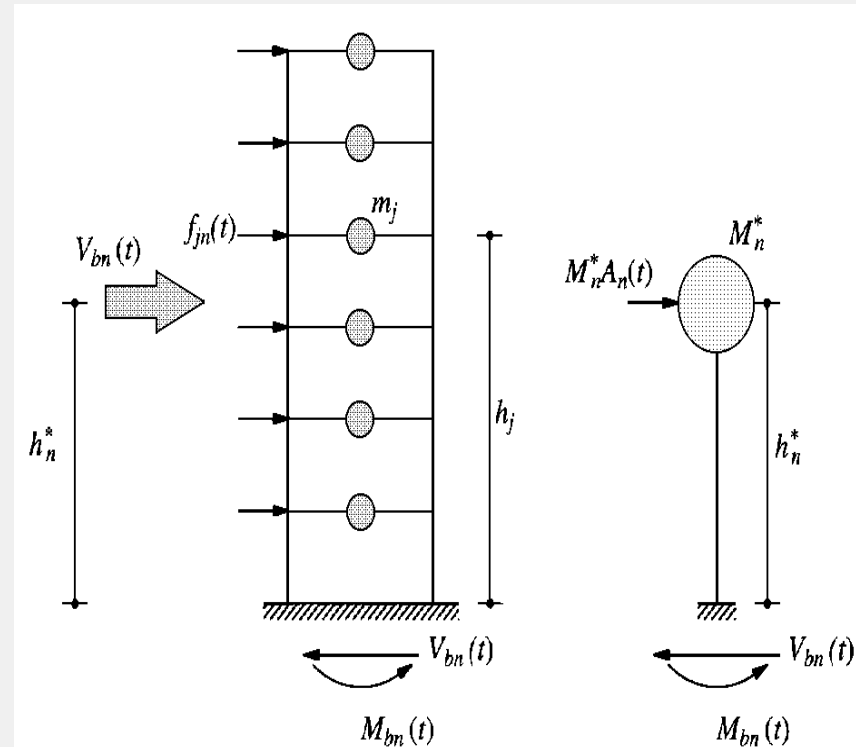
Μέρος Α: Ανάλυση χρονοϊστορίας απόκρισης

2. Πολυώροφα κτίρια συμμετρικής κάτοψης

- Στη συνέχεια θα συγκριθούν οι σχέσεις για τη ροπή ανατροπής βάσης σε πολυώροφα και μονώροφα κτίρια. Η ροπή ανατροπής βάσης για το πολυώροφο κτίριο δίνεται ως (βλ. Πίνακα 13.2.1):

$$M_{bn}(t) = M_{bn}^{st} A_n(t) \Rightarrow M_{bn}(t) = h_n^* V_{bn}(t)$$

- Η σχέση αυτή δείχνει ότι αν το μονοβάθμιο σύστημα έχει μάζα M_n^* και είναι συγκεντρωμένη σε ύψος h_n^* τότε η ροπή ανατροπής που δημιουργείται είναι ίση με αυτή της n ιδιομορφής του πολυωρόφου



Σεισμική Ανάλυση Γραμμικών Συστημάτων

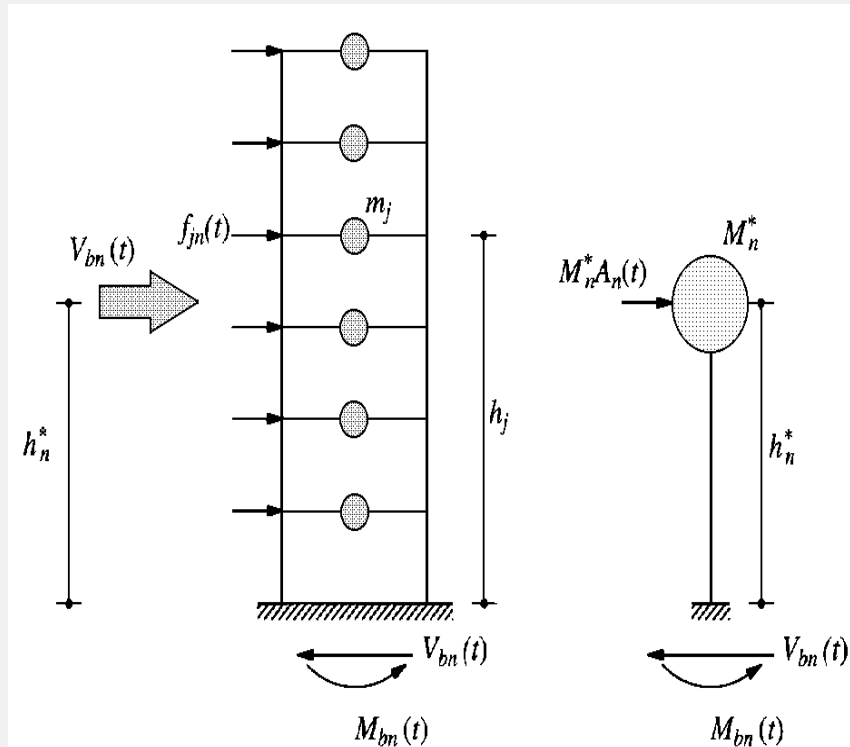
Μέρος Α: Ανάλυση χρονοϊστορίας απόκρισης

2. Πολυώροφα κτίρια συμμετρικής κάτοψης

- Η ποσότητα h_n^* ονομάζεται ενεργό ιδιομορφικό ύψος, είναι μικρότερο από το ολικό ύψος και εξαρτάται από την κατανομή της μάζας καθ' ύψος και από το σχήμα της ιδιομορφής. Ακόμη ισχύει η παρακάτω σχέση (βλ. Απόδειξη 13.2):

$$\sum_{n=1}^N h_n^* M_n^* = \sum_{j=1}^N h_j m_j$$

- Για κάποιες από τις ανώτερες ιδιομορφές, το ενεργό ιδιομορφικό ύψος μπορεί να προκύψει αρνητικό. Αυτό υποδεικνύει ότι η ιδιομορφική στατική τέμνουσα βάσης και η ιδιομορφική στατική ροπή ανατροπής της n ιδιομορφής έχουν αντίθετα πρόσημα.



Σεισμική Ανάλυση Γραμμικών Συστημάτων

Μέρος Β: Φασματική δυναμική ανάλυση

3. Μέγιστη απόκριση από το φάσμα σεισμικής απόκρισης

- Η μέθοδος ανάλυσης χρονο-ιστορίας απόκρισης παρέχει την απόκριση $r(t)$ ως συνάρτηση του χρόνου, αλλά ο σχεδιασμός βασίζεται συνήθως στις μέγιστες τιμές των δυνάμεων και των παραμορφώσεων για όλη τη διάρκεια της σεισμικά επιβαλλόμενης απόκρισης.
- Σε αναλογία με το μονοβάθμιο σύστημα η μέγιστη απόκριση μπορεί να υπολογιστεί από φάσμα απόκρισης.
- Η απόκριση που λαμβάνεται από τη δυναμική φασματική ανάλυση για πολυβάθμια συστήματα δεν είναι τόσο ακριβής όσο η ανάλυση χρονο-ιστορίας απόκρισης.
- Η ακρίβεια που επιτυγχάνεται με τη δυναμική φασματική ανάλυση είναι αποδεκτή για τις συνήθεις εφαρμογές σχεδιασμού κατασκευών.

Σεισμική Ανάλυση Γραμμικών Συστημάτων

Μέρος Β: Φασματική δυναμική ανάλυση

3. Μέγιστη απόκριση από το φάσμα σεισμικής απόκρισης

- Μέγιστες ιδιομορφικές αποκρίσεις:

$$r_{n0} = r_n^{st} A_n$$

- Το A_n είναι η μέγιστη τιμή της $A_n(t)$ και προκύπτει από το φάσμα ψεύδο-επιτάχυνσης ως η τεταγμένη του $A_n(T_n, \zeta_n)$.
- Το αλγεβρικό πρόσημο της r_{n0} είναι ίδιο με αυτό της r_n^{st} γιατί η A_n είναι θετική εξ' ορισμού. Το πρόσημο αυτό πρέπει να διατηρείται.
- Όλα τα μεγέθη απόκρισης $r_n(t)$ που σχετίζονται με τη n ιδιομορφή λαμβάνουν τις μέγιστες τιμές τους την ίδια χρονική στιγμή που η $A_n(t)$ γίνεται μέγιστη.

Σεισμική Ανάλυση Γραμμικών Συστημάτων

Μέρος Β: Φασματική δυναμική ανάλυση

3. Μέγιστη απόκριση από το φάσμα σεισμικής απόκρισης

- Εν γένει οι ιδιομορφικές αποκρίσεις λαμβάνουν τις μέγιστες τιμές τους σε διαφορετικές χρονικές στιγμές δεν είναι εύκολο να προσδιοριστεί η μέγιστη τιμή της συνολικής απόκρισης. Άρα Γίνεται αναγκαίο να αναπτυχθούν κανόνες συνδυασμού των ιδιομορφών:

Σεισμική Ανάλυση Γραμμικών Συστημάτων

Μέρος Β: Φασματική δυναμική ανάλυση

3. Μέγιστη απόκριση από το φάσμα σεισμικής απόκρισης

- Εν γένει οι ιδιομορφικές αποκρίσεις λαμβάνουν τις μέγιστες τιμές τους σε διαφορετικές χρονικές στιγμές δεν είναι εύκολο να προσδιοριστεί η μέγιστη τιμή της συνολικής απόκρισης. Άρα Γίνεται αναγκαίο να αναπτυχθούν κανόνες συνδυασμού των ιδιομορφών:
- ABSSUM (Absolute Sum – Συνδυασμός απόλυτου αθροίσματος):

$$r_0 \leq \sum_{n=1}^N |r_{n0}|$$

Πολύ συντηρητικά αποτελέσματα

Σεισμική Ανάλυση Γραμμικών Συστημάτων

Μέρος Β: Φασματική δυναμική ανάλυση

3. Μέγιστη απόκριση από το φάσμα σεισμικής απόκρισης

- Εν γένει οι ιδιομορφικές αποκρίσεις λαμβάνουν τις μέγιστες τιμές τους σε διαφορετικές χρονικές στιγμές δεν είναι εύκολο να προσδιοριστεί η μέγιστη τιμή της συνολικής απόκρισης. Άρα Γίνεται αναγκαίο να αναπτυχθούν κανόνες συνδυασμού των ιδιομορφών:
- ABSSUM (Absolute Sum – Συνδυασμός απόλυτου αθροίσματος):

$$r_0 \leq \sum_{n=1}^N |r_{n0}|$$

Πολύ συντηρητικά αποτελέσματα

- SRSS (Square Root of Sum of Squares – Κανόνας τετραγωνικής ρίζας αθροίσματος των τετραγώνων)

$$r_0 \cong \left(\sum_{n=1}^N r_{n0}^2 \right)^{1/2}$$

Ακριβή αποτελέσματα για απόκριση συστημάτων με μεγάλη διαφορά ανάμεσα στις ιδιοσυχνότητες

Σεισμική Ανάλυση Γραμμικών Συστημάτων

Μέρος Β: Φασματική δυναμική ανάλυση

3. Μέγιστη απόκριση από το φάσμα σεισμικής απόκρισης

- CQC (Complete Quadratic Combination – Κανόνας πλήρους τετραγωνικού συνδυασμού)

Συντελεστής συσχέτισης.
Μεταβάλλεται από το 0
στο 1 και είναι ίσος με 1
για $i=n$

$$r_0 \cong \left(\sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^N \rho_{in} r_{i0} r_{n0} \right)^{1/2}$$

Ξεπερνά τους περιορισμούς του
κανόνα SRSS.

Σεισμική Ανάλυση Γραμμικών Συστημάτων

Μέρος Β: Φασματική δυναμική ανάλυση

3. Μέγιστη απόκριση από το φάσμα σεισμικής απόκρισης

- CQC (Complete Quadratic Combination – Κανόνας πλήρους τετραγωνικού συνδυασμού)

$$r_0 \cong \left(\sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^N \rho_{in} r_{i0} r_{n0} \right)^{1/2}$$

- Η παραπάνω σχέση μπορεί να ξαναγραφτεί ως:

$$r_0 \cong \left(\sum_{n=1}^N r_{n0}^2 + \underbrace{\sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^N \rho_{in} r_{i0} r_{n0}}_{i=n} \right)^{1/2}$$

Λόγω αυτού του όρου ο CQC δίνει τιμές μεγαλύτερες ή μικρότερες τιμές από τον SRSS.

Σεισμική Ανάλυση Γραμμικών Συστημάτων

Μέρος Β: Φασματική δυναμική ανάλυση

3. Μέγιστη απόκριση από το φάσμα σεισμικής απόκρισης

- Για τον συντελεστή συσχέτισης έχει προταθεί η παρακάτω έκφραση από τους Rosenblueth και Elorduy (1969):

$$\rho_{in} = \frac{1}{1 + \varepsilon_{in}^2}, \quad \varepsilon_{in} = \frac{\omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} - \omega_n \sqrt{1 - \zeta_n^2}}{\zeta'_i \omega_i + \zeta'_n \omega_n}, \quad \zeta'_n = \zeta_n + \frac{2}{\omega_n s}$$

Από τη σχέση αυτή φαίνεται ότι $\rho_{in} = \rho_{ni}$ και $\rho_{in} = 1$ για $i = n$.

Διάρκεια της ισχυρής φάσης της σεισμικής διέγερσης.

Σεισμική Ανάλυση Γραμμικών Συστημάτων

Μέρος Β: Φασματική δυναμική ανάλυση

3. Μέγιστη απόκριση από το φάσμα σεισμικής απόκρισης

- Για τον συντελεστή συσχέτισης έχει προταθεί η παρακάτω έκφραση από τους Rosenblueth και Elorduy (1969):

$$\rho_{in} = \frac{1}{1 + \varepsilon_{in}^2}, \quad \varepsilon_{in} = \frac{\omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} - \omega_n \sqrt{1 - \zeta_n^2}}{\zeta_i' \omega_i + \zeta_n' \omega_n}, \quad \zeta_n' = \zeta_n + \frac{2}{\omega_n s}$$

- Για ίδιους λόγους απόσβεσης σε κάθε ιδιομορφή και για μεγάλη διάρκεια σεισμού s η παραπάνω σχέση γράφεται ως:

$$\rho_{in} = \frac{\zeta^2 (1 + \beta_{in})^2}{(1 - \beta_{in})^2 + 4\zeta^2 \beta_{in}}, \quad \beta_{in} = \omega_i / \omega_n$$

Σεισμική Ανάλυση Γραμμικών Συστημάτων

Μέρος Β: Φασματική δυναμική ανάλυση

3. Μέγιστη απόκριση από το φάσμα σεισμικής απόκρισης

- Για τον συντελεστή συσχέτισης έχει προταθεί και η παρακάτω έκφραση από τον Der Kiureghian (1981):

$$\rho_{in} = \frac{8\sqrt{\zeta_i\zeta_n}(\beta_{in}\zeta_i + \zeta_n)\beta_{in}^{3/2}}{(1 - \beta_{in}^2)^2 + 4\zeta_i\zeta_n\beta_{in}(1 + \beta_{in}^2) + 4(\zeta_i^2 + \zeta_n^2)\beta_{in}^2}, \quad \beta_{in} = \omega_i/\omega_n$$

Από τη σχέση αυτή φαίνεται ότι
 $\rho_{in} = \rho_{ni}$ και $\rho_{in} = 1$ για $i=n$.

Σεισμική Ανάλυση Γραμμικών Συστημάτων

Μέρος Β: Φασματική δυναμική ανάλυση

3. Μέγιστη απόκριση από το φάσμα σεισμικής απόκρισης

- Για τον συντελεστή συσχέτισης έχει προταθεί και η παρακάτω έκφραση από τον Der Kiureghian (1981):

$$\rho_{in} = \frac{8\sqrt{\zeta_i\zeta_n}(\beta_{in}\zeta_i + \zeta_n)\beta_{in}^{3/2}}{(1-\beta_{in}^2)^2 + 4\zeta_i\zeta_n\beta_{in}(1+\beta_{in}^2) + 4(\zeta_i^2 + \zeta_n^2)\beta_{in}^2}, \quad \beta_{in} = \omega_i/\omega_n$$

- Για ίδιους λόγους απόσβεσης σε κάθε ιδιομορφή και για μεγάλη διάρκεια σεισμού s η παραπάνω σχέση γράφεται ως:

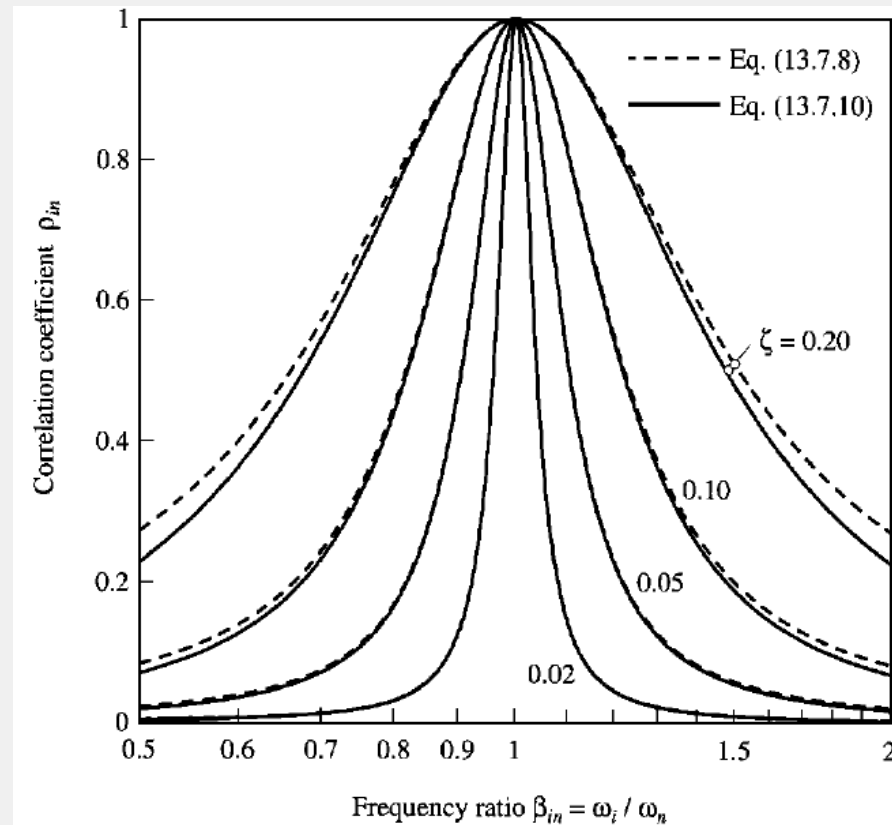
$$\rho_{in} = \frac{8\zeta^2(1+\beta_{in})\beta_{in}^{3/2}}{(1-\beta_{in}^2)^2 + 4\zeta^2\beta_{in}(1+\beta_{in}^2)}, \quad \beta_{in} = \omega_i/\omega_n$$

Σεισμική Ανάλυση Γραμμικών Συστημάτων

Μέρος Β: Φασματική δυναμική ανάλυση

3. Μέγιστη απόκριση από το φάσμα σεισμικής απόκρισης

- Ο συντελεστής συσχέτισης μειώνεται γρήγορα όσο οι ιδιοσυχνότητες ω_i και ω_n απομακρύνονται. Η μείωση είναι ακόμα πιο μεγάλη για μικρούς λόγους απόσβεσης
- Για κατασκευές με διαδοχικές ιδιοσυχνότητες που διαφέρουν αρκετά μεταξύ τους οι συντελεστές ρ_{in} τείνουν στο μηδέν
- Σαν αποτέλεσμα οι όροι για τους οποίους ισχύει $i \neq n$ στον κανόνα CQC μπορούν να αμεληθούν και ο κανόνας αυτός μετατρέπεται στον κανόνα SRSS.



Σεισμική Ανάλυση Γραμμικών Συστημάτων

Μέρος Β: Φασματική δυναμική ανάλυση

4. Πολυώροφα κτίρια συμμετρικής κάτοψης

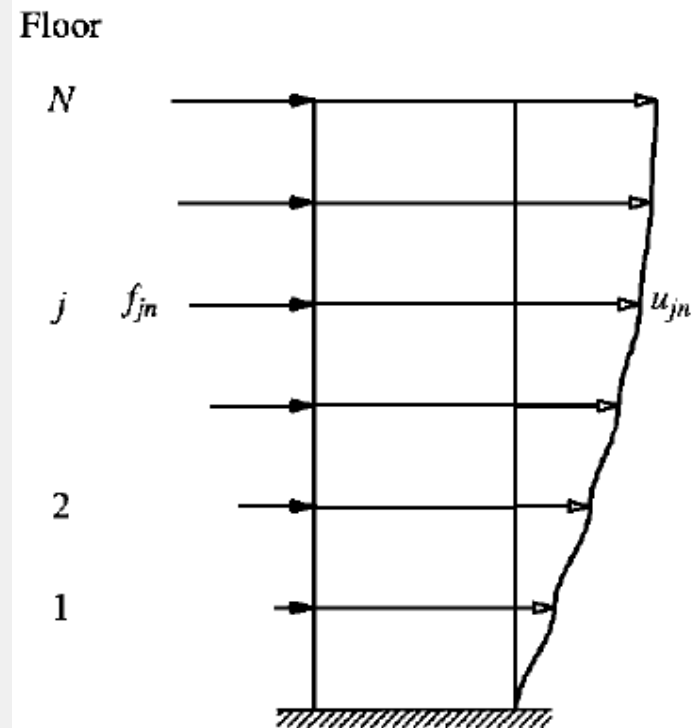
- Θεωρείται πολυώροφο κτίριο συμμετρικής κάτοψης που υποβάλλεται σε οριζόντια μετακίνηση της βάσης του. Ισχύει:
- Η ιδιομορφική στατική απόκριση r_n^{st} υπολογίζεται με στατική ανάλυση του κτιρίου για τις πλευρικές δυνάμεις \mathbf{s}_n (βλ. 13.2.1). Οι εκφράσεις της μετατόπισης του ορόφου j , της σχετικής μετατόπισης ορόφου Δ_j , της τέμνουσας βάσης V_b και της ροπής βάσης M_b προκύπτουν ως:

$$u_{jn} = \Gamma_n \varphi_{jn} D_n, \quad \Delta_{jn} = \Gamma_n (\varphi_{jn} - \varphi_{j-1,n}) D_n$$

$$V_{bn} = M_n^* A_n, \quad M_{bn} = h_n^* M_n^* A_n, \quad D_n = A_n / \omega_n^2$$

- Οι ισοδύναμες στατικές δυνάμεις προκύπτουν ως:

$$\mathbf{f}_n = \mathbf{s}_n A_n, \quad f_{ij} = \Gamma_n m_j \varphi_{jn} A_n$$



Σεισμική Ανάλυση Γραμμικών Συστημάτων

Μέρος Β: Φασματική δυναμική ανάλυση

4. Πολυώροφα κτίρια συμμετρικής κάτοψης

- Σύνοψη:
 1. Προσδιορισμός ιδιοτήτων κατασκευής: Υπολογισμός μητρώων μάζας και δυσκαμψίας \mathbf{m} , \mathbf{k} και εκτίμηση των λόγων απόσβεσης ζ_n .
 2. Υπολογισμός ιδιοσυχνοτήτων ω_n ($T_n=2\pi/\omega_n$) και ιδιομορφών ταλάντωσης φ_n .
 3. Υπολογισμός μέγιστης απόκρισης για την n ιδιομορφή ως εξής:
 - Για την ιδιοπερίοδο T_n και το λόγο απόσβεσης ζ_n προσδιορίζονται οι τιμές της μετατόπισης και της ψευδο-επιτάχυνσης από το φάσμα σεισμικής απόκρισης ή φάσμα σχεδιασμού.
 - Υπολογισμός των μετατοπίσεων των πατωμάτων και των σχετικών μετατοπίσεων των ορόφων.

Σεισμική Ανάλυση Γραμμικών Συστημάτων

Μέρος Β: Φασματική δυναμική ανάλυση

4. Πολυώροφα κτίρια συμμετρικής κάτοψης

- Σύνοψη:
 - Υπολογισμός ισοδύναμων πλευρικών στατικών δυνάμεων \mathbf{f}_n .
 - Υπολογισμός των εντατικών μεγεθών με στατική ανάλυση της κατασκευής υποβαλλόμενης σε φόρτιση \mathbf{f}_n .
- 4. Προσδιορισμός της μέγιστης τιμής r οποιουδήποτε μεγέθους απόκρισης χρησιμοποιώντας κάποιο κανόνα συνδυασμού (SRSS εάν οι ιδιοσυχνότητες απέχουν αρκετά μεταξύ τους).

Συνήθως οι κατώτερες ιδιομορφές συμβάλλουν σημαντικά στην απόκριση. Επομένως τα βήματα 2,3 εκτελούνται μόνο για αυτές τις ιδιομορφές.

Μείωση Βαθμών Ελευθερίας

Μείωση Βαθμών Ελευθερίας

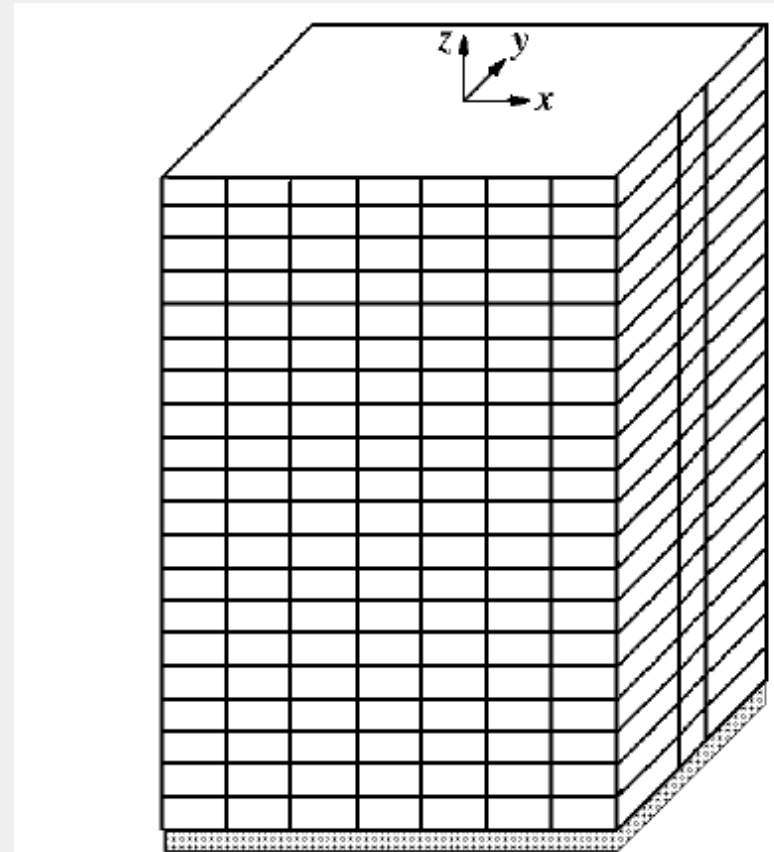
1. Κινηματικοί περιορισμοί

- Σε πολλές κατασκευές δημιουργούνται κινηματικοί περιορισμοί έτσι ώστε πολλοί β.ε. μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει ενός μικρότερου αριθμού β.ε. Π.χ. Ύπαρξη διαφραγμάτων \rightarrow 3 β.ε. ανά όροφο.

20-ωροφο κτίριο: 640 κόμβοι \times 6 β.ε.
= **3840** β.ε. Λόγω διαφραματικής λειτουργίας οι β.ε. γίνονται **1980**.

- Ένας άλλος κινηματικός περιορισμός που υιοθετείται συχνά αφορά την θεώρηση αξονικά απαραμόρφωτων υποστηλωμάτων

20-ωροφο κτίριο: οι **1980** β.ε.
μειώνονται στους **1340**.



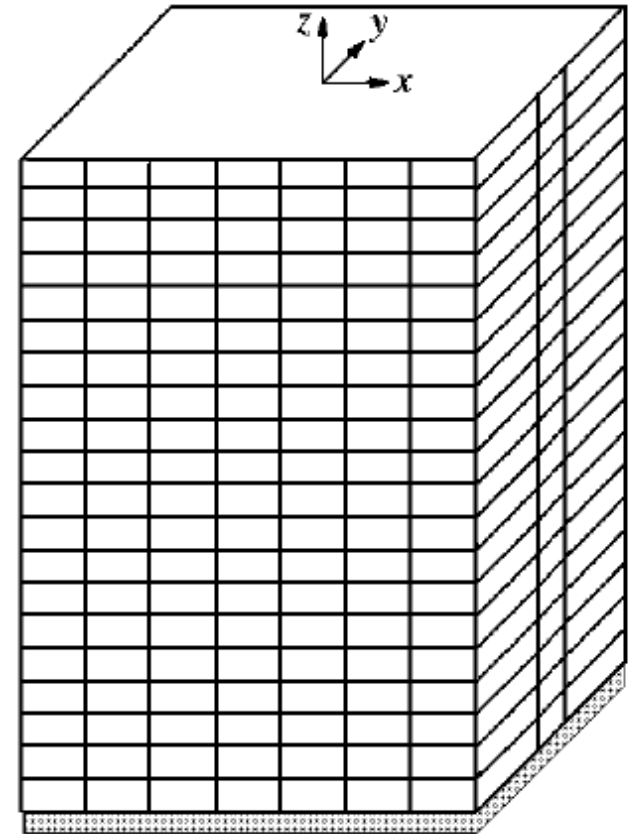
Μείωση Βαθμών Ελευθερίας

2. Συγκέντρωση μάζας σε επιλεγμένους β.ε.

- Η μάζα της κατασκευής μπορεί να προσομοιωθεί με συγκεντρωμένη στους κόμβους. Η στροφική αδράνεια θεωρείται αμελητέα. Συνεπώς μπορεί να εφαρμοστεί η διαδικασία της στατικής συμπύκνωσης.

20-ωροφο κτίριο: οι 1980 β.ε. μειώνονται στους 60.

- Εναλλακτική μέθοδος μείωσης β.ε. είναι και η μέθοδος Rayleigh-Ritz η οποία χρησιμοποιεί μια προεπιλεγμένη βάση μορφών παραμόρφωσης με την οποία μειώνει σημαντικά το σύστημα εξισώσεων και υπολογίζει μια προσέγγιση της λύσης.



Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

A. Μέθοδοι Χρονικών Βημάτων

B. Ανάλυση Γραμμικών Συστημάτων με Κλασική Απόσβεση

i) Μέθοδος κεντρικών διαφορών

ii) Μέθοδος Newmark

Γ. Ανάλυση μη Γραμμικών Συστημάτων

Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

A. Μέθοδοι Χρονικών Βημάτων

Σκοπός είναι η αριθμητική επίλυση του συστήματος διαφορικών εξισώσεων της απόκρισης πολυβάθμιων συστημάτων:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}(t) \quad \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_g - \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}_g$$

με αρχικές συνθήκες: $\mathbf{u} = \mathbf{u}(0)$ και $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}(0)$ για $t=0$

Η κλίμακα του χρόνου διαιρείται σε μια σειρά χρονικών βημάτων, συνήθως σταθερής διάρκειας Δt .

Η διέγερση δίδεται σε διακριτές χρονικές στιγμές $t_i = i\Delta t_i$ από το διάνυσμα φόρτισης $p_i = p(t_i)$ και η απόκριση προσδιορίζεται στις ίδιες χρονικές στιγμές και συμβολίζεται με $u_i = u(t_i)$.

Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

A. Μέθοδοι Χρονικών Βημάτων

Ξεκινώντας με τη γνωστή απόκριση του συστήματος τη χρονική στιγμή i που ικανοποιεί την εξίσωση κίνησης τη χρονική στιγμή i

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}_i + (\mathbf{f}_s)_i = \mathbf{p}_i$$

οι μέθοδοι χρονικών βημάτων μας δίνουν τη δυνατότητα να προσδιορίσουμε την απόκριση του συστήματος τη χρονική στιγμή $i+1$ που ικανοποιεί την εξίσωση κίνησης τη χρονική στιγμή $i+1$

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}_{i+1} + (\mathbf{f}_s)_{i+1} = \mathbf{p}_{i+1}$$

Όταν εφαρμόζεται διαδοχικά για $i=0,1,2,\dots$ η διαδικασία χρονικών βημάτων δίνει την επιθυμητή απόκριση για όλες τις στιγμές $i=1,2,\dots$

Οι γνωστές αρχικές συνθήκες τη χρονική στιγμή $i=0$ παρέχουν τις απαιτούμενες πληροφορίες για την έναρξη της διαδικασίας.

Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

B. Ανάλυση Γραμμικών Συστημάτων με Κλασική Απόσβεση

Οι προς επίλυση N διαφορικές εξισώσεις για τις επικόμβιες μετατοπίσεις \mathbf{u} όταν εφαρμόζονται για γραμμικά συστήματα είναι:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}(t)$$

Ακολουθώντας, οι επικόμβιες μετατοπίσεις προσεγγίζονται με ένα γραμμικό συνδυασμό των πρώτων J ιδιομορφών ($J < N$)

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^J \phi_n q_n(t) = \mathbf{\Phi}\mathbf{q}(t)$$

Χρησιμοποιώντας αυτό το μετασχηματισμό, η εξίσωση κίνησης γίνεται

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{P}(t)$$

Οι J εξισώσεις είναι ασύζευκτες για σύστημα με κλασική απόσβεση ενώ για μη κλασική απόσβεση (το \mathbf{C} δεν είναι διαγώνιο) οι J εξισώσεις είναι συζευγμένες και η επίλυση τους γίνεται αριθμητικά.

Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

B. Ανάλυση Γραμμικών Συστημάτων με Κλασική Απόσβεση Μέθοδος κεντρικών διαφορών

Η μέθοδος αυτή βασίζεται σε προσέγγιση πεπερασμένων διαφορών των παραγώγων ως προς το χρόνο της μετατόπισης.

Απαιτείται η μετατροπή των αρχικών συνθηκών των επικόμβιων μετατοπίσεων σε ιδιομορφικές συντεταγμένες,

Η λύση την χρονική στιγμή $i+1$ προσδιορίζεται από τη κατάσταση ισορροπίας τη χρονική στιγμή i χωρίς χρήση της κατάστασης ισορροπίας τη χρονική στιγμή $i+1$ το οποίο σημαίνει ότι η μέθοδος είναι ρητή αριθμητική μέθοδος.

Το χρονικό διάστημα Δt πρέπει να είναι αρκετά μικρό. Απαιτήση ευστάθειας:

$$\frac{\Delta t}{T_n} < 0.1$$

Παρατήρηση: $\Delta t = 0.1T_n < T_n / \pi$
που απαιτείται στα μονοβάθμια συστήματα.

Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

B. Ανάλυση Γραμμικών Συστημάτων με Κλασική Απόσβεση Μέθοδος Newmark

Οι βαθμωτές εξισώσεις της μεθόδου (όπως αναπτύχθηκε για μονοβάθμια συστήματα) που συνδέουν τις μεταβολές της απόκρισης από τη χρονική στιγμή i μέχρι $i+1$ με τα μεγέθη απόκρισης τη χρονική στιγμή i καθώς και η εξίσωση ισορροπίας μεταβολών μετατρέπονται σε μητρικές εξισώσεις όπως επίσης και οι αρχικές συνθήκες μετατρέπονται σε όρους ιδιομορφικών συντεταγμένων.

Οι παράμετροι β και γ ορίζουν την μεταβολή της επιτάχυνσης σε ένα χρονικό βήμα και προσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά της ευστάθειας και της ακρίβειας της μεθόδου.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Σταθερή Μέση} \\ \text{Επιτάχυνση} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \beta = 1/4 \\ \gamma = \frac{1}{2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta = 1/6 \\ \gamma = \frac{1}{2} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{Γραμμική Μεταβολή} \\ \text{Επιτάχυνση} \end{array} \right.$$

Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

B. Ανάλυση Γραμμικών Συστημάτων με Κλασική Απόσβεση Μέθοδος Newmark

Στη μέθοδο Newmark, η λύση την χρονική στιγμή $i+1$ προσδιορίζεται από τη κατάσταση ισορροπίας τη χρονική στιγμή $i+1$ (το \mathbf{K} υπεισέρχεται στο σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων για τον προσδιορισμό του q_{i+1} τη χρονική στιγμή $i+1$) γεγονός που σημαίνει ότι η μέθοδος είναι πεπλεγμένη.

Για Σταθερή Μέση Επιτάχυνση $\gamma = 1/2$ $\beta = 1/4$ $\Rightarrow \Delta t / T_n \leq \infty$

Οπότε η μέθοδος Μέση Επιτάχυνση είναι άνευ συνθηκών ευσταθής αλλά είναι ακριβής μόνο για μικρά Δt π.χ $\Delta t = 0.1T_n$

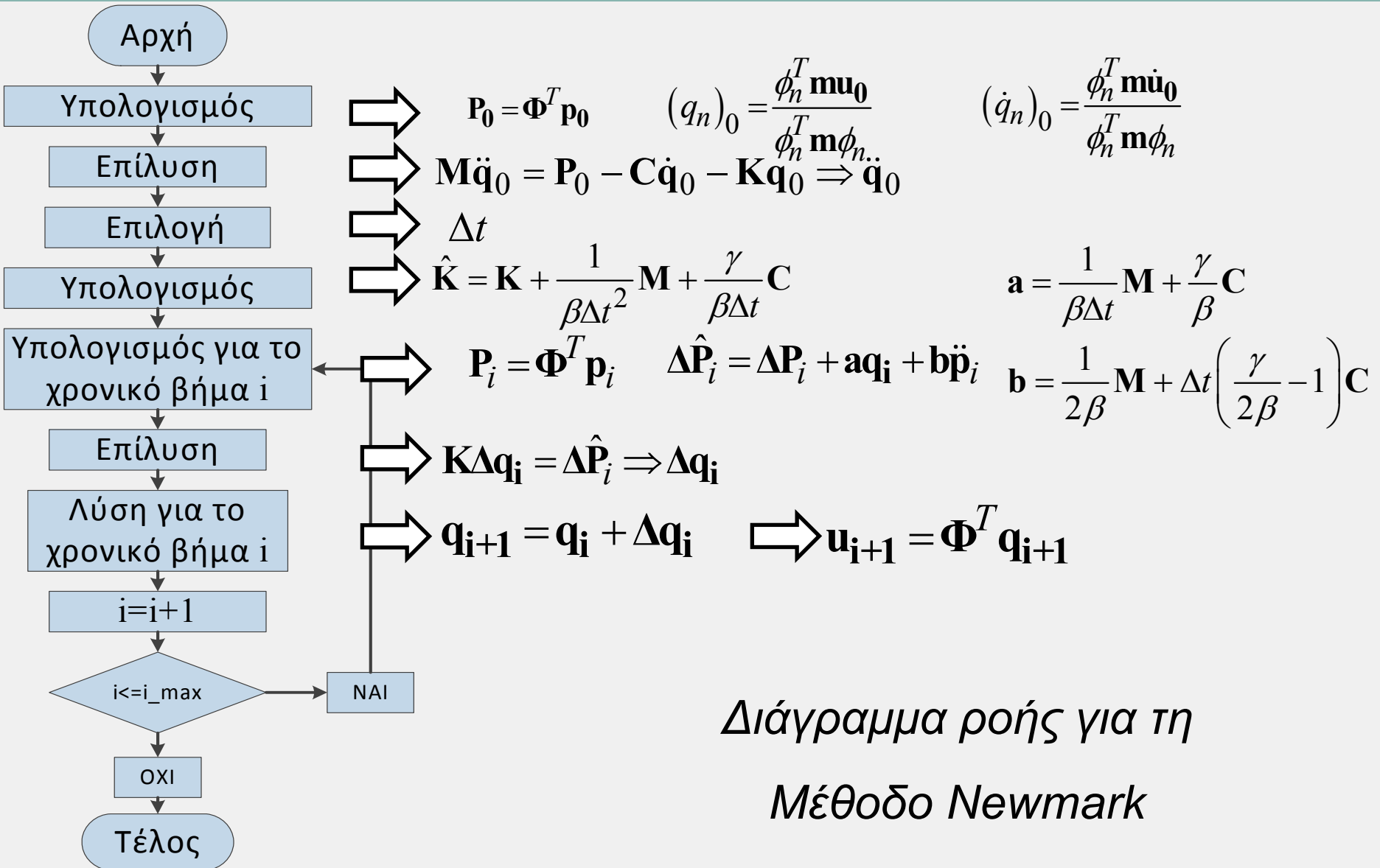
Για Γραμμική Μεταβολή Επιτάχυνσης $\gamma = 1/2$ $\beta = 1/6$ $\Rightarrow \Delta t / T_n \leq 0.551$

Υπό συνθήκες ευσταθής, ωστόσο και εδώ για να είναι η μέθοδος ακριβής το Δt πρέπει να είναι πολύ μικρότερο από το όριο ευστάθειας π.χ $\Delta t = 0.1T_n$

Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης



Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης



Συστήματα με Κατανεμημένη Μάζα και Ελαστικότητα

Συστήματα με Κατανεμημένη Μάζα και Ελαστικότητα

1. Εξίσωση Κίνησης χωρίς Απόσβεση: Επιβαλλόμενες Δυνάμεις
2. Εξίσωση Κίνησης χωρίς Απόσβεση: Διέγερση Στηρίξεων
3. Ιδιοσυχνότητες και Ιδιομορφές Ταλάντωσης
4. Ορθογωνικότητα των Ιδιομορφών
5. Ιδιομορφική Δυναμική Ανάλυση Απόκρισης σε Επιβαλλόμενη Φόρτιση
6. Ανάλυση Χρονοϊστορίας Σεισμικής Απόκρισης
7. Φασματική Δυναμική Ανάλυση Σεισμικής Απόκρισης
8. Δυσκολία στην Ανάλυση Πρακτικών Συστημάτων

Συστήματα με Κατανεμημένη Μάζα και Ελαστικότητα

1. Εξίσωση Κίνησης χωρίς Απόσβεση: Επιβαλλόμενες Δυνάμεις

Εγκάρσια ταλάντωση ευθύγραμμης δοκού χωρίς απόσβεση που υπόκειται σε εξωτερική δύναμη. Το μέτρο δυσκαμψίας $EI(x)$ και η μάζα $m(x)$ μπορούν να μεταβάλλονται με τη θέση x ενώ το εξωτερικά επιβαλλόμενο φορτίο $p(x,t)$ μπορεί να μεταβάλλεται με τη θέση και το χρόνο.

Το σύστημα έχει άπειρο αριθμό β.ε. επειδή η μάζα του είναι **κατανεμημένη**.

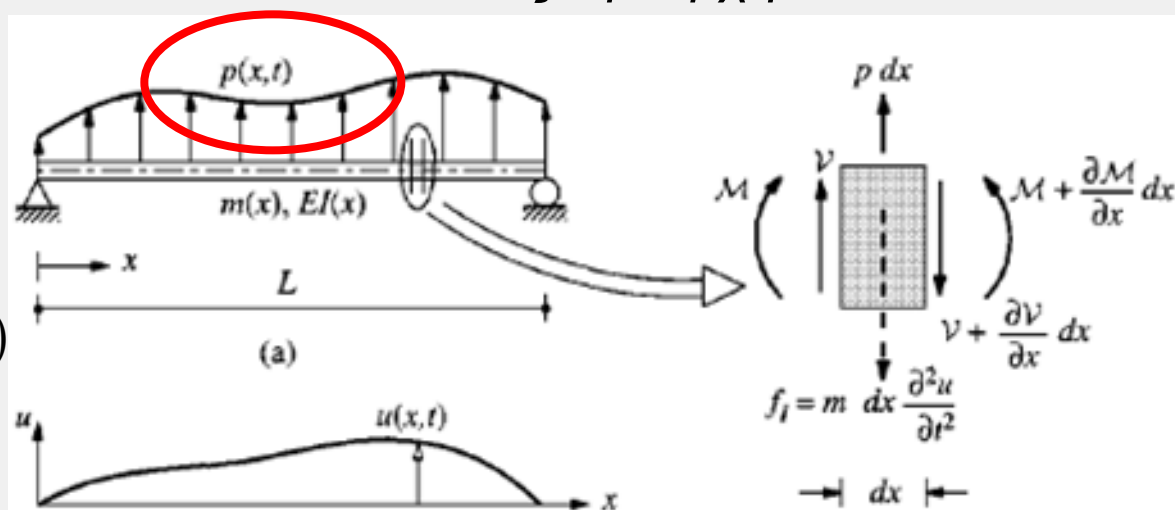
Δυνάμεις στο στοιχειώδες τμήμα δοκού ακολουθώντας την αρχή D' Alembert:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = p - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad V = \frac{\partial M}{\partial x}$$

Η μερική διαφορική εξίσωση:

$$m(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] = p(x,t)$$

Συνοριακές Συνθήκες: $u(x,0)$
 $\dot{u}(x,0)$



Συστήματα με Κατανεμημένη Μάζα και Ελαστικότητα

2. Εξίσωση Κίνησης χωρίς Απόσβεση: Διέγερση Στηρίξεων

Δύο απλές περιπτώσεις: i) μία δοκός πρόβολου που υπόκειται σε οριζόντια κίνηση βάσης και ii) μια δοκός με πολλαπλές στηρίξεις που υπόκειται σε πανομοιότυπη κίνηση στην κατακόρυφη διεύθυνση.

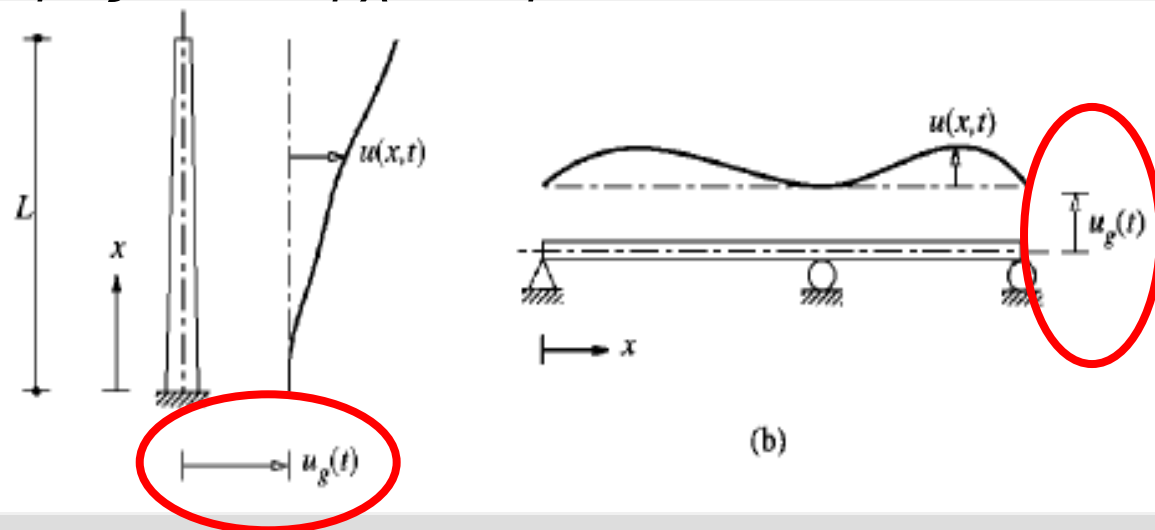
Η ολική μετατόπιση είναι: $u^t(x,t) = u(x,t) + u_g(t)$

Αναγνωρίζοντας ότι οι αδρανειακές δυνάμεις σχετίζονται με τις ολικές επιταχύνσεις και εξωτερικές δυνάμεις δεν υπάρχουν προκύπτει:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -m \frac{\partial^2 u^t}{\partial t^2} = -m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - m \frac{\partial^2 u_g}{\partial t^2}$$

Η μερική διαφορική εξίσωση:

$$m(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] = -m(x) \ddot{u}_g(x,t)$$



Συστήματα με Κατανεμημένη Μάζα και Ελαστικότητα

2. Εξίσωση Κίνησης χωρίς Απόσβεση: Διέγερση Στηρίξεων

Δύο απλές περιπτώσεις: i) μία δοκός πρόβολος που υπόκειται σε οριζόντια κίνηση βάσης και ii) μια δοκό με πολλαπλές στηρίξεις που υπόκειται σε πανομοιότυπη κίνηση στην κατακόρυφη διεύθυνση.

Η ολική μετατόπιση είναι: $u^t(x,t) = u(x,t) + u_g(t)$

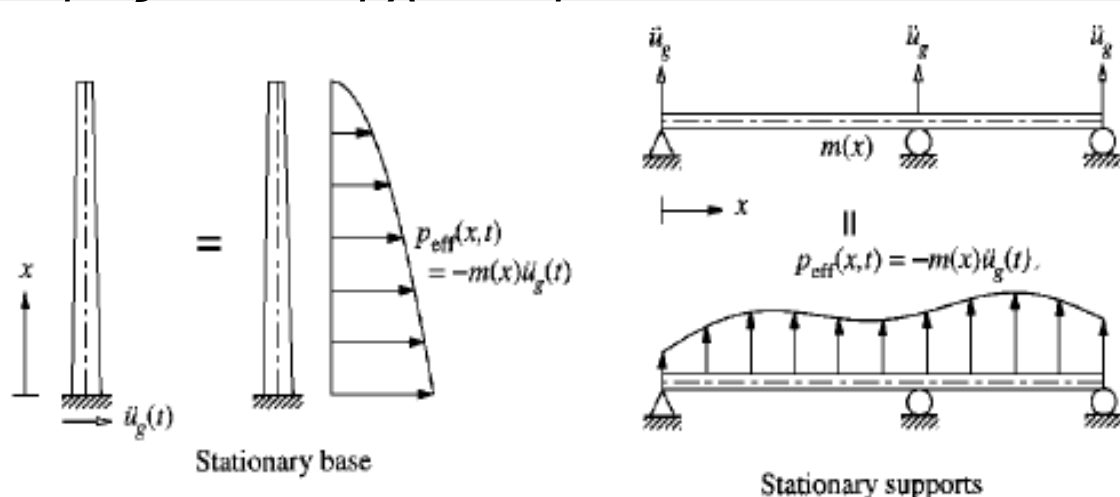
Αναγνωρίζοντας ότι οι αδρανειακές δυνάμεις σχετίζονται με τις ολικές επιταχύνσεις και οι εξωτερικές δυνάμεις δεν υπάρχουν προκύπτει:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -m \frac{\partial^2 u^t}{\partial t^2} = -m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - m \frac{\partial^2 u^g}{\partial t^2}$$

Η μερική διαφορική εξίσωση:

$$m(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] = -m(x) \ddot{u}_g(x,t)$$

$$p_{eff}(x,t) = -m(x) \ddot{u}_g(x,t)$$



Συστήματα με Κατανεμημένη Μάζα και Ελαστικότητα

3. Ιδιοσυχνότητες και Ιδιομορφές Ταλάντωσης

Για την περίπτωση της ελεύθερης ταλάντωσης η εξίσωση κίνησης γίνεται:

$$m(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] = 0$$

Θα επιχειρήσουμε λύση της μορφής: $u(x,t) = \phi(x)q(t)$ τότε

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = \phi(x) \ddot{q}(t) \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) = \phi''(x) q(t)$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω, οδηγούμαστε στη σχέση:

$$m(x) \phi(x) \ddot{q}(t) + q(t) \left[EI(x) \phi''(x) \right]'' = 0$$

η οποία γράφεται ως

Συνάρτηση του t

$$\frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} = - \frac{\left[EI(x) \phi''(x) \right]''}{m(x) \phi(x)}$$

Συνάρτηση του x

Συστήματα με Κατανεμημένη Μάζα και Ελαστικότητα

3. Ιδιοσυχνότητες και Ιδιομορφές Ταλάντωσης

Επομένως η μερική διαφορική εξίσωση μετατρέπεται σε δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, που η μια προσδιορίζει τη συνάρτηση του χρόνου και η άλλη του χώρου

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0$$

$$\left[EI(x) \phi''(x) \right]'' - \omega^2 m(x) \phi(x) = 0$$

Για την ειδική περίπτωση μιας ομοιόμορφης δοκού $EI(x) = EI$ και $m(x) = m$

$$EI(x) \phi^{IV}(x) - \omega^2 m \phi(x) = 0 \Rightarrow \phi^{IV}(x) - \beta^2 \phi(x) = 0 \quad \text{με} \quad \beta = \frac{\omega^2 m}{EI}$$

Η γενική λύση της παραπάνω είναι:

$$\phi(x) = C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x + C_3 \sinh \beta x + C_4 \cosh \beta x$$

Όπου τα C_1, C_2, C_3 και C_4 που προσδιορίζονται από της συνοριακές συνθήκες.

Συστήματα με Κατανεμημένη Μάζα και Ελαστικότητα

3. Ιδιοσυχνότητες και Ιδιομορφές Ταλάντωσης

i. Ομοιόμορφη Αμφιέρειστη Δοκός

Για $x=0$ και $x=L$ η μετατόπιση και η καμπτική ροπή είναι μηδέν.

$$\Sigma.\Sigma. 1 \quad u(0,t) = 0 \Rightarrow \phi(0) = 0 \Rightarrow C_2 + C_4 = 0$$

$$\Sigma.\Sigma. 3 \quad u(L,t) = 0 \Rightarrow \phi(L) = 0 \Rightarrow \\ C_1 \sin \beta L + C_3 \sinh \beta L = 0$$

$$\Sigma.\Sigma. 2 \quad M(0,t) = 0 \Rightarrow EI\phi''(0) = 0 \Rightarrow \\ \beta^2(-C_2 + C_4) = 0$$

$$\Sigma.\Sigma. 4 \quad M(L,t) = 0 \Rightarrow EI\phi''(L) = 0 \Rightarrow \\ \beta^2(-C_2 \sin \beta L + C_3 \sinh \beta L) = 0$$

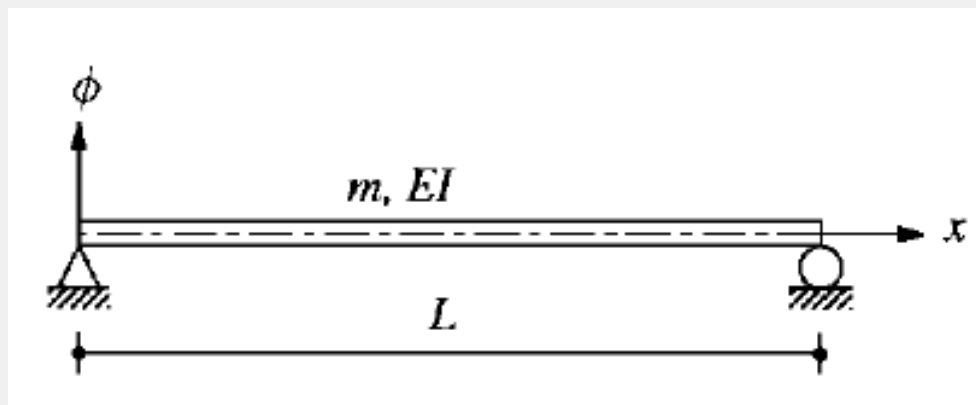
Προσθέτοντας τις $\Sigma.\Sigma. 3$ και 4 προκύπτει ότι $C_3 \sinh \beta L = 0$ και οδηγούμαστε σε

$$C_1 \sin \beta L = 0 \begin{cases} \rightarrow C_1 = 0 \rightarrow \phi(x) = 0 \quad \text{τετριμμένη λύση} \\ \rightarrow \sin \beta L = 0 \rightarrow \beta L = n\pi \quad n=1,2,3,\dots \end{cases}$$

Συστήματα με Κατανεμημένη Μάζα και Ελαστικότητα

3. Ιδιοσυχνότητες και Ιδιομορφές Ταλάντωσης

i. Ομοιόμορφη Αμφιέριστη Δοκός

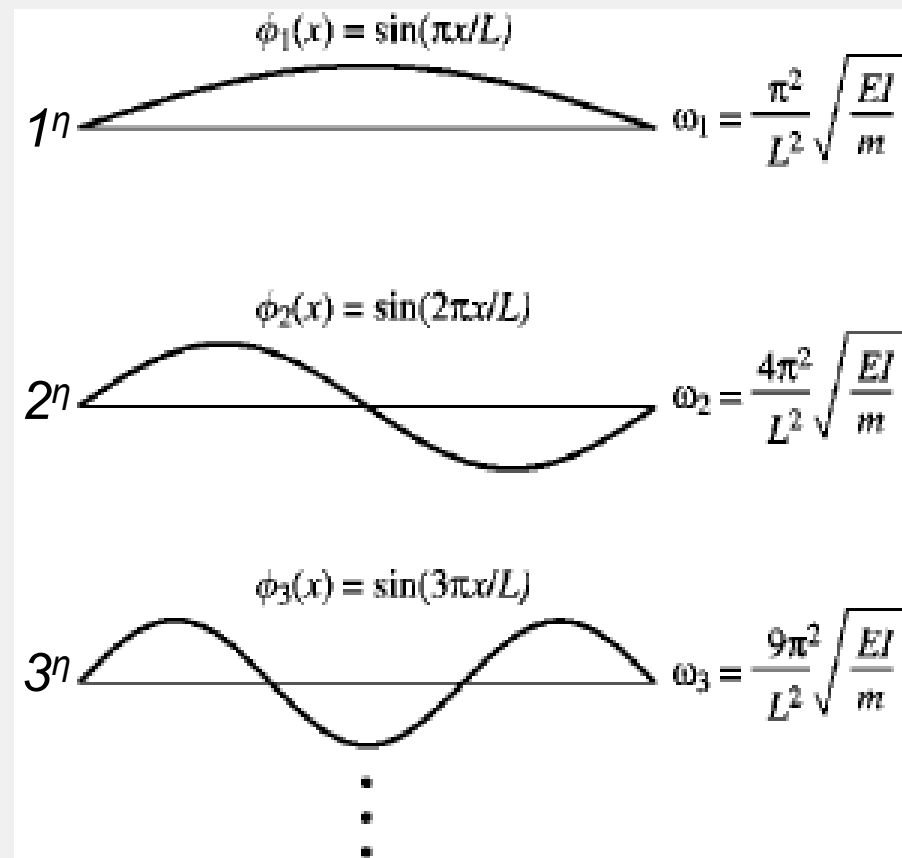


Ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης:

$$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Ιδιομορφές ταλάντωσης

$$\phi_n(x) = C_1 \sin \frac{n\pi x}{L} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$



Συστήματα με Κατανεμημένη Μάζα και Ελαστικότητα

3. Ιδιοσυχνότητες και Ιδιομορφές Ταλάντωσης

ii. Ομοιόμορφη Δοκός Πρόβολος

Για $x=0$ η μετατόπιση και η στροφή είναι μηδέν ενώ για $x=L$ η καμπτική ροπή και η τέμνουσα είναι μηδέν

$$\begin{aligned} \text{Σ.Σ. 1} \quad u(0,t) = 0 &\Rightarrow \phi(0) = 0 \Rightarrow \\ C_2 &= -C_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Σ.Σ. 3} \quad V(L,t) = 0 &\Rightarrow EI\phi'''(L) = 0 \Rightarrow \\ C_1(\cos \beta L + \cosh \beta L) + C_2(-\sin \beta L + \sinh \beta L) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Σ.Σ. 2} \quad u'(0,t) = 0 &\Rightarrow \phi'(0) = 0 \Rightarrow \\ C_3 &= -C_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Σ.Σ. 4} \quad M(L,t) = 0 &\Rightarrow EI\phi''(L) = 0 \Rightarrow \\ C_1(\sin \beta L + \sinh \beta L) + C_2(\cos \beta L + \cosh \beta L) &= 0 \end{aligned}$$

Σε μητρική μορφή οι Σ.Σ. 3 και 4 γράφονται

$$\begin{bmatrix} \sin \beta L + \sinh \beta L & \cos \beta L + \cosh \beta L \\ \cos \beta L + \cosh \beta L & -\sin \beta L + \sinh \beta L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

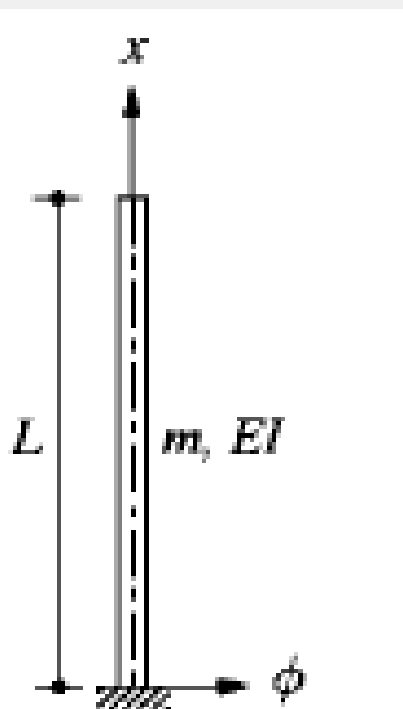
Συστήματα με Κατανεμημένη Μάζα και Ελαστικότητα

3. Ιδιοσυχνότητες και Ιδιομορφές Ταλάντωσης

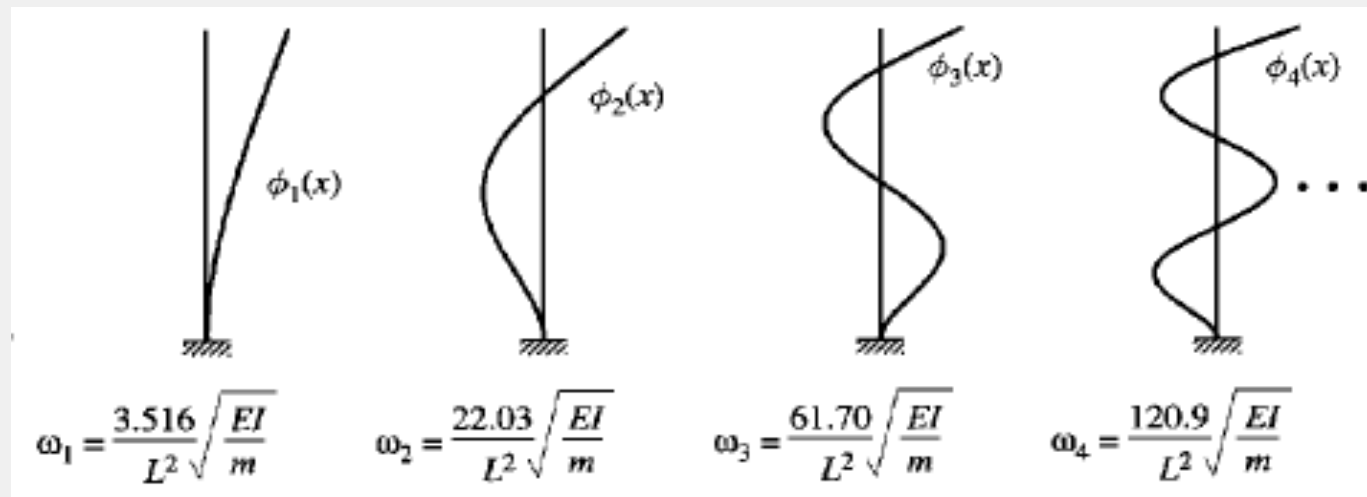
ii. Ομοιόμορφη Δοκός Πρόβολος

Η ορίζουσα του μητρώου πρέπει να είναι μηδενική οπότε: $1 + \cos \beta L \cosh \beta L = 0$

Η εξίσωση λύνεται αριθμητικά και προκύπτουν



$$\omega_1 = \frac{3.516}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad \omega_2 = \frac{22.03}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad \omega_3 = \frac{61.70}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad \omega_4 = \frac{120.9}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$



$$\omega_1 = \frac{3.516}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

$$\omega_2 = \frac{22.03}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

$$\omega_3 = \frac{61.70}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

$$\omega_4 = \frac{120.9}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

1η

2η

3η

4η

Συστήματα με Κατανεμημένη Μάζα και Ελαστικότητα

4. Ορθογωνικότητα των Ιδιομορφών

Θεωρούμε σύστημα με κατανεμημένη μάζα και ελαστικότητα. Έστω δοκός ενός ανοίγματος με αρθρωμένα, πακτωμένα ή ελεύθερα άκρα.

Για την ιδιομορφή r : $[EI(x)\phi_r''(x)]'' = \omega_r^2 m(x)\phi_r(x)$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με ϕ_n και ολοκληρώνοντας από 0 έως L

$$\int_0^L \phi_n(x) [EI(x)\phi_r''(x)]'' dx = \omega_r^2 \int_0^L m(x)\phi_n(x)\phi_r(x) dx$$

Το αριστερό μέλος της εξίσωσης ολοκληρώνεται κατά παράγοντες δύο φορές ως

$$\begin{aligned} \int_0^L \phi_n(x) [EI(x)\phi_r''(x)]'' dx &= \left[\phi_n(x) [EI(x)\phi_r''(x)]' \right]_0^L - \left[\phi_n'(x) [EI(x)\phi_r''(x)] \right]_0^L \\ &\quad + \int_0^L EI(x)\phi_n''(x)\phi_r''(x) dx \end{aligned}$$

Παρατήρηση: οι όροι των αγκυλών είναι 0 για $x=0, L$

Συστήματα με Κατανεμημένη Μάζα και Ελαστικότητα

4. Ορθογωνικότητα των Ιδιομορφών

Οπότε με τους όρους στις αγκύλες να μηδενίζονται η εξίσωση γράφεται:

$$\int_0^L EI(x) \phi_n''(x) \phi_r''(x) dx = \omega_r^2 \int_0^L m(x) \phi_n(x) \phi_r(x) dx$$

Ομοίως, ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για την ιδιομορφή η και πολλαπλασιάζοντας με την ϕ_r και ολοκληρώνοντας από 0 έως L προκύπτει

$$\int_0^L EI(x) \phi_n''(x) \phi_r''(x) dx = \omega_n^2 \int_0^L m(x) \phi_n(x) \phi_r(x) dx$$

Αφαιρώντας τις παραπάνω κατά μέλη: $(\omega_n^2 - \omega_r^2) \int_0^L m(x) \phi_n(x) \phi_r(x) dx = 0$

Επομένως, εάν $\omega_n \neq \omega_r$ \rightarrow $\int_0^L m(x) \phi_n(x) \phi_r(x) dx = 0$
το οποίο μας οδηγεί στη σχέση: $\int_0^L \phi_n(x) [EI(x) \phi_r''(x)]' dx = 0$

Σχέσεις
Ορθογωνικότητας

Συστήματα με Κατανεμημένη Μάζα και Ελαστικότητα

5. Ιδιομορφική Δυναμική Ανάλυση Απόκρισης σε Επιβαλλόμενη Φόρτιση

Υποθέτοντας ότι το πρόβλημα ιδιοτιμών $[EI(x)\phi''(x)]'' - \omega^2 m(x)\phi(x) = 0$ έχει λυθεί ως προς τις ιδιοσυχνότητες και τις ιδιομορφές, η μετατόπιση δίδεται από γραμμικό συνδυασμό των ιδιομορφών

$$u(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) q_r(t)$$

Η απόκριση έχει εκφραστεί ως επαλληλία των συμβολών των ανεξάρτητων ιδιομορφών

Αντικαθιστώντας τη λύση στην αρχική εξίσωση, μετατρέπεται σε ένα άπειρο σύνολο συνήθων διαφορικών εξισώσεων, κάθε μια από τις οποίες έχει μια ιδιομορφική συντεταγμένη $q_n(t)$ ως άγνωστη.

$$\sum_{r=1}^{\infty} m(x)\phi_r(x)\ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^{\infty} [EI(x)\phi_r''(x)]'' q_r(t) = p(x,t)$$

Συστήματα με Κατανεμημένη Μάζα και Ελαστικότητα

5. Ιδιομορφική Δυναμική Ανάλυση Απόκρισης σε Επιβαλλόμενη Φόρτιση

Πολλαπλασιάζοντας με ϕ_n ολοκληρώνοντας επί του μήκους της δοκού και κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων ορθογωνικότητας των ιδιομορφών όλοι οι όροι στο αριστερό μέλος, εκτός από τον όρο $r=n$ απαλείφονται:

$$\ddot{q}_n(t) \int_0^L m(x) [\phi_n(x)]^2 dx + q_n(t) \int_0^L \phi_n(x) [EI(x) \phi_n''(x)]'' dx = \int_0^L p(x,t) \phi_n(x) dx$$

Η παραπάνω εξίσωση γράφεται ως: $M_n \ddot{q}_n(t) + K_n q_n(t) = P_n(t)$

Η γενικευμένη μάζα και δυσκαμψία της n ιδιομορφής σχετίζονται: $K_n = \omega_n^2 M_n$

Αφού έχουν προσδιοριστεί οι q_n βρίσκουμε τη συμβολή της n ιδιομορφής στη

μετατόπιση $u_n = \phi_n(x) q_n(t)$ και η ολική μετατόπιση είναι $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$

Η καμπτική ροπή και η τέμνουσα δύναμη δίνονται ως

$$M(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} EI(x) \phi_n''(x) q_n(t) \quad V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [EI(x) \phi_n''(x)]' q_n(t)$$

Συστήματα με Κατανεμημένη Μάζα και Ελαστικότητα

6. Ανάλυση Χρονοϊστορίας Σεισμικής Απόκρισης

Όταν η διέγερση είναι η επιτάχυνση των στηρίξεων, η διαδικασία είναι παρόμοια με αντικατάσταση του $p(x,t)$ με $p_{\text{eff}}(x,t)$.

Οι ενεργές σεισμικές δυνάμεις είναι: $p_{\text{eff}}(x,t) = -m(x)\ddot{u}_g(x,t)$

Η χωρική κατανομή αυτών των δυνάμεων καθορίζεται από τη μάζα και αναπτύσσεται ως άθροισμα των κατανομών των αδρανειακών δυνάμεων $s_n(x)$ που σχετίζονται με τις ιδιομορφές ταλάντωσης

$$m(x) = \sum_{r=1}^{\infty} s_r(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \Gamma_r m(x) \phi_r(x)$$

Πολλαπλασιάζοντας με ϕ_n ολοκληρώνοντας επί του μήκους της δοκού και κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων ορθογωνικότητας των ιδιομορφών προκύπτει

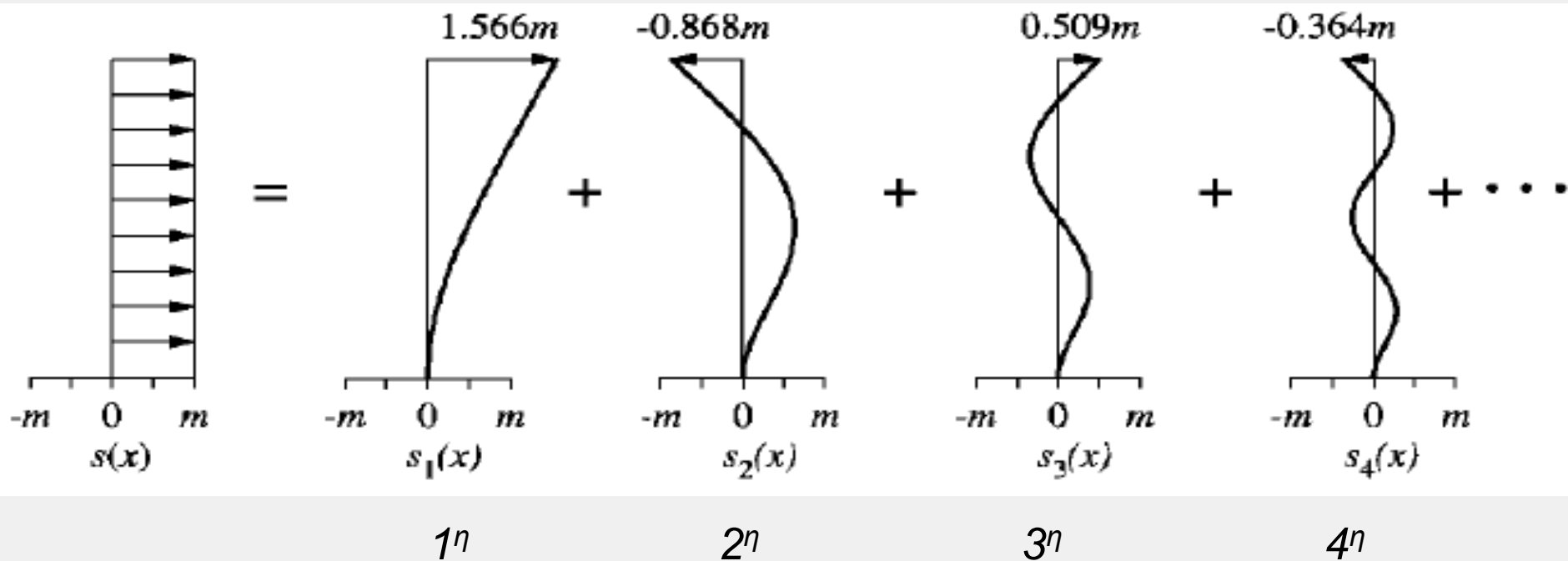
$$\Gamma_n = \frac{L_n^h}{M_n} \quad \text{όπου} \quad L_n^h = \int_0^L m(x) \phi_n(x) dx$$

Συστήματα με Κατανεμημένη Μάζα και Ελαστικότητα

6. Ανάλυση Χρονοϊστορίας Σεισμικής Απόκρισης

Η συμβολή της n ιδιομορφής στη μάζα είναι: $s_n(x) = \Gamma_n m(x) \phi_n(x)$

Για ομοιόμορφους προβόλους με μάζα m ανά μονάδα μήκους η ιδιομορφική επαλληλία είναι αυτή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Συστήματα με Κατανεμημένη Μάζα και Ελαστικότητα

6. Ανάλυση Χρονοϊστορίας Σεισμικής Απόκρισης

Αντικαθιστώντας στην $P_n(t) = \int_0^L p(x,t)\phi_n(x)dx$ το $p_{\text{eff}}(x,t)$ προκύπτει:

$$P_n(t) = -L_n^h \ddot{u}_g(t)$$

και χρησιμοποιώντας την παραπάνω προκύπτουν οι ιδιομορφικές εξισώσεις χωρίς απόσβεση, ενός πύργου που υπόκειται σε σεισμική διέγερση

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = -\Gamma_n \ddot{u}_g(t)$$

Ενώ για σύστημα με κλασική απόσβεση η σχέση γράφεται ως

$$\ddot{q}_n + 2\zeta_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = -\Gamma_n \ddot{u}_g(t)$$

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι της μορφής $q_n(t) = \Gamma_n D_n(t)$

όπου $D_n(t)$ είναι η απόκριση μετατόπισης του συστήματος η-οστής ιδιομορφής

Η συμβολή της η ιδιομορφής στη μετατόπιση είναι $u_n = \Gamma_n \phi_n(x) D_n(t)$

Συστήματα με Κατανεμημένη Μάζα και Ελαστικότητα

7. Φασματική Δυναμική Ανάλυση Σεισμικής Απόκρισης

Η μέγιστη απόκριση ενός συστήματος κατανεμημένης μάζας μπορεί να υπολογιστεί από το φάσμα σεισμικής απόκρισης.

Η ακριβής τιμή της απόκρισης της n -οστής ιδιομορφής $r_n(t)$ είναι

$$r_{no} = r_n^{st} A_n$$

όπου $A_n \equiv A(T_n, \zeta_n)$ η τεταγμένη του φάσματος ψευδο-επιτάχυνσης.

Εναλλακτικά, η r_{no} μπορεί αν θεωρηθεί ως το αποτέλεσμα της στατικής ανάλυσης του προβόλου (πύργου) υποκείμενου σε εξωτερικό φορτίο $f_n(x) A_n$

Η μέγιστη τιμή r_o της ολικής απόκρισης $r(t)$ μπορεί να υπολογιστεί συνδυάζοντας τα ιδιομορφικά μέγιστα r_{no} σύμφωνα με κάποιους από τους κανόνες συνδυασμού των ιδιομορφών όπως SRSS

$$r_o \approx \left(\sum_{n=1}^{\infty} r_{no}^2 \right)^{1/2}$$

Συστήματα με Κατανεμημένη Μάζα και Ελαστικότητα

8. Δυσκολία στην Ανάλυση Πρακτικών Συστημάτων

Η δυναμική απόκριση συστημάτων με κατανεμημένη μάζα και ελαστικότητα μπορεί να προσδιοριστεί με τη μέθοδο ιδιομορφικής ανάλυσης από τη στιγμή που έχουν καθοριστεί οι ιδιοσυχνότητες και οι ιδιομορφές ταλάντωσης.

Τα παραδείγματα που παρουσιάστηκαν (ομοιόμορφη αμφιέριστη δοκός και ομοιόμορφη δοκός πρόβολος) ασχολήθηκαν με ομοιόμορφες δοκούς και οι ιδιοσυχνότητες/ιδιομορφές βρέθηκαν αναλυτικά.

Αυτή η προσέγγιση είναι σπάνια εφικτή εάν το EI ή η m μεταβάλλονται κατά μήκος, αν εμπλέκονται πολλές στηρίξεις ή αν το σύστημα είναι σύνθεση πολλών μελών.

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε κάποιες από τις δυσκολίες στην εξαγωγή αναλυτικών λύσεων.

Συστήματα με Κατανεμημένη Μάζα και Ελαστικότητα

8. Δυσκολία στην Ανάλυση Πρακτικών Συστημάτων

Ας θεωρήσουμε μια δοκό ενός ανοίγματος με μάζα $m(x)$ και μέτρου δυσκαμψίας $EI(x)$. Για να καθορίσουμε τις ιδιοσυχνότητες και τις ιδιομορφές πρέπει να επιλύσουμε το την εξίσωση

$$EI(x)\phi^{IV}(x) + 2EI'(x)\phi'''(x) + EI''(x)\phi''(x) - \omega^2 m(x)\phi(x) = 0$$

Οι συντελεστές EI, EI', EI'' και $m(x)$ μεταβάλλονται με το x και η αναλυτική λύση για τα ω^2 είναι σπάνια εφικτή.

Επομένως, δεν είναι πρακτικό να χρησιμοποιούμε την κλασική προσέγγιση για πρακτικά προβλήματα τέτοιου τύπου.

Συστήματα με Κατανεμημένη Μάζα και Ελαστικότητα

8. Δυσκολία στην Ανάλυση Πρακτικών Συστημάτων

Ας θεωρήσουμε μια δοκό με πολλές στηρίξεις. Το ομοιόμορφο τμήμα μεταξύ κάθε ζεύγους στηρίξεων θεωρείται ως ξεχωριστή δοκός με αρχή συντεταγμένων το αριστερό άκρο της δοκού.

Η εξίσωση κίνησης εφαρμόζεται σε κάθε τμήμα και οι αναγκαίες συνοριακές συνθήκες είναι

1. Σε κάθε άκρο εφαρμόζονται οι συνοριακές συνθήκες ανάλογα με τον τύπο στήριξης.
2. Σε κάθε ενδιάμεση στήριξη η παραμόρφωση είναι μηδέν και η στροφή και η ροπή στο δεξί και αριστερό μέρος είναι ίδιες (συνεχής δοκός).

Η παραπάνω διαδικασία γρήγορα γίνεται δύσχρηστη εξαιτίας των τεσσάρων σταθερών που πρέπει να υπολογιστούν σε κάθε τμήμα της δοκού.

Συστήματα με Κατανεμημένη Μάζα και Ελαστικότητα

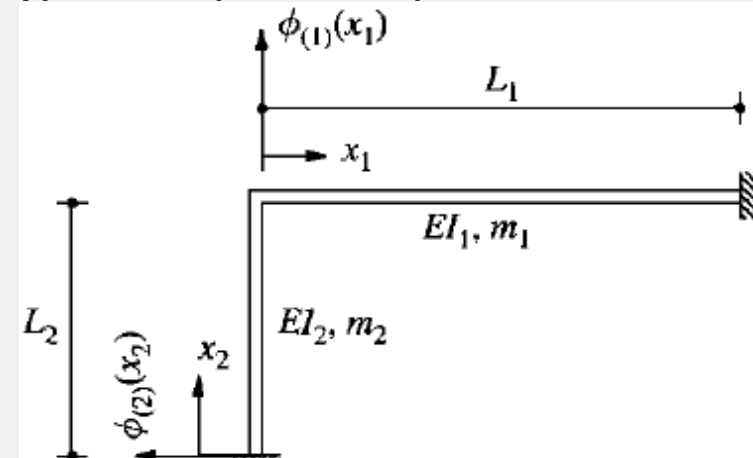
8. Δυσκολία στην Ανάλυση Πρακτικών Συστημάτων

Ας θεωρήσουμε ένα πλαίσιο με δύο μέλη. Κάθε μέλος θεωρείται ως ξεχωριστή δοκός με αρχή συντεταγμένων το ένα άκρο.

Η εξίσωση κίνησης εφαρμόζεται σε κάθε μέλος και οι αναγκαίες συνοριακές συνθήκες είναι:

1. Στις στηρίξεις του πλαισίου εφαρμόζονται οι συνοριακές συνθήκες ανάλογα με τον τύπο στήριξης.
2. Στον κόμβο οι ακραίες μετατοπίσεις των συντρεχόντων μελών πρέπει να είναι συμβατές.
3. Στον κόμβο οι ακραίες στροφές των συντρεχόντων μελών πρέπει να είναι συμβατές.
4. Στον κόμβο οι καμπτικές ροπές πρέπει να είναι σε ισορροπία.

Η παραπάνω διαδικασία γρήγορα γίνεται δύσχρηστη για πλαίσιο με πολλά μέλη.



Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Ελαστικών Κτιρίων

Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Ελαστικών Κτιρίων

1. Εξεταζόμενα Συστήματα, Φάσματα Σχεδιασμού και Μεγέθη Απόκρισης
2. Επίδραση των T_1 και ρ στην Απόκριση
3. Συντελεστές Ιδιομορφικής Συμμετοχής
4. Επίδραση του T_1 στην Απόκριση Ανώτερων Ιδιομορφών
5. Επίδραση του ρ στην Απόκριση Ανώτερων Ιδιομορφών
6. Μεταβολή Καθ' Ύψος της Απόκρισης Ανώτερων Ιδιομορφών
7. Πόσες Ιδιομορφές να Περιληφθούν

Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Ελαστικών Κτιρίων

1. Εξεταζόμενα Συστήματα, Φάσματα Σχεδιασμού και Μεγέθη Απόκρισης

Τα συστήματα που εξετάζονται είναι πλαίσια πέντε ορόφων και ενός ανοίγματος με σταθερό ύψος ορόφων h και πλάτος $2h$.

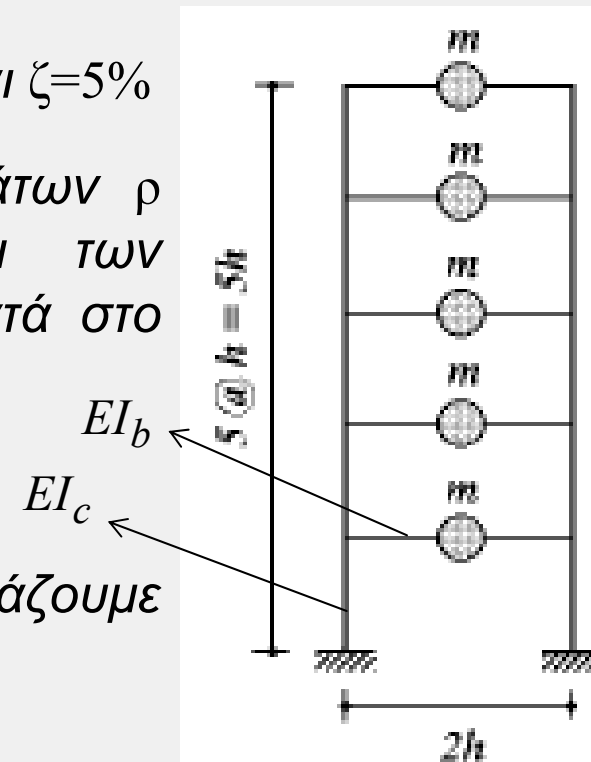
Θεωρούμε ιδανικό σύστημα συγκεντρωμένων μαζών και $\zeta=5\%$

Βρίσκουμε το λόγο δυσκαμψίας δοκών-υποστυλωμάτων ρ που βασίζεται στις ιδιότητες των δοκών και των υποστυλωμάτων στον όροφο που βρίσκεται πιο κοντά στο μέσο ύψος του κτιρίου

$$\rho = \frac{\sum_{beam} EI_b / L_b}{\sum_{columns} EI_c / L_c}$$

Για το ομοιόμορφο πλαίσιο ενός ανοίγματος που εξετάζουμε η εξίσωση γίνεται

$$\rho = \frac{I_b}{4I_c}$$

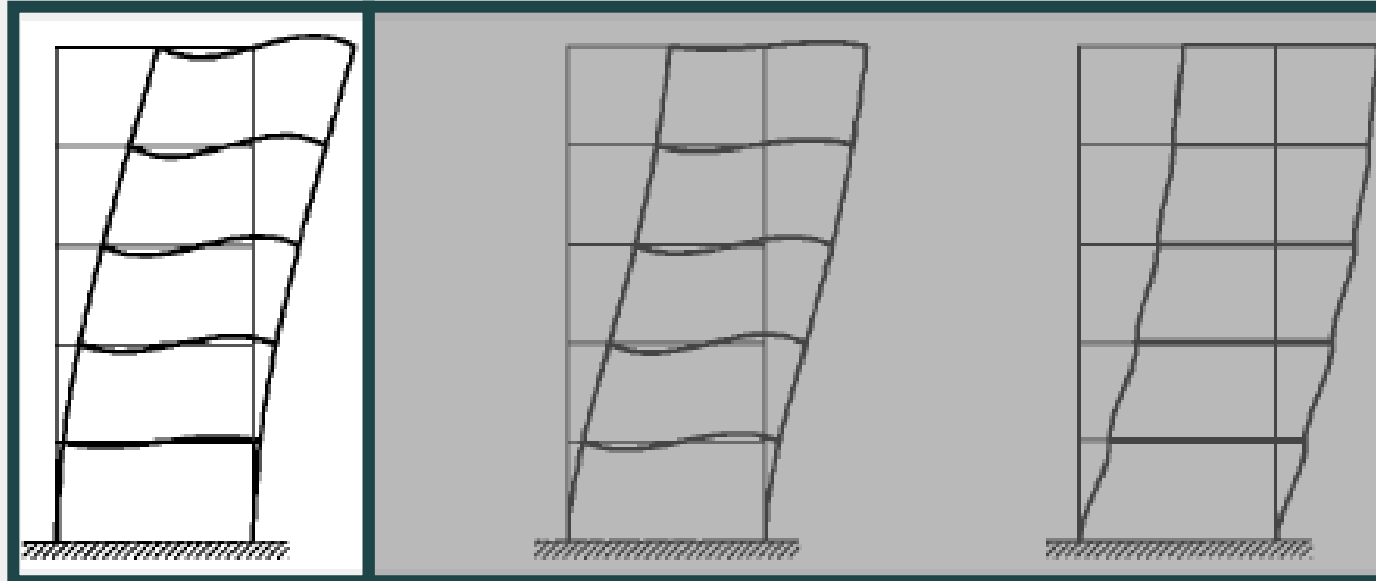


Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Ελαστικών Κτιρίων

1. Εξεταζόμενα Συστήματα, Φάσματα Σχεδιασμού και Μεγέθη Απόκρισης

Η παράμετρος ρ είναι η σχετική δυσκαμψία δοκών-υποστυλωμάτων και υποδεικνύει κατά πόσο το σύστημα μπορεί να συμπεριφερθεί ως πλαίσιο.

Για $\rho=0$ οι δοκοί δεν περιορίζουν τις στροφές των κόμβων και η κατασκευή συμπεριφέρεται ως καμπτικός πρόβολος.

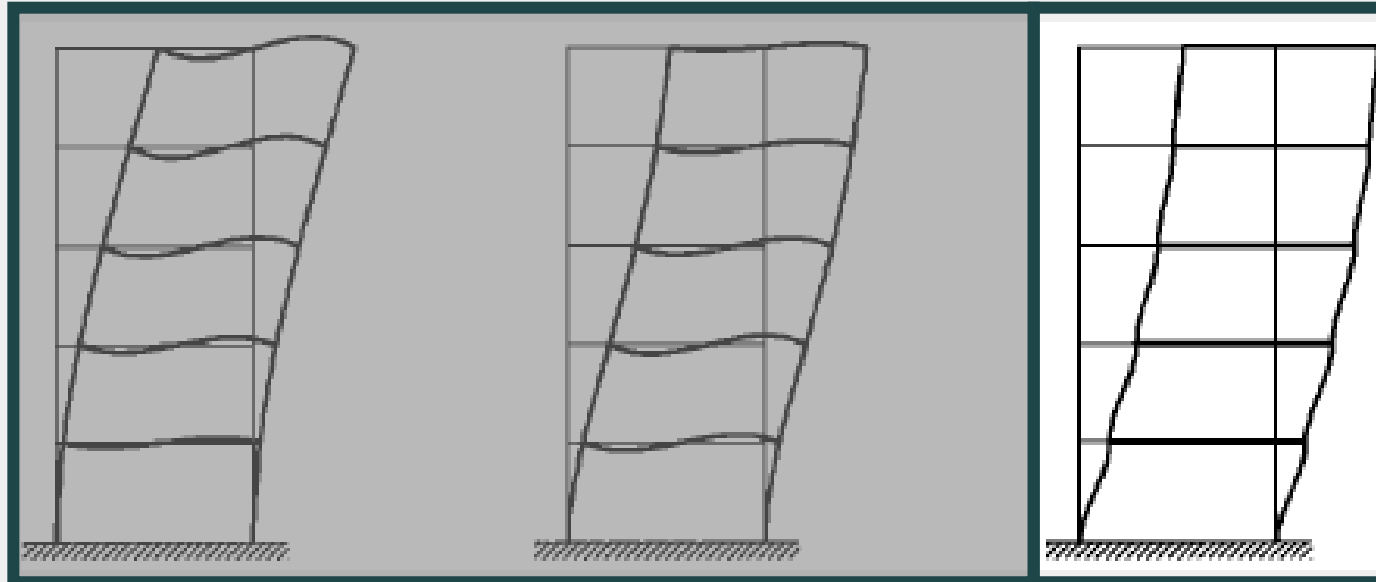


Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Ελαστικών Κτιρίων

1. Εξεταζόμενα Συστήματα, Φάσματα Σχεδιασμού και Μεγέθη Απόκρισης

Η παράμετρος ρ είναι η σχετική δυσκαμψία δοκών-υποστυλωμάτων και υποδεικνύει κατά πόσο το σύστημα μπορεί να συμπεριφερθεί ως πλαίσιο.

Για $\rho = \infty$ οι δοκοί περιορίζουν εντελώς τις στροφές των κόμβων και η κατασκευή συμπεριφέρεται ως διατμητικός πρόβολος με καμπτική παραμόρφωση διπλής καμπυλότητας.

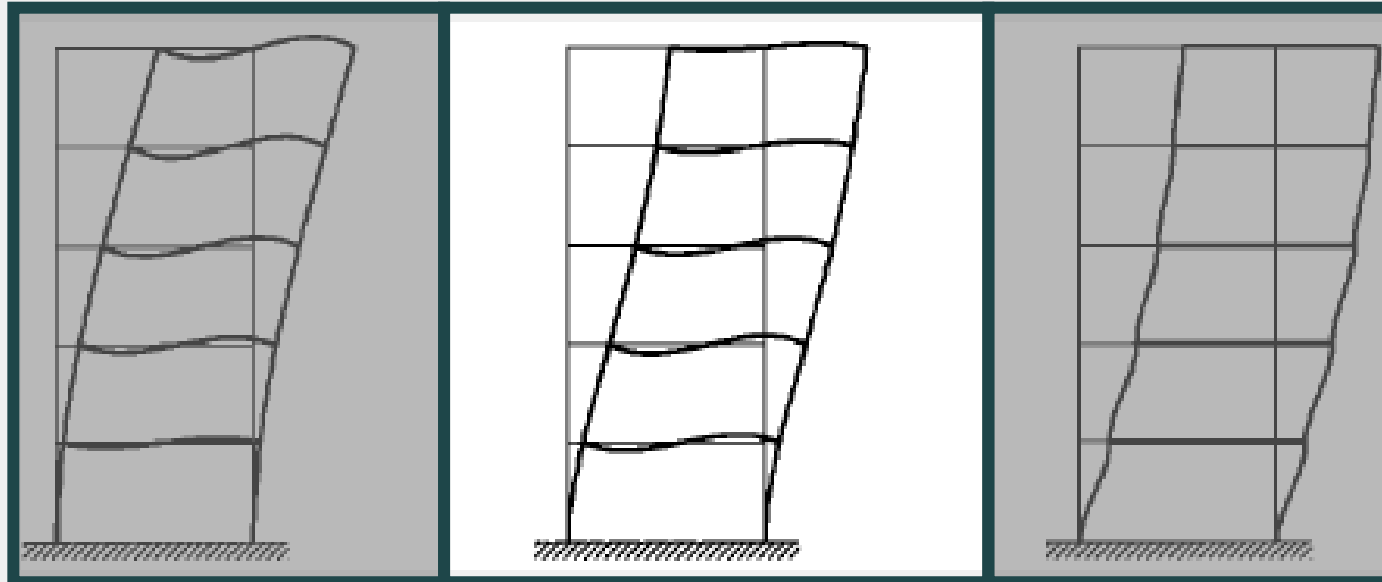


Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Ελαστικών Κτιρίων

1. Εξεταζόμενα Συστήματα, Φάσματα Σχεδιασμού και Μεγέθη Απόκρισης

Η παράμετρος ρ είναι η σχετική δυσκαμψία δοκών-υποστυλωμάτων και υποδεικνύει κατά πόσο το σύστημα μπορεί να συμπεριφερθεί ως πλαίσιο.

Για μια ενδιάμεση τιμή $\rho=1/8$ περιγράφεται η συμπεριφορά ενός πλαισίου όπου οι δοκοί και τα υποστυλώματα κάμπτονται ενώ οι κόμβοι στρέφονται.



Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Ελαστικών Κτιρίων

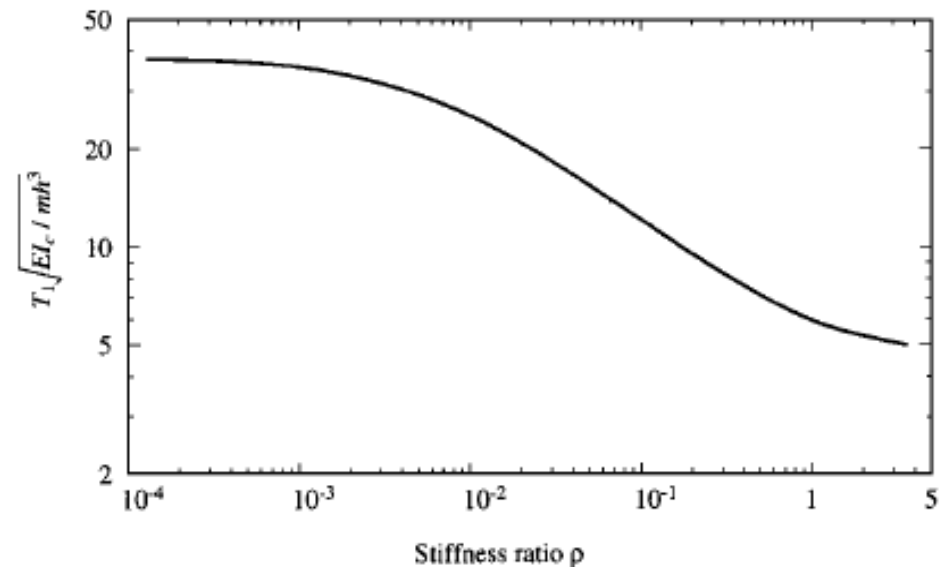
1. Εξεταζόμενα Συστήματα, Φάσματα Σχεδιασμού και Μεγέθη Απόκρισης

Η παράμετρος ρ είναι η σχετική δυσκαμψία δοκών-υποστυλωμάτων και υποδεικνύει κατά πόσο το σύστημα μπορεί να συμπεριφερθεί ως πλαίσιο.

Για μια ενδιάμεση τιμή $\rho=1/8$ περιγράφεται η συμπεριφορά ενός πλαισίου όπου οι δοκοί και τα υποστυλώματα κάμπτονται ενώ οι κόμβοι στρέφονται.

Η παράμετρος ρ καθορίζει:

- Την θεμελιώδη ιδιοπερίοδο T_1
- Το αν οι ιδιοπερίοδοι θα έχουν παραπλήσιες ή απομακρυσμένες τιμές
- Το σχήμα των ιδιομορφών



Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Ελαστικών Κτιρίων

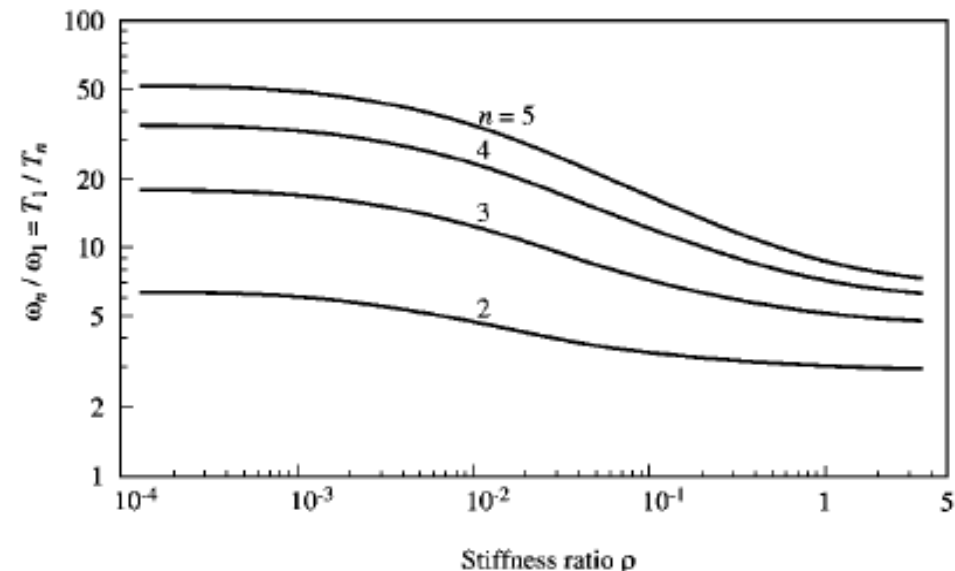
1. Εξεταζόμενα Συστήματα, Φάσματα Σχεδιασμού και Μεγέθη Απόκρισης

Η παράμετρος ρ είναι η σχετική δυσκαμψία δοκών-υποστυλωμάτων και υποδεικνύει κατά πόσο το σύστημα μπορεί να συμπεριφερθεί ως πλαίσιο.

Για μια ενδιάμεση τιμή $\rho=1/8$ περιγράφεται η συμπεριφορά ενός πλαισίου όπου οι δοκοί και τα υποστυλώματα κάμπτονται ενώ οι κόμβοι στρέφονται.

Η παράμετρος ρ καθορίζει:

- Την θεμελιώδη ιδιοπερίοδο T_1
- Το αν οι ιδιοπερίοδοι θα έχουν παραπλήσιες ή απομακρυσμένες τιμές
- Το σχήμα των ιδιομορφών



Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Ελαστικών Κτιρίων

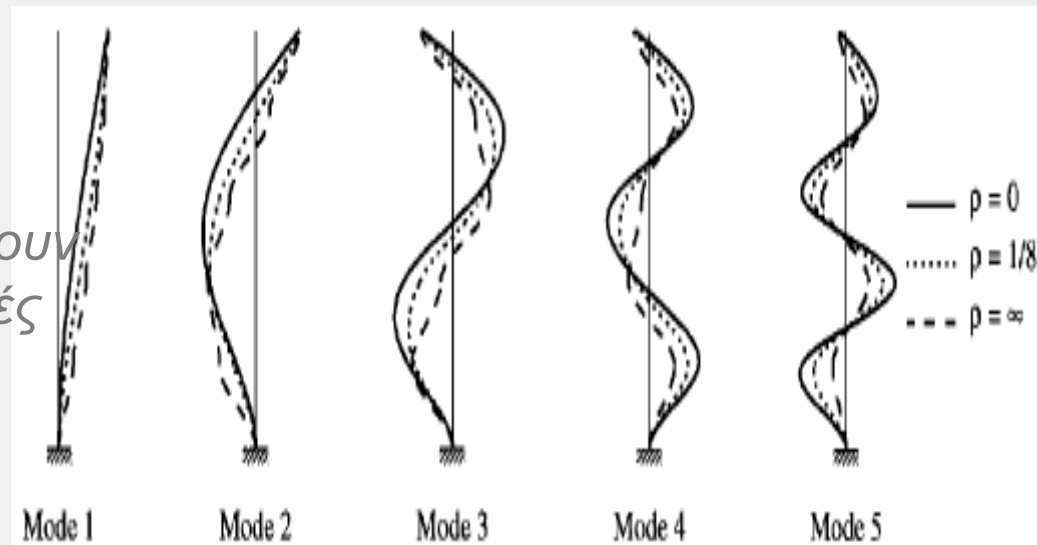
1. Εξεταζόμενα Συστήματα, Φάσματα Σχεδιασμού και Μεγέθη Απόκρισης

Η παράμετρος ρ είναι η σχετική δυσκαμψία δοκών-υποστυλωμάτων και υποδεικνύει κατά πόσο το σύστημα μπορεί να συμπεριφερθεί ως πλαίσιο.

Για μια ενδιάμεση τιμή $\rho=1/8$ περιγράφεται η συμπεριφορά ενός πλαισίου όπου οι δοκοί και τα υποστυλώματα κάμπτονται ενώ οι κόμβοι στρέφονται.

Η παράμετρος ρ καθορίζει:

- Την θεμελιώδη ιδιοπερίοδο T_1
- Το αν οι ιδιοπερίοδοι θα έχουν παραπλήσιες ή απομακρυσμένες τιμές
- Το σχήμα των ιδιομορφών



Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Ελαστικών Κτιρίων

1. Εξεταζόμενα Συστήματα, Φάσματα Σχεδιασμού και Μεγέθη Απόκρισης

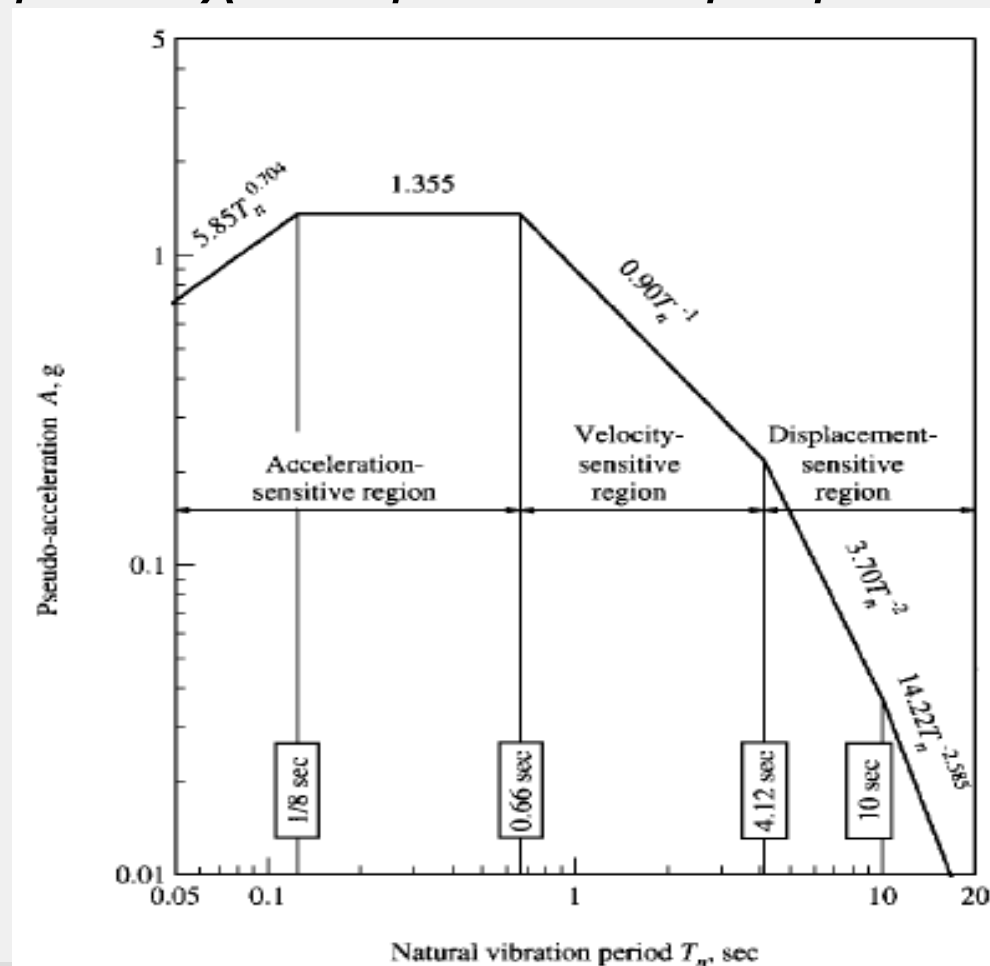
Φάσμα Σχεδιασμού

Η σεισμική διέγερση χαρακτηρίζεται από το φάσμα σχεδιασμού πολλαπλασιασμένο με 0.5 για να αντιστοιχεί σε εδαφικές κινήσεις με μέγιστες τιμές εδαφικής κίνησης

$$\ddot{u}_{g0} = 0.5g \quad \dot{u}_{g0} = 24in./sec \quad u_{g0} = 18in.$$

Το φάσμα για $\zeta=5\%$ παρουσιάζει τις ευαίσθητες σε επιτάχυνση, ταχύτητα και μετατόπιση περιοχές.

Υπολογίζονται τα Μεγέθη Απόκρισης.



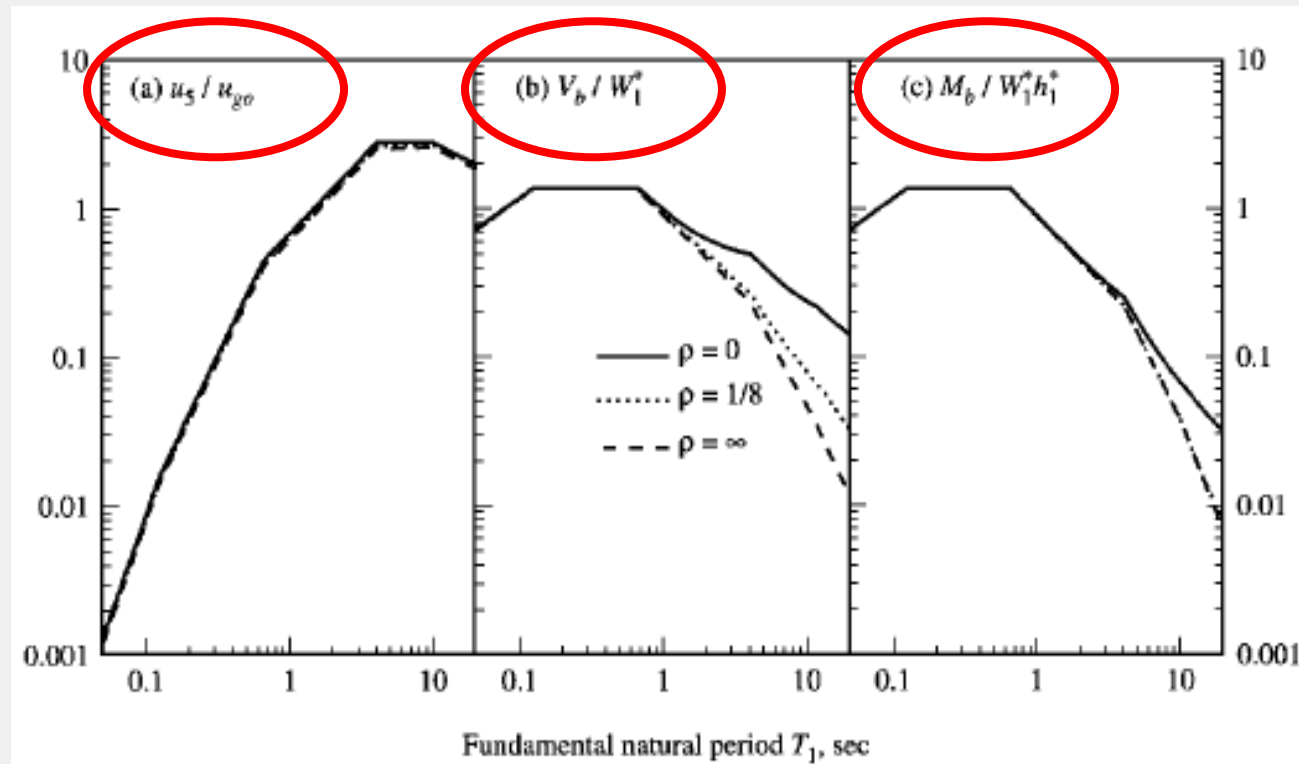
Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Ελαστικών Κτιρίων

2. Επίδραση των T_1 και ρ στην Απόκριση

Εξετάζουμε την επιρροή των T_1 και ρ σε τρία κανονικοποιημένα μεγέθη (μετατόπιση κορυφής, τέμνουσα και ροπή βάσης).

Για ένα μεγάλο εύρος T_1 η u_5 δεν είναι ευαίσθητη στη μεταβολή του ρ

Για ένα μεγάλο εύρος T_1 (σε περιοχές ευαίσθητες στη ταχύτητα και τη μετατόπιση) οι V_b , M_b είναι ευαίσθητες στη μεταβολή του ρ



Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Ελαστικών Κτιρίων

3. Συντελεστές Ιδιομορφικής Συμμετοχής

Η μέγιστη τιμή της συμμετοχής της n -οστής ιδιομορφής σε ένα μέγεθος απόκρισης r δίνεται από

$$r_n = r_n^{st} A_n$$

όπου A_n η συνιστώσα της ψευδοεπιτάχυνσης του φάσματος απόκρισης που αντιστοιχεί σε ιδιοπερίοδο T_n και ζ_n

Οι συντελεστές ιδιομορφικής συμμετοχής είναι αδιάστατοι, ανεξάρτητοι από τον τρόπο κανονικοποίησης των ιδιομορφών και έχουν άθροισμα ίσο με τη μονάδα.

$$\sum_{n=1}^N \bar{r}_n = 1$$

Οι συντελεστές ιδιομορφικής συμμετοχής εξαρτώνται από το λόγο δυσκαμψιών δοκού-υποστυλώματος ρ και από το μέγεθος της απόκρισης.

Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Ελαστικών Κτιρίων

3. Συντελεστές Ιδιομορφικής Συμμετοχής

Χρήσιμες Παρατηρήσεις:

1. Για σταθερή τιμή του ρ και για κάθε μέγεθος απόκρισης, ο συντελεστής συμμετοχής $\bar{\eta}_1$ είναι μεγαλύτερος από τους συντελεστές συμμετοχής επόμενων ιδιομορφών.

2. Για σταθερή τιμή του ρ , η συμμετοχή της δεύτερης και των ανώτερων ιδιομορφών είναι πιο σημαντική για την τέμνουσα βάσης παρά για τη ροπή βάσης και τη μετατόπισης κορυφής. Η ανώτερες ιδιομορφές είναι πιο σημαντικές για την τέμνουσα πέμπτου ορόφου παρά για την τέμνουσα της βάσης.

3. Καθώς το ρ μειώνεται, οι απόλυτες τιμές των $\bar{\eta}_n$ για τις ανώτερες ιδιομορφές για τα V_5, V_b, M_b αυξάνουν. Δηλαδή, η συμμετοχή, στη συνολική απόκριση, των υψηλότερων ιδιομορφών αυξάνει καθώς το ρ μειώνεται και θα γίνει μέγιστη για καμπτικό πρόβολο $\rho=0$.

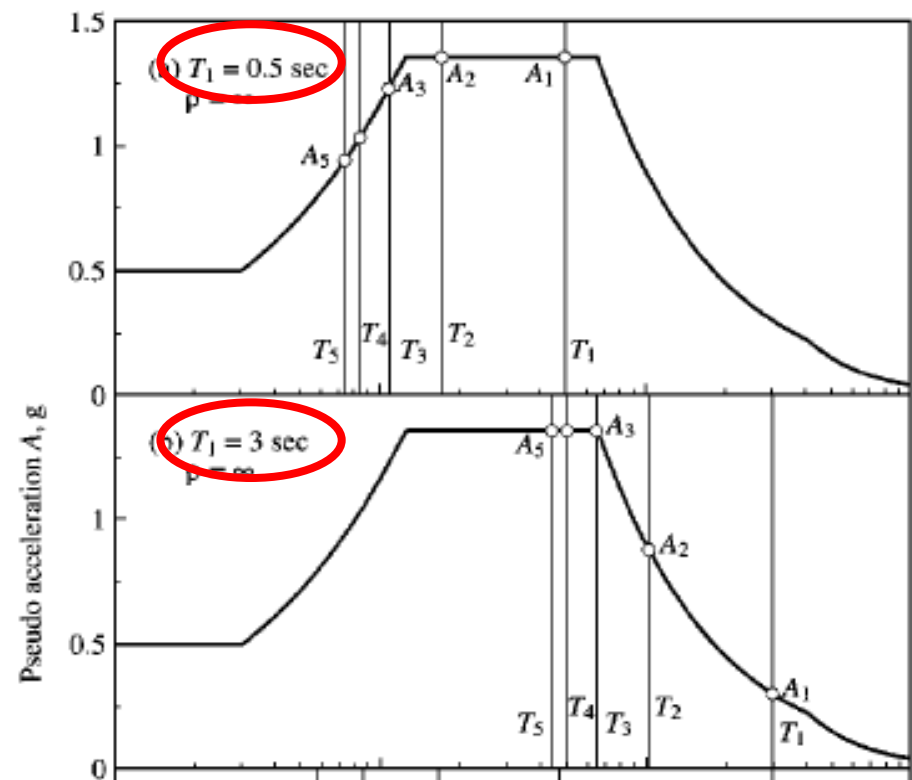
Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Ελαστικών Κτιρίων

4. Επίδραση του T_1 στην Απόκριση Ανώτερων Ιδιομορφών

Η συνιστώσα του φάσματος ψευδοεπιταχύνσεων A_η εξαρτάται από την T_1 και τους λόγους T_η/T_1 οι οποίοι για σταθερό ρ είναι ανεξάρτητοι της T_1 .

Επομένως, η διαφοροποίηση στην απόκριση των ανώτερων ιδιομορφών, αυξανόμενου του T_1 σχετίζονται με τη μορφή του φάσματος σχεδιασμού.

Για το επιλεγμένο φάσμα καθώς το T_1 αυξάνει εντός των ευαίσθητων στην ταχύτητα και μετατόπιση περιοχών, η απόκριση των ανώτερων ιδιομορφών θα γίνεται μεγαλύτερο ποσοστό της συνολικής απόκρισης.



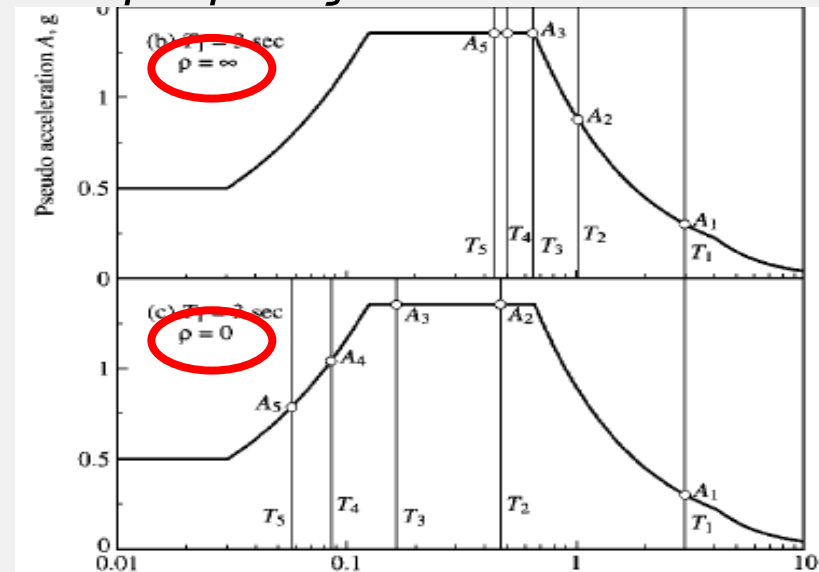
Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Ελαστικών Κτιρίων

5. Επίδραση του ρ στην Απόκριση Ανώτερων Ιδιομορφών

Καθώς το ρ μειώνεται οι συντελεστές ιδιομορφικής συμμετοχής r_n των ανώτερων ιδιομορφών αυξάνουν για την τέμνουσα βάση και κορυφής.

Η συνιστώσα του φάσματος ψευδοεπιταχύνσεων A_η εξαρτάται από την T_1 και τους λόγους T_η/T_1 οι οποίοι αυξάνουν καθώς το ρ μειώνεται και οι τιμές T_η καταλαμβάνουν μια μεγάλη περιοχή περιόδων του φάσματος.

Γενικώς, για το επιλεγμένο φάσμα και για T_1 εντός των ευαίσθητων στην ταχύτητα και μετατόπιση περιοχών, ο λόγος A_η/A_1 αυξάνει καθώς το ρ μειώνεται, γεγονός το οποίο οδηγεί σε μεγαλύτερο ποσοστό συμμετοχής των ανώτερων ιδιομορφών στη συνολική απόκριση.

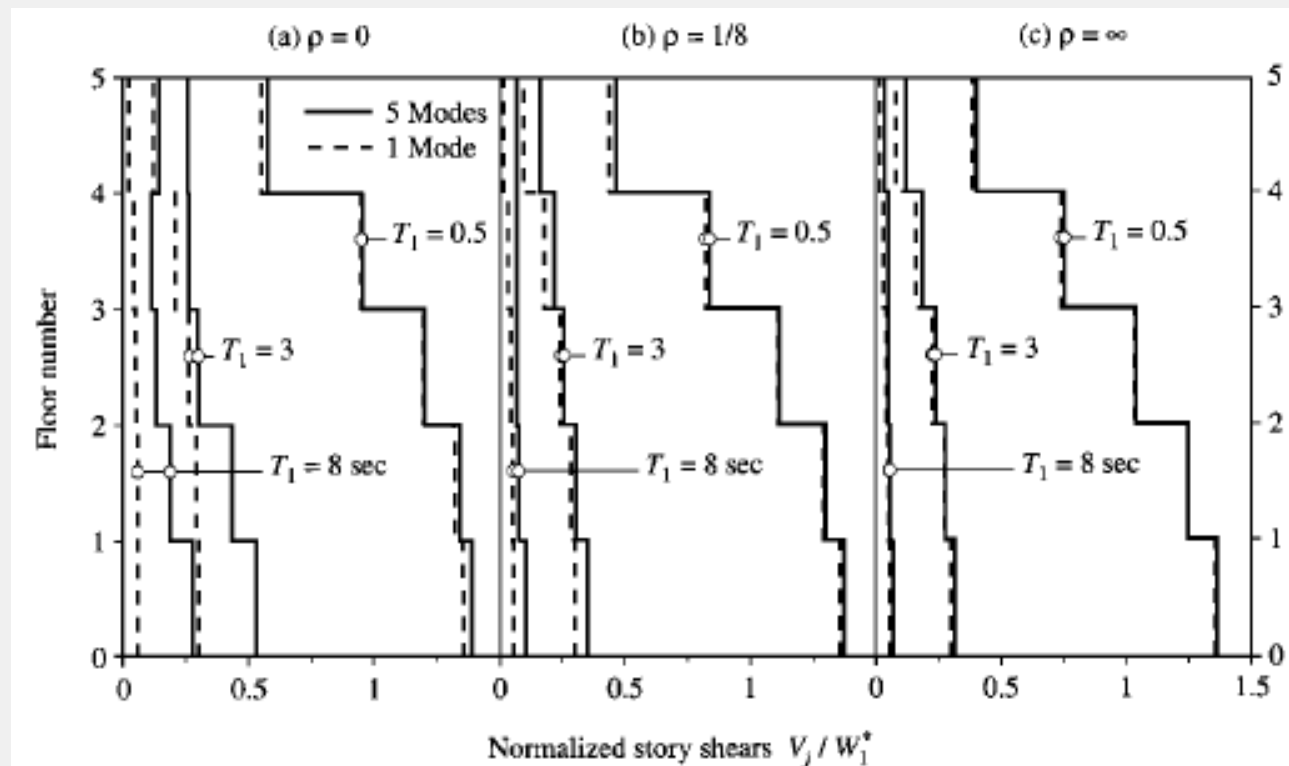


Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Ελαστικών Κτιρίων

6. Μεταβολή Καθ' Ύψος της Απόκρισης Ανώτερων Ιδιομορφών

Εξετάζεται πως η συμμετοχή των ανώτερων ιδιομορφών στην απόκριση όσον αφορά τις τέμνουσες δυνάμεις και τις ροπές ορόφων, μεταβάλλεται καθ' ύψος

Κανονικοποιημένες
Τέμνουσες

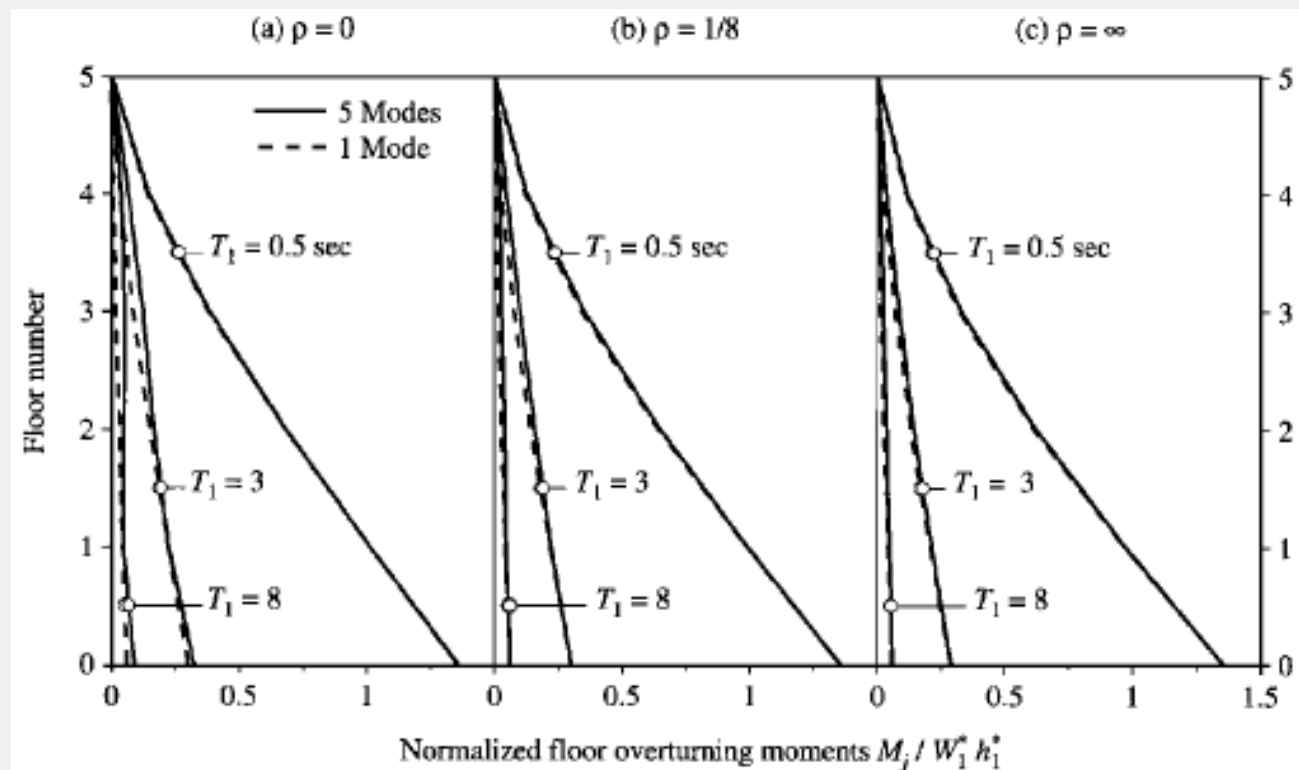


Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Ελαστικών Κτιρίων

6. Μεταβολή Καθ' Ύψος της Απόκρισης Ανώτερων Ιδιομορφών

Εξετάζεται πως η συμμετοχή των ανώτερων ιδιομορφών στην απόκριση όσον αφορά τις τέμνουσες δυνάμεις και τις ροπές ορόφων, μεταβάλλεται καθ' ύψος

Κανονικοποιημένες
Ροπές

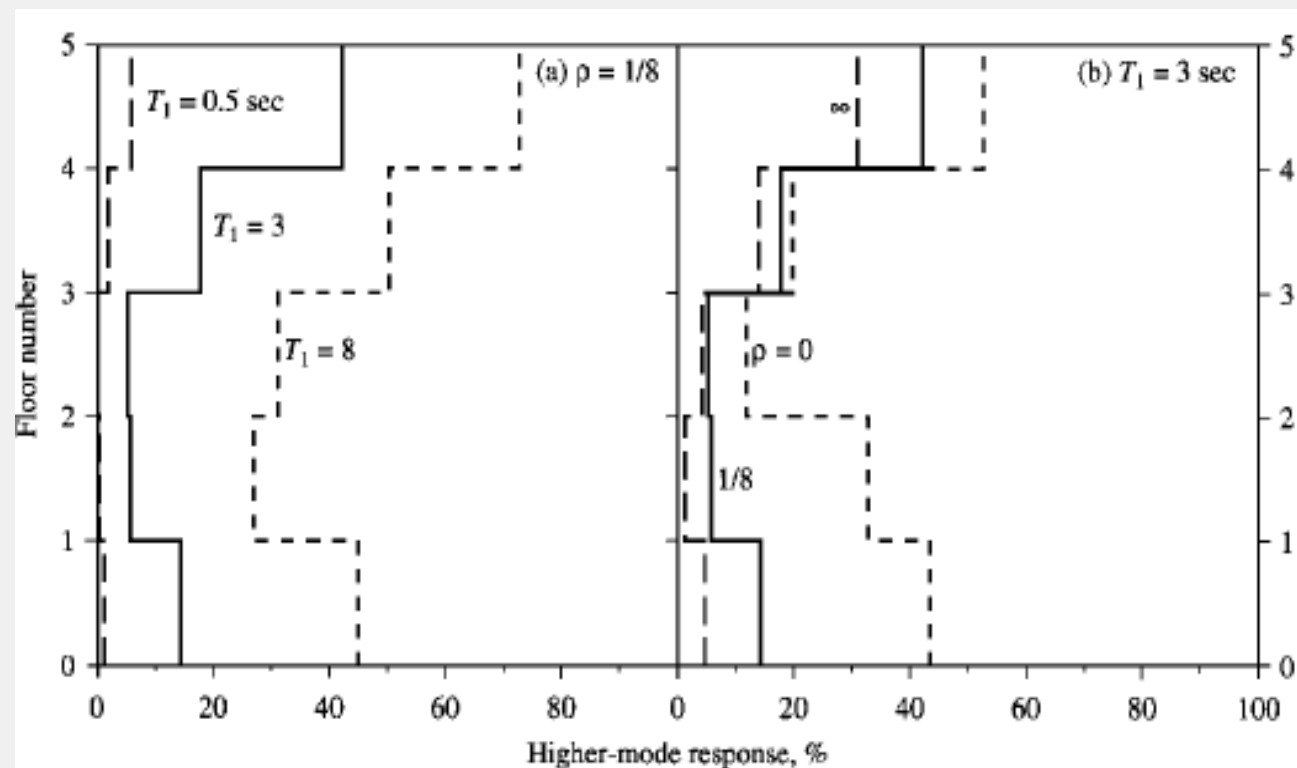


Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Ελαστικών Κτιρίων

6. Μεταβολή Καθ' Ύψος της Απόκρισης Ανώτερων Ιδιομορφών

Εξετάζεται πως η συμμετοχή των ανώτερων ιδιομορφών στην απόκριση όσον αφορά τις τέμνουσες δυνάμεις και τις ροπές ορόφων, μεταβάλλεται καθ' ύψος

Απόκριση υψηλότερων ιδιομορφών %.



Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Ελαστικών Κτιρίων

7. Πόσες Ιδιομορφές να Περιληφθούν

Ο αριθμός των ιδιομορφών που πρέπει να συμπεριλαμβάνεται εξαρτάται από δύο παράγοντες: 1) τη συνιστώσα του φάσματος ψευδοεπιταχύνσεων A_n και 2) το συντελεστή ιδιομορφικής συμμετοχής \bar{r}_n

$$r_n = r^{st} \bar{r}_n A_n$$

Αν συμπεριληφθούν οι πρώτες J ιδιομορφές τότε το σφάλμα είναι: $e_J = 1 - \sum_{n=1}^J \bar{r}_n$

Σφάλμα αν συμπεριληφθούν οι πρώτες 2 ιδιομορφές:

Διαπιστώνουμε ότι οι 2 πρώτες ιδιομορφές μπορούν να παρέχουν μια καλή προσέγγιση της συνολικής απόκρισης, με ακρίβεια που εξαρτάται από το μέγεθος απόκρισης και το ρ .

Γενικά:

Response	$\rho = 0$	$\rho = \frac{1}{8}$	$\rho = \infty$
V_s	0.144	0.144	0.110
V_b	0.115	0.086	0.033
M_b	0.024	0.018	0.005
u_s	0.0004	0.003	0.005

Να εξετάζεται ο κανόνας του 90% της συμμετέχουσας μάζας.