Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

ΣΥΜΜΕΤΟΧΗ ΙΔΙΟΜΟΡΦΩΝ ΣΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΕΠΑΛΛΗΛΙΑΣ

Ε.Ι. Σαπουντζάκης

Καθηγητής ΕΜΠ

Δυναμική Ανάλυση Ραβδωτών Φορέων

Συμμετοχή των Ιδιομορφών στη Μέθοδο Επαλληλίας

Μετακινήσεις στη μέθοδο επαλληλίας των ιδιομορφών

$\mathbf{u}(t)=\sum_{n=1}^{N}\mathbf{u}_n(t),\quad \mathbf{u}_n(t)=\boldsymbol{\phi}_n Y_n(t),\quad \mathbf{u}_n(t)$: Διάνυσμα ιδιομορφικών μετακινήσεων

$\mathbf{u}_n(t)$: Εκφράζει τη συμβολή της n-οστής ιδιομορφής στο διάνυσμα $\mathbf{u}(t)$

$\boldsymbol{\phi}_n$: n-οστή ιδιομορφή: Χρονικά ανεξάρτητο διάνυσμα που περιγράφει τη χωρική κατανομή της ιδιομορφικής μετακίνησης $\mathbf{u}_n(t)$

$$\left[\mathbf{k}-\omega_n^2\mathbf{m}\right]\boldsymbol{\phi}_n=\mathbf{0}$$

$Y_n(t)$: n-οστή γενικευμένη συντεταγμένη: Βαθμωτή χρονική συνάρτηση που περιγράφει τη χρονική κατανομή της ιδιομορφικής μετακίνησης $\mathbf{u}_n(t)$

$$M_n\ddot{Y}_n+C_n\dot{Y}_n+K_nY_n=P_n(t)\Rightarrow \ddot{Y}_n+2\xi_n\omega_n\dot{Y}_n+\omega_n^2Y_n=\frac{P_n(t)}{M_n}=\gamma_n(t)$$

$$M_n=\boldsymbol{\phi}_n^T\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n,\ C_n=\boldsymbol{\phi}_n^T\mathbf{c}\boldsymbol{\phi}_n,\ K_n=\boldsymbol{\phi}_n^T\mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_n,\ P_n(t)=\boldsymbol{\phi}_n^T\mathbf{p}(t)$$

Η ιδιομορφική μετακίνηση $\mathbf{u}_n(t)$ γράφεται ως γινόμενο χωρικής και χρονικής συνάρτησης

Συμμετοχή των Ιδιομορφών στη Μέθοδο Επαλληλίας

Μετακινήσεις στη μέθοδο επαλληλίας των ιδιομορφών

$\mathbf{u}(t)=\sum_{n=1}^{N}\mathbf{u}_n(t), \quad \mathbf{u}_n(t)=\phi_n Y_n(t), \quad \mathbf{u}_n(t)$: Διάνυσμα ιδιομορφικών μετακινήσεων

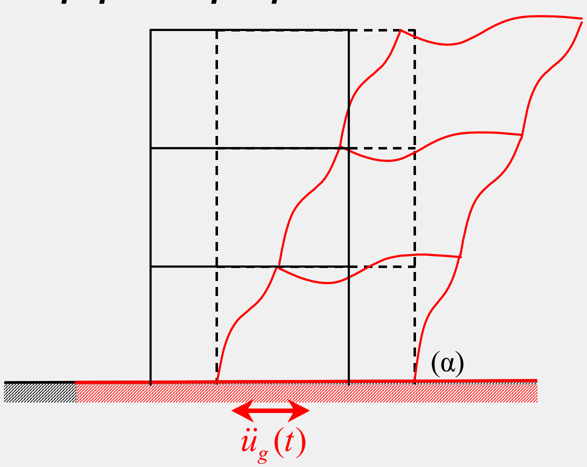
$\mathbf{u}_n(t)$: Εκφράζει τη συμβολή της n-οστής ιδιομορφής στο διάνυσμα $\mathbf{u}(t)$

Συμμετοχή όλων των ιδιομορφών στη μέθοδο επαλληλίας: Ακριβής λύση

Επιλογή σημαντικών ιδιομορφών στη μέθοδο επαλληλίας: Προσεγγιστική λύση (ακρίβεια, υπολογιστικός χρόνος).

***Ποιοτική επιλογή**: Μια ιδιομορφή είναι σημαντική όταν η παραμορφωσιακή εικόνα της είναι παραπλήσια της παραμόρφωσης της κατασκευής*

Π.χ. σύστημα με λειτουργία προβόλου υπό σεισμική δράση: Σημασία πρώτης ιδιομορφής



Συμμετοχή των Ιδιομορφών στη Μέθοδο Επαλληλίας

Μετακινήσεις στη μέθοδο επαλληλίας των ιδιομορφών

$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{u}_n(t), \quad \mathbf{u}_n(t) = \phi_n Y_n(t), \quad \mathbf{u}_n(t)$: Διάνυσμα ιδιομορφικών μετακινήσεων

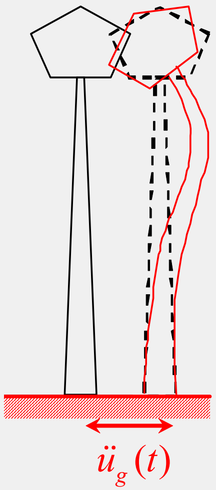
$\mathbf{u}_n(t)$: Εκφράζει τη συμβολή της n-οστής ιδιομορφής στο διάνυσμα $\mathbf{u}(t)$

Συμμετοχή όλων των ιδιομορφών στη μέθοδο επαλληλίας: Ακριβής λύση

Επιλογή σημαντικών ιδιομορφών στη μέθοδο επαλληλίας: Προσεγγιστική λύση (ακρίβεια, υπολογιστικός χρόνος).

***Ποσοτική επιλογή**: Αντικειμενικά κριτήρια με δυνατότητα προγραμματισμού στον Η/Υ*

Π.χ. Υδατόπυργος υπό σεισμική δράση: Σημασία δεύτερης ιδιομορφής



Συμμετοχή των Ιδιομορφών στη Μέθοδο Επαλληλίας

Ιδιομορφική συμμετοχή του διανύσματος ιδιομορφικής μετακίνησης $\mathbf{u}_n$ *στις αδρανειακές δυνάμεις, στις δυνάμεις απόσβεσης και στις ελαστικές δυνάμεις για την ειδική περίπτωση της κλασικής απόσβεσης*

Εξίσωση κίνησης πολυβάθμιου συστήματος

$$\mathbf{f}_I(t)+\mathbf{f}_D(t)+\mathbf{f}_S(t)=\mathbf{p}(t)\Rightarrow \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}+\mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}+\mathbf{k}\mathbf{u}=\mathbf{p}(t)$$

Συμμετοχή της n-οστής ιδιομορφής στην εξίσωση κίνησης

$$\mathbf{u}_n(t)=\phi_n Y_n(t)$$

$(\mathbf{f}_I)_n=\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}_n=\mathbf{m}\phi_n\ddot{Y}_n(t)$: Αδρανειακή δύναμη

$(\mathbf{f}_D)_n=\mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}_n=\mathbf{c}\phi_n\dot{Y}_n(t)$: Δύναμη απόσβεσης

$(\mathbf{f}_S)_n=\mathbf{k}\mathbf{u}_n=\mathbf{k}\phi_n Y_n(t)$: Ελαστική δύναμη

→ Συνισταμένη των δυνάμεων: $\mathbf{p}_n(t)=(\mathbf{f}_I)_n+(\mathbf{f}_D)_n+(\mathbf{f}_S)_n=\left(\mathbf{m}\ddot{Y}_n+\mathbf{c}\dot{Y}_n+\mathbf{k}Y_n\right)\phi_n\Rightarrow$

$$\mathbf{p}_n(t)=\mathbf{a}_n(t)\phi_n$$

Ισχύει $\sum_{n=1}^{N}\mathbf{p}_n(t)=\mathbf{p}(t)$ συνεπώς το διάνυσμα $\mathbf{p}_n(t)$ περιγράφει τη συμμετοχή της n-οστής ιδιομορφής στην εξωτερική φόρτιση $\mathbf{p}(t)$ του πολυβάθμιου συστήματος

Συμμετοχή των Ιδιομορφών στη Μέθοδο Επαλληλίας

Συμμετοχή της n-οστής ιδιομορφής στην εξωτερική φόρτιση

→ Συνισταμένη των δυνάμεων: $\mathbf{p}_n(t) = (\mathbf{f}_I)_n + (\mathbf{f}_D)_n + (\mathbf{f}_S)_n = (\mathbf{m}\ddot{Y}_n + \mathbf{c}\dot{Y}_n + \mathbf{k}Y_n)\boldsymbol{\phi}_n \Rightarrow$

$\left(\text{Ισχύει } \sum_{n=1}^{N} \mathbf{p}_n(t) = \mathbf{p}(t)\right)$ $\quad \mathbf{p}_n(t) = \mathbf{a}_n(t)\boldsymbol{\phi}_n$

Για κλασική απόσβεση (π.χ. $\mathbf{c} = \alpha_0\mathbf{m} + \alpha_1\mathbf{k}$) ισχύει:

$\left(\text{Υπενθυμίζεται ότι: } \left[\mathbf{k} - \omega_n^2\mathbf{m}\right]\boldsymbol{\phi}_n = \mathbf{0}\right)$

$$\mathbf{p}_n(t) = \mathbf{a}_n(t)\boldsymbol{\phi}_n = \underbrace{\left[\ddot{Y}_n + \left(\alpha_0 + \alpha_1\omega_n^2\right)\dot{Y}_n + \omega_n^2 Y_n\right]}_{\gamma_n(t)}\underbrace{\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n}_{\mathbf{e}_n} = \gamma_n(t)\mathbf{e}_n$$

$\mathbf{e}_n$: Χρονικά ανεξάρτητο διάνυσμα που περιγράφει τη χωρική κατανομή της φόρτισης $\mathbf{p}_n(t)$

$\gamma_n(t)$: Βαθμωτή χρονική συνάρτηση που περιγράφει τη χρονική κατανομή της φόρτισης $\mathbf{p}_n(t)$

Παρατηρείται ότι όπως και η ιδιομορφική μετακίνηση $\mathbf{u}_n$, η συνισταμένη των δυνάμεων $\mathbf{p}_n(t)$ γράφεται ως γινόμενο χωρικής και χρονικής συνάρτησης (στην περίπτωση της κλασικής απόσβεσης).

Συμμετοχή των Ιδιομορφών στη Μέθοδο Επαλληλίας

Συμμετοχή της n-οστής ιδιομορφής στην εξίσωση κίνησης

→ $$\mathbf{p}(t) = \sum_{n=1}^{N} \gamma_n(t)\mathbf{e}_n \Rightarrow \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{p}(t) = \sum_{n=1}^{N} \gamma_n(t)\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n = \gamma_i(t) M_i \Rightarrow$$

$$\gamma_i(t) = \frac{\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{p}(t)}{M_i},\ i = 1,\ldots,N$$

$$\mathbf{p}_n(t) = \gamma_n(t)\mathbf{e}_n = \frac{\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{p}(t)}{M_n}\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\phi}_k^T \mathbf{p}_n(t) = \frac{\overbrace{\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{p}(t)}^{P_n(t)}}{M_n}\overbrace{\boldsymbol{\phi}_k^T \mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n}^{\substack{k\neq n, =0 \\ k=n, M_n}} \Rightarrow \boldsymbol{\phi}_k^T \mathbf{p}_n(t) = \begin{cases} P_n(t), k = n \\ 0, \quad\quad k \neq n \end{cases}$$

→ Η φόρτιση με το διάνυσμα $\mathbf{p}_n(t)$ διεγείρει μόνο τη n-οστή ιδιομορφή

→ Η ιδιομορφική μετακίνηση $\mathbf{u}_n(t)$ προκαλείται αποκλειστικά από τη φόρτιση με το διάνυσμα $\mathbf{p}_n(t)$

Μέθοδος Επαλληλίας των Ιδιομορφών

Υπολογισμός εντατικών μεγεθών

1ος Τρόπος: *Η συμμετοχή της n-οστής ιδιομορφής $q_n(t)$ σε κάποιο εντατικό μέγεθος στοιχείου $q(t)$ προσδιορίζεται από τις ιδιομορφικές μετακινήσεις $\mathbf{u}_n(t)$ χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες δυσκαμψίας του στοιχείου, ενώ το εντατικό μέγεθος του στοιχείου προκύπτει από τη συνεισφορά όλων των ιδιομορφών*.

$q_n(t)$: Από το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου και τις ιδιομ. μετακινήσεις $\mathbf{u}_n(t)$

$$q(t) = \sum_{n=1}^{N} q_n(t)$$

2ος Τρόπος: *Γνωρίζοντας τις ιδιομορφικές μετακινήσεις $\mathbf{u}_\mathrm{n}(t)$, η συμμετοχή της n-οστής ιδιομορφής $q_n(t)$ σε κάποιο εντατικό μέγεθος στοιχείου $q(t)$ προσδιορίζεται από στατική ανάλυση της κατασκευής υποβαλλόμενης στις ελαστικές δυνάμεις* $\left(\mathbf{f}_S(t)\right)_n = \mathbf{k}\mathbf{u}_n(t)$ *ενώ το εντατικό μέγεθος του στοιχείου προκύπτει από τη συνεισφορά όλων των ιδιομορφών*. Ισχύει $\left(\mathbf{f}_S(t)\right)_n = \mathbf{k}\mathbf{u}_n(t) = \mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_n Y_n(t) = \omega_n^2 \mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n Y_n(t)$

$q_n(t)$: Από στατική ανάλυση της κατασκευής στην οποία επιβάλλονται τα φορτία $\left(\mathbf{f}_S(t)\right)_n$

$$q(t) = \sum_{n=1}^{N} q_n(t)$$

Μέθοδος Επαλληλίας των Ιδιομορφών

Ανακεφαλαιώνοντας:

***Βήματα μεθόδου επαλληλίας των ιδιομορφών**:*

1) *Καθορισμός των ιδιοτήτων της κατασκευής* $\mathbf{m}, \mathbf{k}, \xi_n$

2) *Προσδιορισμός των ιδιοσυχνοτήτων* ω_n και ιδιομορφών $\boldsymbol{\phi}_n$

3) *Υπολογισμός της απόκρισης κάθε ιδιομορφής ακολουθώντας τα παρακάτω:*

   α) Μόρφωση και επίλυση των εξισώσεων κίνησης (περίπτωση κλασικής απόσβεσης) ως προς τις ιδιομορφικές συντεταγμένες για την εύρεση των $Y_n(t)$:

$$\ddot{Y}_n + 2\xi_n\omega_n\dot{Y}_n + \omega_n^2 Y_n = \gamma_n(t) = \frac{P_n(t)}{M_n}$$

   β) Υπολογισμός συμμετοχής της κάθε ιδιομορφής στις επικόμβιες μετακινήσεις $\mathbf{u}_n$:

$$\mathbf{u}_n(t) = \boldsymbol{\phi}_n Y_n(t)$$

   γ) Υπολογισμός συμμετοχής της κάθε ιδιομορφής στα εντατικά μεγέθη των στοιχείων εφαρμόζοντας μια από τις δύο μεθόδους που περιγράφηκαν

4) *Συνδυασμός της συνεισφοράς όλων των ιδιομορφών για τον προσδιορισμό της ολικής απόκρισης (μετακινήσεις και εντατικά μεγέθη)*

Συμμετοχή των Ιδιομορφών στη Μέθοδο Επαλληλίας

Ιδιομορφική συμμετοχή για την ειδική περίπτωση φόρτισης $\mathbf{p}(t) = \mathbf{R} f(t)$ **:**

$\mathbf{R}$: χρονικά ανεξάρτητο διάνυσμα - εκφράζει τη χωρική κατανομή της φόρτισης,
$f(t)$: βαθμωτή χρονική συνάρτηση - εκφράζει τη χρονική μεταβολή της φόρτισης
$f(t)$: κοινό για όλους τους βαθμούς ελευθερίας του πολυβάθμιου συστήματος

Υπολογισμός του $\mathbf{R}$: $\mathbf{R} = \mathbf{\Delta r}$
$\mathbf{\Delta}$: μητρώο που περιέχει αυξητικούς ή μειωτικούς συντελεστές της εξωτερικής φόρτισης, π.χ. $\mathbf{\Delta} = \mathbf{I}$ (φόρτιση σε κάποιον β.ε.),
$\mathbf{\Delta} = \mathbf{m}$ (σεισμική φόρτιση)
$\mathbf{r}$: Διάνυσμα χωρικής κατανομής της φόρτισης που περιέχει τιμές 0,1 ανάλογα σε ποιους βαθμούς ελευθερίας επιβάλλεται η φόρτιση

Υπολογισμός του $f(t)$: π.χ. $f(t) = p_i(t)$ (φόρτιση στον β.ε. i με δύναμη $p_i(t)$),
$f(t) = -\ddot{u}_g(t)$ (σεισμική φόρτιση)

Συμμετοχή των Ιδιομορφών στη Μέθοδο Επαλληλίας

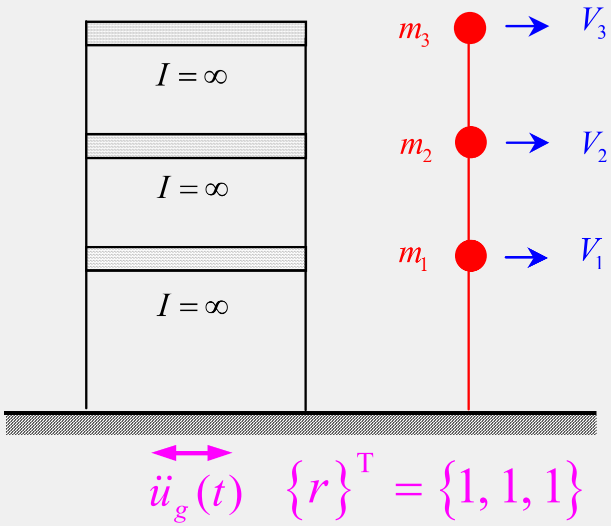
Ιδιομορφική συμμετοχή για την ειδική περίπτωση φόρτισης $\mathbf{p}(t) = \mathbf{R}f(t)$:

Υπολογισμός του $\mathbf{R}$: $\mathbf{R} = \boldsymbol{\Delta}\mathbf{r}$

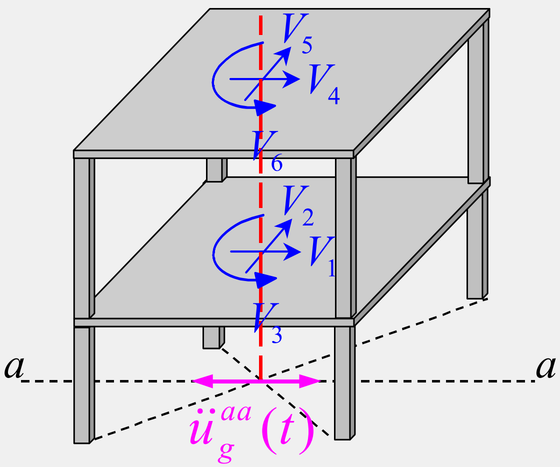
$\boldsymbol{\Delta}$: μητρώο που περιέχει αυξητικούς ή μειωτικούς συντελεστές της εξωτερικής φόρτισης, π.χ. $\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{I}$ (φόρτιση σε κάποιον β.ε.), $\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{m}$ (σεισμική φόρτιση)

$\mathbf{r}$: Διάνυσμα χωρικής κατανομής της φόρτισης που περιέχει τιμές 0,1 ανάλογα σε ποιους βαθμούς ελευθερίας επιβάλλεται η φόρτιση

Παραδείγματα υπολογισμού του $\mathbf{r}$ για σεισμική φόρτιση



$\{r\}^{\mathrm{T}} = \{1, 1, 1\}$



$\{r\}^{\mathrm{T}} = \{1, 0, 0, 1, 0, 0\}$

Συμμετοχή των Ιδιομορφών στη Μέθοδο Επαλληλίας

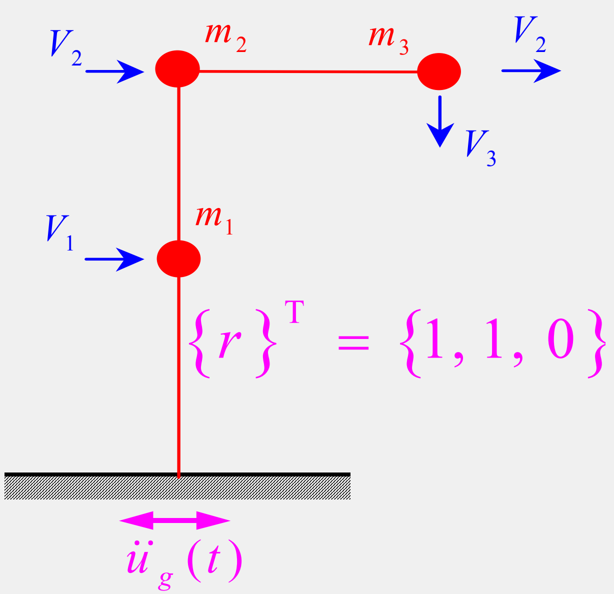
Ιδιομορφική συμμετοχή για την ειδική περίπτωση φόρτισης $\mathbf{p}(t) = \mathbf{R} f(t)$ **:**

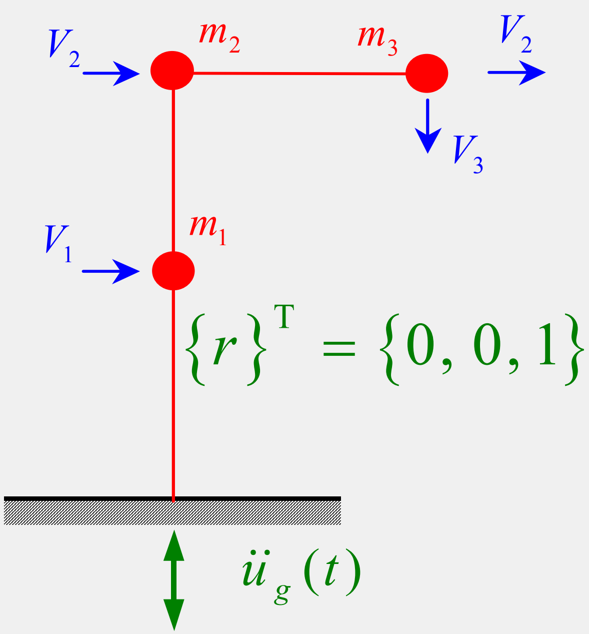
Υπολογισμός του $\mathbf{R}$: $\mathbf{R} = \boldsymbol{\Delta}\mathbf{r}$

$\boldsymbol{\Delta}$: μητρώο που περιέχει αυξητικούς ή μειωτικούς συντελεστές της εξωτερικής φόρτισης, π.χ. $\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{I}$ (φόρτιση σε κάποιον β.ε.), $\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{m}$ (σεισμική φόρτιση)

$\mathbf{r}$: Διάνυσμα χωρικής κατανομής της φόρτισης που περιέχει τιμές 0,1 ανάλογα σε ποιους βαθμούς ελευθερίας επιβάλλεται η φόρτιση

Παραδείγματα υπολογισμού του $\mathbf{r}$ για σεισμική φόρτιση





Συμμετοχή των Ιδιομορφών στη Μέθοδο Επαλληλίας

Ιδιομορφική συμμετοχή για την ειδική περίπτωση φόρτισης $\mathbf{p}(t)=\mathbf{R}f(t)$:

Εξετάζεται δηλαδή η περίπτωση που η εξωτερική διέγερση μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο χωρικής και χρονικής συνάρτησης, με κοινό χρονικό μέρος για όλους τους β.ε.

Συμμετοχή της n-οστής ιδιομορφής $\mathbf{p}_n(t)$ στην εξωτερική φόρτιση $\mathbf{p}(t)$:

$$\mathbf{p}_n(t)=\frac{\boldsymbol{\phi}_n^T\mathbf{p}(t)}{M_n}\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n=\underbrace{\frac{\boldsymbol{\phi}_n^T\mathbf{R}f(t)}{M_n}}_{\gamma_n(t)}\underbrace{\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n}_{\mathbf{e}_n}=\underbrace{\frac{\overbrace{\boldsymbol{\phi}_n^T\mathbf{R}}^{L_n}}{M_n}}_{\Gamma_n}\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n f(t)=\underbrace{\Gamma_n\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n}_{\mathbf{R}_n}f(t)=\mathbf{R}_n f(t)$$

$$\mathbf{R}_n=\frac{\boldsymbol{\phi}_n^T\mathbf{R}}{M_n}\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n=\Gamma_n\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n,\ \Gamma_n=\frac{\boldsymbol{\phi}_n^T\mathbf{R}}{M_n}=\frac{L_n}{M_n}$$: χρονικά ανεξάρτητο διάνυσμα του $\mathbf{p}_n(t)$

L_n:Συντελεστής διέγερσης

Γ_n:Συντελεστής συμμετοχής: Μέτρο καθορισμού της συμβολής της n-οστής ιδιομορφής στην εξωτερική φόρτιση $\mathbf{R}$ - ισχύει $\gamma_n(t)=\Gamma_n f(t)$ και

$$\mathbf{p}_n(t)=\gamma_n(t)\mathbf{e}_n=(\Gamma_n\mathbf{e}_n)f(t)=\mathbf{R}_n f(t)$$

$\rightarrow$ Ωστόσο: Το Γ_n εξαρτάται από τον τρόπο κανονικοποίησης των ιδιομορφών συνεπώς δεν αποτελεί κατάλληλο μέγεθος προσδιορισμού της συμβολής των ιδιομορφών στον προσδιορισμό κάποιου κινηματικού ή εντατικού μεγέθους

Συμμετοχή των Ιδιομορφών στη Μέθοδο Επαλληλίας

Ιδιομορφική συμμετοχή για την ειδική περίπτωση φόρτισης $\mathbf{p}(t)=\mathbf{R}f(t)$:

Προσδιορισμός $\mathbf{u}_n(t)$: $\mathbf{u}_n(t)=\boldsymbol{\phi}_n Y_n(t)$, όπου $Y_n(t)$ υπολογίζεται από τις εξισώσεις:

$$\ddot{Y}_n+2\xi_n\omega_n\dot{Y}_n+\omega_n^2 Y_n=\gamma_n(t)=\frac{\boldsymbol{\phi}_n{}^T\mathbf{p}(t)}{M_n}=\frac{\boldsymbol{\phi}_n{}^T\mathbf{R}f(t)}{M_n}=\Gamma_n f(t)\Rightarrow$$

$$\ddot{\psi}_n+2\xi_n\omega_n\dot{\psi}_n+\omega_n^2\psi_n=f(t),\ \ \psi_n=\frac{Y_n}{\Gamma_n}\rightarrow$$ λύση μονοβάθμιου ταλαντωτή

με $m=1,\omega=\omega_n,\ \xi=\xi_n,\ p(t)=f(t)$

Τελικά: $\mathbf{u}_n(t)=\Gamma_n\boldsymbol{\phi}_n\psi_n(t)=\dfrac{\Gamma_n\boldsymbol{\phi}_n}{\omega_n^2}\omega_n^2\psi_n(t)=\mathbf{u}_\mathbf{n}^\mathbf{st}\left(\omega_n^2\psi_n(t)\right)$

$\mathbf{u}_\mathbf{n}^\mathbf{st}$: χρονικά ανεξάρτητο διάνυσμα του $\mathbf{u}_n(t)$

Υπενθυμίζεται:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{R}_n&=\frac{\boldsymbol{\phi}_n{}^T\mathbf{R}}{M_n}\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n=\Gamma_n\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n\\ \mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_n&=\omega_n^2\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n\end{aligned}\right\}\Rightarrow\mathbf{R}_n=\frac{\Gamma_n}{\omega_n^2}\mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_n\xrightarrow{\text{Προπολλ/μός με }\mathbf{k}^{-1}}\mathbf{k}^{-1}\mathbf{R}_n=\underbrace{\frac{\Gamma_n}{\omega_n^2}\boldsymbol{\phi}_n}_{\mathbf{u}_n^{st}}$$

Συμμετοχή των Ιδιομορφών στη Μέθοδο Επαλληλίας

Ιδιομορφική συμμετοχή για την ειδική περίπτωση φόρτισης $\mathbf{p}(t)=\mathbf{R}f(t)$ *:*

Προσδιορισμός $q_n(t)$: Γνωρίζοντας τις ιδιομορφικές μετακινήσεις $\mathbf{u}_n(t)$ και χρησιμοποιώντας τον 2ο τρόπο υπολογισμού εντατικών μεγεθών, έχουμε:

Προσδιορισμός $\left(\mathbf{f}_S(t)\right)_n$: $\left(\mathbf{f}_S(t)\right)_n = \mathbf{k}\mathbf{u}_n(t) = \Gamma_n \mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_n \psi_n(t) = \Gamma_n \omega_n^2 \mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n \psi_n(t)$

$$= \Gamma_n \mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n \left(\omega_n^2 \psi_n(t)\right) = \mathbf{R}_n \left(\omega_n^2 \psi_n(t)\right)$$

Προσδιορισμός $q_n(t)$: Από στατική ανάλυση της κατασκευής με τα φορτία $\left(\mathbf{f}_S(t)\right)_n = \mathbf{R}_n \left(\omega_n^2 \psi_n(t)\right)$. Είναι εμφανές ότι αρκεί η φόρτιση της κατασκευής με τα φορτία $\mathbf{R}_n$ και στη συνέχεια ο πολλαπλασιασμός με το συντελεστή $\left(\omega_n^2 \psi_n(t)\right)$.

Τελικά $q_n(t) = q_n^{st}\left(\omega_n^2 \psi_n(t)\right)$, όπου q_n^{st} είναι η τιμή του εντατικού μεγέθους που προκύπτει από τη στατική ανάλυση με τα φορτία $\mathbf{R}_n$.

Συμμετοχή των Ιδιομορφών στη Μέθοδο Επαλληλίας

Ιδιομορφική συμμετοχή για την ειδική περίπτωση φόρτισης $\mathbf{p}(t) = \mathbf{R} f(t)$:

Προσδιορισμός $q_n(t)$: $q_n(t) = q_n^{st}\left(\omega_n^2 \psi_n(t)\right)$

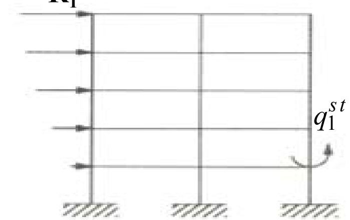
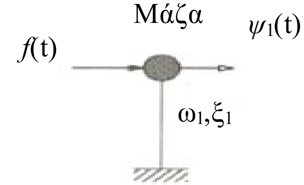
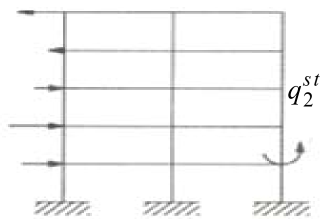
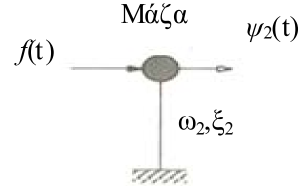
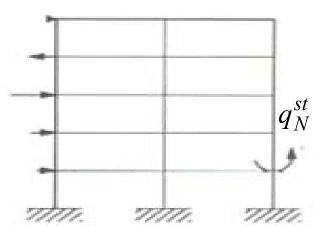
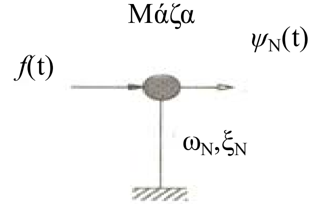
q_n^{st}: Η τιμή του εντατικού μεγέθους που προκύπτει από τη στατική ανάλυση με τα φορτία $\mathbf{R}_n$

$\psi_n(t)$: Προκύπτει από την επίλυση μονοβάθμιου ταλαντωτή

$$\ddot{\psi}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{\psi}_n + \omega_n^2 \psi_n = f(t)$$

$$\left(m = 1, \omega = \omega_n,\ \xi = \xi_n, p(t) = f(t)\right)$$

$$\left(\text{Προσδιορισμός } q(t)\text{: } q(t) = \sum_{n=1}^{N} q_n(t)\right)$$

Ιδιο-μορφή	Στατική ανάλυση της κατασκευής	Δυναμική ανάλυση μονοβάθμιου συστήματος	Ιδιομορφική συνεισφορά στη δυναμική απόκριση
1	Δυνάμεις $\mathbf{R_1}$ 	Μοναδιαία Μάζα 	$q_1(t) = q_1^{st}\left[\omega_1^2\psi_1(t)\right]$
2	Δυνάμεις $\mathbf{R_2}$ 	Μοναδιαία Μάζα 	$q_2(t) = q_2^{st}\left[\omega_2^2\psi_2(t)\right]$
⋮	⋮ ⋮	⋮ ⋮	⋮ ⋮
N	Δυνάμεις $\mathbf{R_N}$ 	Μοναδιαία Μάζα 	$q_N(t) = q_N^{st}\left[\omega_N^2\psi_N(t)\right]$
Ολική απόκριση			$q(t) = \sum_{n=1}^{N} q_n(t)$

Ερμηνεία συμμετοχής των ιδιομορφών στον υπολογισμό των εντατικών μεγεθών

Συμμετοχή των Ιδιομορφών στη Μέθοδο Επαλληλίας

Ιδιομορφική συμμετοχή για την ειδική περίπτωση φόρτισης όπου $\mathbf{p}(t)=\mathbf{R}f(t)$*:*

$$\rightarrow q_n(t)=q_n^{st}\left(\omega_n^2\psi_n(t)\right)=q^{st}\frac{q_n^{st}}{q^{st}}\left(\omega_n^2\psi_n(t)\right)=\gamma_n^q q^{st}\left(\omega_n^2\psi_n(t)\right),$$

$\gamma_n^q=\dfrac{q_n^{st}}{q^{st}}$: συντελεστής ιδιομορφικής συμβολής του μεγέθους q,

$q^{st}=\sum_{n=1}^{N}q_n^{st}$ ή εναλλακτικά αποδεικνύεται ότι πρόκειται για το μέγεθος που προκύπτει από στατική ανάλυση με τα φορτία $\mathbf{R}$

$\rightarrow$ Αποδεικνύεται ότι η ίδια ακριβώς σχέση ισχύει και στην περίπτωση όπου το q_n είναι κάποια συνιστώσα ιδιομορφικής μετακίνησης $\mathbf{u}_n(t)$. Σε αυτήν την περίπτωση το q_n^{st} υπολογίζεται από στατική ανάλυση με τα φορτία με τα φορτία $\mathbf{R}_n$, είτε εναλλακτικά μέσω του διανύσματος $\mathbf{u}_\mathbf{n}^\mathbf{st}=\dfrac{\Gamma_n\phi_n}{\omega_n^2}$

Συμμετοχή των Ιδιομορφών στη Μέθοδο Επαλληλίας

Ιδιότητες συντελεστή ιδιομορφικής συμβολής του μεγέθους q γ_n^q :

1) Αδιάστατος

2) Ανεξάρτητος από τον τρόπο κανονικοποίησης των ιδιομορφών

3) $\sum_{n=1}^{N} \gamma_n^q = 1$

4) Καθορισμός της ιδιομορφικής συμβολής σε κάποιο μέγεθος ***ξεχωριστά***

→ Το γ_n^q αποτελεί βολικό μέτρο καθορισμού της συμβολής της κάθε ιδιομορφής στο μέγεθος q

Επιλογή σημαντικών ιδιομορφών στη μέθοδο της επαλληλίας:

→ Για τον προσδιορισμό του ελάχιστου πλήθους σημαντικών ιδιομορφών στον καθορισμό του μεγέθους q λαμβάνονται υπόψη τόσες ιδιομορφές ώστε το άθροισμα των γ_n^q να είναι κοντά στη μονάδα (πρακτικά >90%)

Συμμετοχή των Ιδιομορφών στη Μέθοδο Επαλληλίας

Μειονεκτήματα μεθόδου Συμμετοχής Ιδιομορφών

1) Ισχύει μόνο για κλασική απόσβεση

2) Ισχύει μόνο για την ειδική περίπτωση εξωτερικής φόρτισης $\mathbf{p}(t) = \mathbf{R}f(t)$

3) Δεν λαμβάνονται υπόψη αρχικές συνθήκες

4) Δεν επιλύονται ελεύθερες ταλαντώσεις

5) Η μέθοδος λαμβάνει υπόψη αποκλειστικά τα χαρακτηριστικά του ταλαντωτή $\mathbf{m},\mathbf{k}$ *σε συνδυασμό με τη χωρική κατανομή της φόρτισης* $\mathbf{R}$ *ώστε να καθορίσει τη «χωρική» συμμετοχή της ιδιομορφής σε κάποιο μέγεθος*

Συμμετοχή των Ιδιομορφών στη Μέθοδο Επαλληλίας

Εναλλακτικός προσδιορισμός σημαντικών ιδιομορφών
(για σεισμική φόρτιση - $\mathbf{\Delta} = \mathbf{m}$):

Δρώσα ιδιομορφική μάζα της n-οστής ιδιομορφής: $M_n^{eff} = \Gamma_n^2 M_n = \Gamma_n L_n$

Συνολική δρώσα ιδιομορφική μάζα: $M_{tot}^{eff} = \sum_{n=1}^{N} M_n^{eff} = \mathbf{r}^T \mathbf{m} \mathbf{r}$

Συντελεστής δρώσας ιδιομορφικής μάζας της n-οστής ιδιομορφής: $\alpha_n = \dfrac{M_n^{eff}}{M_{tot}^{eff}}$

$\rightarrow$ Για τον προσδιορισμό του ελάχιστου πλήθους σημαντικών ιδιομορφών στην ανάλυση της κατασκευής λαμβάνονται υπόψη τόσες ιδιομορφές ώστε το άθροισμα των α_n να είναι >90%

Ιδιότητες:

1) $M_{tot}^{eff} = m_{tot}$ μόνο στην περίπτωση που $\mathbf{r}^T = \{1,1,...,1\}$

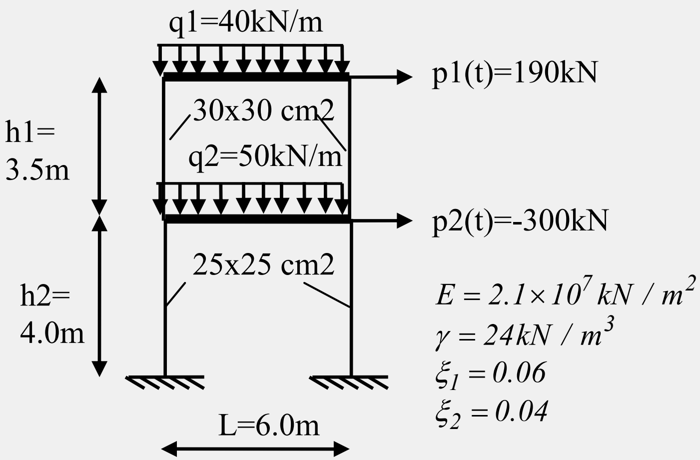
2) $\sum_{n=1}^{N} a_n = 1$

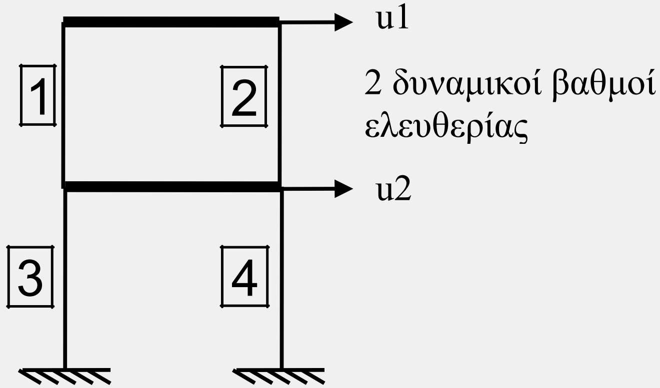
3) Ενεργειακή σύγκριση των ιδιομορφών - Δεν είναι δυνατό να καθοριστεί η συμβολή κάθε ιδιομορφής ξεχωριστά σε κάποιο κινηματικό ή εντατικό μέγεθος

4) Στις κτιριακές κατασκευές (**λειτουργία προβόλου**) ισχύει $a_n = \gamma_n^{Q_b}$, όπου $\gamma_n^{Q_b}$ είναι ο συντελεστής ιδιομορφικής συμβολής της τέμνουσας βάσης Q_b

Συμμετοχή των Ιδιομορφών στη Μέθοδο Επαλληλίας

Παράδειγμα: Διώροφο διατμητικό πλαίσιο υπό οριζόντια φόρτιση





Μέθοδος επαλληλίας των ιδιομορφών:

Βήμα 1: Υπολογισμός $\mathbf{m}$, $\mathbf{k}$, ξ_n

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 32 \end{bmatrix} \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 3826.5 & -3826.5 \\ -3826.5 & 9142.1 \end{bmatrix}$$

$\xi_1 = 0.06$, $\xi_2 = 0.04$ → Τα ξ_n έχουν ήδη καθοριστεί

Βήμα 2: Υπολογισμός ω_n, $\boldsymbol{\beta}_n$, $\boldsymbol{\phi}_n$

$$\left|\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m}\right| = 0 \Rightarrow \omega_1 = 8.289,\ \omega_2 = 19.236$$

$$\left(\mathbf{k} - \omega_n^2\mathbf{m}\right)\boldsymbol{\beta}_n = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\beta}_1^T = \{1 \quad 0.5511\},\ \boldsymbol{\beta}_2^T = \{1 \quad -1.41751\}$$

$\boldsymbol{\phi}_1^T = \{1 \quad 0.5511\}$, $\boldsymbol{\phi}_2^T = \{-0.7054 \quad 1\}$ (κανονικοποίηση ως προς το max)

Συμμετοχή των Ιδιομορφών στη Μέθοδο Επαλληλίας

Παράδειγμα: Διώροφο διατμητικό πλαίσιο υπό οριζόντια φόρτιση

Μέθοδος επαλληλίας των ιδιομορφών:

Βήμα 3: Υπολογισμός των γενικευμένων μαζών M_n

$$M_n = \boldsymbol{\phi}_n{}^T \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_n \Rightarrow M_1 = 34.719,\ M_2 = 44.440$$

Συμμετοχή των ιδιομορφών στη μέθοδο επαλληλίας:

Βήμα 4: Υπολογισμός του διανύσματος $\mathbf{R} = \boldsymbol{\Delta}\mathbf{r}$

$$\mathbf{p}(t) = \begin{Bmatrix} 190 \\ -300 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 190 & 0 \\ 0 & -300 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Delta}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{r}} \underbrace{1}_{f(t)} \Rightarrow \boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} 190 & 0 \\ 0 & -300 \end{bmatrix},\ \mathbf{r} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix},\ \mathbf{R} = \begin{Bmatrix} 190 \\ -300 \end{Bmatrix},\ f(t) = 1$$

Βήμα 5: Υπολογισμός των συντελεστών συμμετοχής Γ_n

$$\Gamma_n = \frac{\boldsymbol{\phi}_n{}^T \mathbf{R}}{M_n} \Rightarrow \Gamma_1 = 0.7106,\ \Gamma_2 = -9.7666$$ (διατήρηση προσήμων)

Βήμα 6: Υπολογισμός των διανυσμάτων $\mathbf{R}_n$ των στατικών φορτίσεων

$$\mathbf{R}_n = \Gamma_n \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_n \Rightarrow \mathbf{R}_1 = \begin{Bmatrix} 17.764 \\ 12.531 \end{Bmatrix},\ \mathbf{R}_2 = \begin{Bmatrix} 172.234 \\ -312.532 \end{Bmatrix}$$

Συμμετοχή των Ιδιομορφών στη Μέθοδο Επαλληλίας

Παράδειγμα: Διώροφο διατμητικό πλαίσιο υπό οριζόντια φόρτιση

Συμμετοχή των ιδιομορφών στη μέθοδο επαλληλίας:

Βήμα 7: Υπολογισμός της στατικής απόκρισης που οφείλεται στη στατική φόρτιση $\mathbf{R}_n$ των μεγεθών της τέμνουσας βάσης Q_{bn}^{st}, ροπής ανατροπής M_{bn}^{st}, μετακίνησης κορυφής u_{1n}^{st} και (π.χ.) της καμπτικής ροπής κορυφής στύλου 1 q_n^{st}

$Q_{bn}^{st} = \sum_{k=1}^{2} R_{kn} = \mathbf{r}^T \mathbf{R}_n$ (ο τύπος ισχύει επειδή έχουμε στατική λειτουργία προβόλου)

$\Rightarrow Q_{b1}^{st} = 30.295,\ Q_{b2}^{st} = -140.298$

$M_{bn}^{st} = \sum_{k=1}^{2} h_k R_{kn} = \mathbf{h}^T \mathbf{R}_n$, όπου $\mathbf{h}^T = \{h_1 + h_2 \quad h_2\} = \{7.5 \quad 4.0\}$ (ο τύπος ισχύει επειδή έχουμε στατική λειτουργία προβόλου) $\Rightarrow M_{b1}^{st} = 183.355,\ M_{b2}^{st} = 41.630$

$$\mathbf{u}_\mathbf{n}^\mathbf{st} = \mathbf{k}^{-1}\mathbf{R}_n = \frac{\Gamma_n \boldsymbol{\phi}_n}{\omega_n^2} \Rightarrow u_{1n}^{st} = \frac{\Gamma_n \phi_{1n}}{\omega_n^2} \Rightarrow u_{11}^{st} = 0.01034,\ u_{12}^{st} = 0.018619$$

q_n^{st}: Από στατική ανάλυση της κατασκευής υποβαλλόμενης στα φορτία $\mathbf{R}_n$

$\mathbf{k}\mathbf{u}_\mathbf{n}^\mathbf{st} = \mathbf{R}_n \Rightarrow \ldots \Rightarrow q_1^{st} = 32.232,\ q_2^{st} = 312.521$

Συμμετοχή των Ιδιομορφών στη Μέθοδο Επαλληλίας

Παράδειγμα: Διώροφο διατμητικό πλαίσιο υπό οριζόντια φόρτιση

Συμμετοχή των ιδιομορφών στη μέθοδο επαλληλίας:

Βήμα 8: Υπολογισμός της συνολικής στατικής απόκρισης που οφείλεται στη στατική φόρτιση $\mathbf{R}$ των μεγεθών της τέμνουσας βάσης Q_b^{st}, ροπής ανατροπής M_b^{st}, μετακίνησης κορυφής u_1^{st} και της καμπτικής ροπής κορυφής στύλου 1 q^{st}

$$Q_b^{st} = \sum_{k=1}^{2} R_k = \mathbf{r}^T\mathbf{R} \Rightarrow Q_b^{st} = -110.0 \text{ (ή } Q_b^{st} = \sum_{n=1}^{2} Q_{bn}^{st}\text{)}$$

$$M_b^{st} = \sum_{k=1}^{2} h_k R_k = \mathbf{h}^T\mathbf{R}, \text{ όπου } \mathbf{h}^T = \{7.5 \quad 4.0\} \Rightarrow M_b^{st} = 225.0 \text{ (ή } M_b^{st} = \sum_{n=1}^{2} M_{bn}^{st}\text{)}$$

$\mathbf{u}^{\mathbf{st}}$: Από στατική ανάλυση της κατασκευής υποβαλλόμενης στα φορτία $\mathbf{R}$

$$\mathbf{k}\mathbf{u}^{\mathbf{st}} = \mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{u}^{\mathbf{st}} = \mathbf{k}^{-1}\mathbf{R} \Rightarrow u_1^{st} = 0.028961 \text{ (ή } u_1^{st} = \sum_{n=1}^{2} u_{1n}^{st}\text{)}$$

q^{st}: Από στατική ανάλυση της κατασκευής υποβαλλόμενης στα φορτία $\mathbf{R}$

$$\mathbf{k}\mathbf{u}^{\mathbf{st}} = \mathbf{R} \Rightarrow \ldots \Rightarrow q^{st} = 344.753 \text{ (ή } q^{st} = \sum_{n=1}^{2} q_n^{st}\text{)}$$

Συμμετοχή των Ιδιομορφών στη Μέθοδο Επαλληλίας

Παράδειγμα: Διώροφο διατμητικό πλαίσιο υπό οριζόντια φόρτιση

Συμμετοχή των ιδιομορφών στη μέθοδο επαλληλίας:

Βήμα 9: Υπολογισμός συντελεστών ιδιομορφικής συμβολής των μεγεθών της τέμνουσας βάσης Q_b, ροπής ανατροπής M_b^{st}, μετακίνησης κορυφής u_1 και καμπτικής ροπής κορυφής στύλου 1 q

Ιδιομορφή n	$\gamma_n^{Q_b} = \frac{Q_{bn}^{st}}{Q_b^{st}}$	$\gamma_n^{M_b} = \frac{M_{bn}^{st}}{M_b^{st}}$	$\gamma_n^{u_1} = \frac{u_{1n}^{st}}{u^{st}}$	$\gamma_n^{q} = \frac{q_n^{st}}{q^{st}}$
1	-0.2754	0.8150	0.3571	0.0935
2	1.2754	0.1815	0.6429	0.9065
Άθροισμα	1	1	1	1

$\rightarrow$ Για τον καθορισμό με ικανοποιητική ακρίβεια της τέμνουσας βάσης Q_b, ροπής ανατροπής M_b^{st}, μετακίνησης κορυφής u_1 η θεώρηση **και των 2 ιδιομορφών της κατασκευής**

$\rightarrow$ Για τον καθορισμό με ικανοποιητική ακρίβεια της καμπτικής ροπής κορυφής στύλου 1 q απαιτείται η θεώρηση **της 2ης ιδιομορφής της κατασκευής**

Μέθοδος του Φάσματος Απόκρισης

Η μέθοδος επαλληλίας των ιδιομορφών δίδει την ολική δυναμική απόκριση ενός (κινηματικού ή εντατικού) μεγέθους $q(t)$:

$$q(t)=\sum_{n=1}^{N} q_n(t),\; q_n(t)=q_n^{st}\left(\omega_n^2\psi_n(t)\right)$$

*Με τη μέθοδο του φάσματος απόκρισης είναι δυνατό να εκτιμήσουμε πολύ γρήγορα τη **μέγιστη τιμή της απόλυτης τιμής του μεγέθους** max$|q(t)|$ χωρίς να υπολογίσουμε το $\psi_n(t)$ για κάθε χρονική στιγμή t:*

Υπολογισμός ακραίων τιμών των $q_n(t)$: $q_{n0}=q_n^{st}\max_t\left|\omega_n^2\psi_n(t)\right|$

Μέθοδος του Φάσματος Απόκρισης

Με τη μέθοδο του φάσματος απόκρισης είναι δυνατό να εκτιμήσουμε πολύ γρήγορα τη ***μέγιστη τιμή της απόλυτης τιμής του μεγέθους*** *max*$|q(t)|$ *χωρίς να υπολογίσουμε το* $\psi_n(t)$ *για κάθε χρονική στιγμή t:*

Υπολογισμός ακραίων τιμών των $q_n(t)$: $q_{n0} = q_n^{st} \max\limits_t \left|\omega_n^2 \psi_n(t)\right|$

Υπολογισμός q_n^{st}: Η τιμή του εντατικού μεγέθους που προκύπτει από τη στατική ανάλυση με τα φορτία $\mathbf{R}_n$ $\rightarrow$ Διατηρώ το πρόσημο που προκύπτει

$\max\limits_t \left|\omega_n^2 \psi_n(t)\right| = \omega_n^2 \max\limits_t \left|\psi_n(t)\right|$: Το $\max\limits_t \left|\psi_n(t)\right|$ προκύπτει από το φάσμα απόκρισης μονοβάθμιων ταλαντωτών $\ddot{\psi}_n + 2\xi_n \omega \dot{\psi}_n + \omega^2 \psi_n = f(t)$ $(m = 1, \xi = \xi_n, p(t) = f(t))$ θέτοντας ιδιοπερίοδο $T = T_n = 2\pi/\omega_n$ $\rightarrow$ Εξ'ορισμού προκύπτει θετική τιμή

Εκτίμηση του $max\left|q(t)\right|$ π.χ. μέσω του κανόνα της τετραγωνικής ρίζας του αθροίσματος (SRSS) ως: $max\left|q(t)\right| \simeq \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{N} q_{n0}^2}$

$\rightarrow$ Στον κανόνα SRSS, το πρόσημο του q_n^{st} δεν παίζει ρόλο

$\rightarrow$ Ο κανόνας SRSS είναι αξιόπιστος όταν οι ιδιοσυχνότητες της κατασκευής "ξεχωρίζουν" καλά μεταξύ τους