



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ & ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

ΣΤΑΤΙΚΗ ΣΥΜΠΥΚΝΩΣΗ

Ε.Ι. Σαπουντζάκης
Καθηγητής ΕΜΠ

**ΑΝΑΛΥΣΗ ΡΑΒΔΩΤΩΝ ΦΟΡΕΩΝ ΜΕ
ΜΗΤΡΩΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ**

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή
2. Φυσική ερμηνεία στατικής συμπύκνωσης
3. Ποιοτική διερεύνηση των δεικτών στιβαρότητας υπερστοιχείου
4. Μητρώο στιβαρότητας και δράσεις παγίωσης στοιχείου με ελαστικό κόμβο
5. Εφαρμογή – Ανάλυση επίπεδου ολόσωμου φορέα με διαφορετικές θεωρήσεις

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

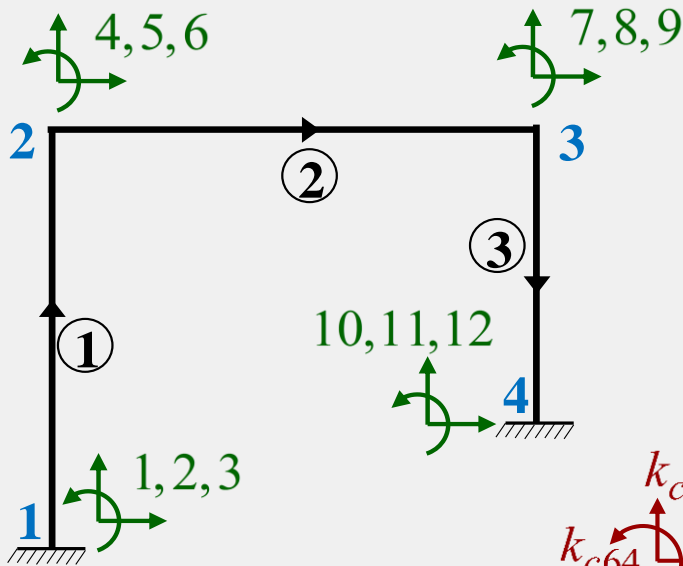
ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η διαδικασία **απαλοιφής** ορισμένων **συνιστωσών μετακινήσεων** των κόμβων φορέα έχει επικρατήσει να ονομάζεται "**στατική συμπύκνωση**". Στη στατική ανάλυση των κατασκευών, η στατική συμπύκνωση παρέχει σημαντικά υπολογιστικά πλεονεκτήματα, τόσο ως προς τον **χρόνο εκτέλεσης** της επίλυσης των εξισώσεων ισορροπίας, όσο και ως προς την **απαιτούμενη μνήμη του υπολογιστή** για την αποθήκευση των παραγόμενων μητρώων. Κατά την επίλυση της συμπυκνωμένης εξίσωσης **υπολογίζονται μόνο οι παραμένουσες (condensed) μετακινήσεις**, οι οποίες εκφράζουν τους ενεργούς βαθμούς ελευθερίας του συμπυκνωμένου φορέα. Το γεγονός ότι οι **παραμένουσες μετακινήσεις του αρχικού και του συμπυκνωμένου φορέα ταυτίζονται** σημαίνει ότι οι δύο φορείς είναι **ισοδύναμοι** ως προς τη στατική τους συμπεριφορά, χωρίς να επέρχεται καμιά τροποποίηση στον συμπυκνωμένο φορέα.

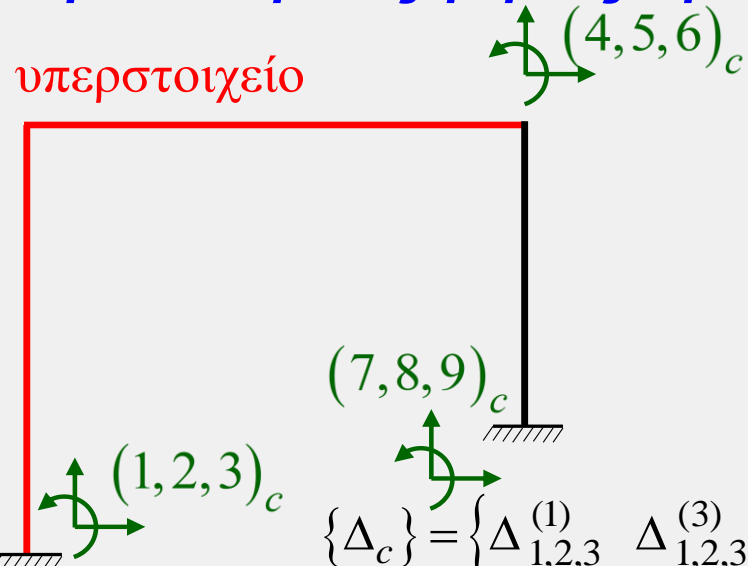
ΦΥΣΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΣΥΜΠΥΚΝΩΣΗΣ

ΦΥΣΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΣΥΜΠΥΚΝΩΣΗΣ

Αρχικός φορέας – β.ε.



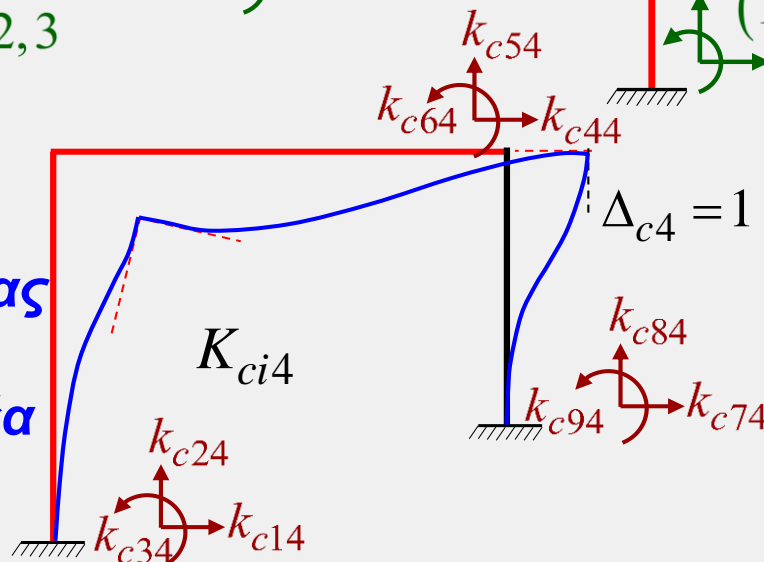
Συμπυκνωμένος φορέας – β.ε.



$$\{\Delta_c\} = \left\{ \Delta_{1,2,3}^{(1)} \quad \Delta_{1,2,3}^{(3)} \quad \Delta_{1,2,3}^{(4)} \right\}^T$$

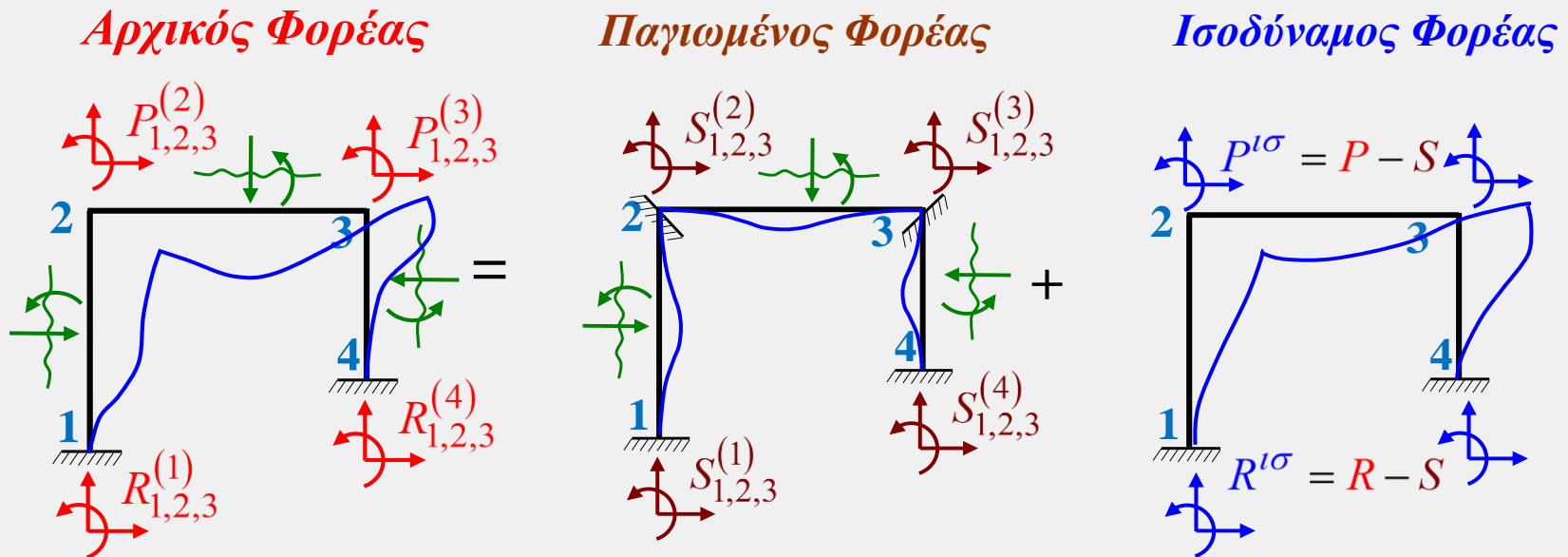
τα στοιχεία 1 και 2 του αρχικού φορέα θεωρούνται ως ένα **υπερστοιχείο** του συμπυκνωμένου φορέα. Ως υπερστοιχείο θεωρείται ένα σύνθετο στοιχείο αποτελούμενο από περισσότερα του ενός απλά στοιχεία με ακραίους μόνο ενεργούς βαθμούς ελευθερίας.

**Δείκτες
στιβαρότητας
συμπυκνω-
μένου φορέα**



ΦΥΣΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΣΥΜΠΥΚΝΩΣΗΣ

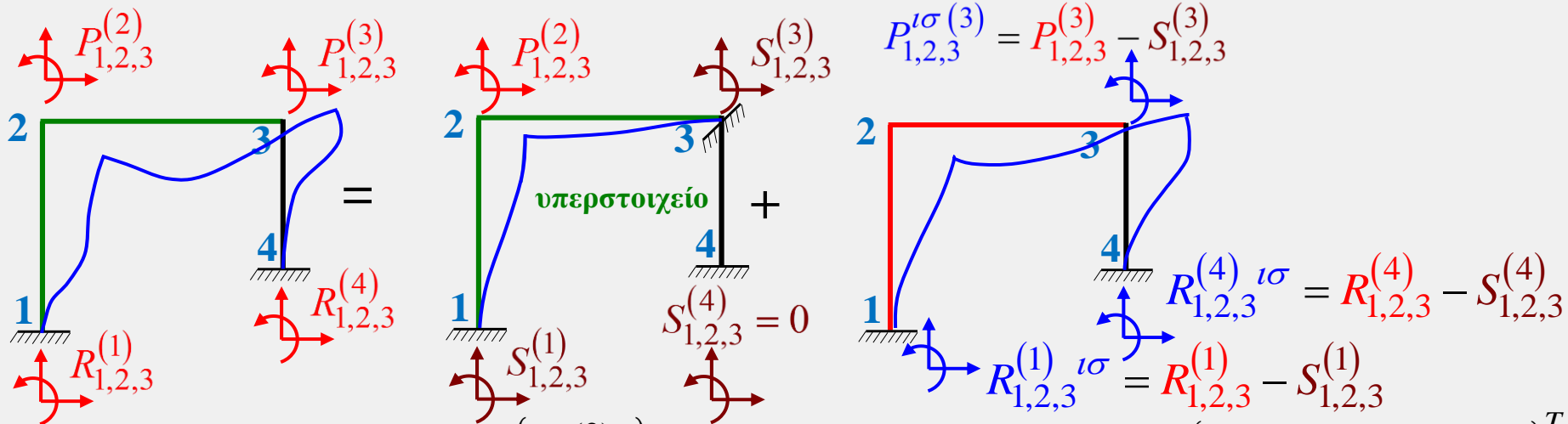
Σύγκριση στατικής συμπίκνωσης (ως προς τα επικόμβια φορτία) με την αρχή της επαλληλίας του αρχικού με τον παγιωμένο και τον ισοδύναμο φορέα



Το σχήμα παριστάνει τη διαδικασία της αντικατάστασης των ενδιάμεσων φορτίων, μέσω του παγιωμένου φορέα, στα επικόμβια φορτία του ισοδύναμου φορέα. Ο φορέας του σχήματος αποτελείται από τα στοιχεία (1,2), (2,3) και (3,4) και φορτίζεται με τα σημειούμενα εσωτερικά φορτία και τις επικόμβιες δράσεις.

ΦΥΣΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΣΥΜΠΥΚΝΩΣΗΣ

Σύγκριση στατικής συμπίκνωσης (ως προς τα επικόμβια φορτία) με την αρχή της επαλληλίας του αρχικού με τον παγιωμένο και τον ισοδύναμο φορέα



προς απαλοιφή β.ε. $\{\Delta_e\} = \left\{ \Delta_{1,2,3}^{(2)} \right\}$ παραμένοντες β.ε. $\{\Delta_c\} = \left\{ \Delta_{1,2,3}^{(1)} \quad \Delta_{1,2,3}^{(3)} \quad \Delta_{1,2,3}^{(4)} \right\}^T$

Ο συμπυκνωμένος φορέας αποτελείται από το υπερστοιχείο (1,2,3) και το στοιχείο (3,4) και φορτίζεται με τις εσωτερικές δράσεις $P_{1,2,3}^{(2)}$ (λόγω της συμπίκνωσης των 3 βαθμών ελευθερίας του κόμβου 2) και τις επικόμβιες δράσεις $P_{1,2,3}^{(3)}$. Οι ενεργοί βαθμοί ελευθερίας του συμπυκνωμένου φορέα είναι εκείνοι που αντιστοιχούν μόνο στους βαθμούς ελευθερίας του κόμβου 3. Κατά συνέπεια οι δράσεις $P_{1,2,3}^{(2)}$ θεωρούνται εσωτερική φόρτιση, η οποία πρέπει να μεταβιβαστεί στους ενεργούς βαθμούς ελευθερίας και τις στηρίξεις.

ΦΥΣΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΣΥΜΠΥΚΝΩΣΗΣ

Σύγκριση στατικής συμπίκνωσης (ως προς τα επικόμβια φορτία) με την αρχή της επαλληλίας του αρχικού με τον παγιωμένο και τον ισοδύναμο φορέα

Αρχική (αναδιατ.) εξίσωση ισορροπίας

$$\begin{bmatrix} \{P_{1,2,3}^{(2)}\} \\ \{R_{1,2,3}^{(1)}\} \\ \{P_{1,2,3}^{(3)}\} \\ \{R_{1,2,3}^{(4)}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ee}] & [K_{ec}] \\ [K_{ce}] & [K_{cc}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Delta_{1,2,3}^{(2)}\} \\ \{\Delta_{1,2,3}^{(1)}\} \\ \{\Delta_{1,2,3}^{(3)}\} \\ \{\Delta_{1,2,3}^{(4)}\} \end{bmatrix}$$

Επίλυση ως προς απαλοιφή β.ε.

$$\{\Delta_{1,2,3}^{(2)}\} = [K_{ee}]^{-1} \left\{ P_{1,2,3}^{(2)} - [K_{ec}] \begin{bmatrix} \{\Delta_{1,2,3}^{(1)}\} \\ \{\Delta_{1,2,3}^{(3)}\} \\ \{\Delta_{1,2,3}^{(4)}\} \end{bmatrix} \right\}$$

Αντικατάσταση (συμπυκνωμένη εξίσωση ισορροπίας)

$$\begin{bmatrix} \{R_{1,2,3}^{(1)}\} \\ \{P_{1,2,3}^{(3)}\} \\ \{R_{1,2,3}^{(4)}\} \end{bmatrix} - [K_{ce}] [K_{ee}]^{-1} \{P_{1,2,3}^{(2)}\} = \left[[K_{cc}] - [K_{ce}] [K_{ee}]^{-1} [K_{ec}] \right] \begin{bmatrix} \{\Delta_{1,2,3}^{(1)}\} \\ \{\Delta_{1,2,3}^{(3)}\} \\ \{\Delta_{1,2,3}^{(4)}\} \end{bmatrix}$$

Συμπυκνωμένη εξίσωση ισορροπίας $\{P_c\} = [K_c] \{\Delta_c\}$
 ο δεύτερος όρος του πρώτου μέλους της σχέσης είναι οι δράσεις παγίωσης του παγιωμένου φορέα, ενώ η διαφορά των δύο όρων του πρώτου μέλους αντιστοιχεί με τις ισοδύναμες δράσεις του ισοδύναμου φορέα.

$$\begin{bmatrix} \{R_{1,2,3}^{(1)}\} \\ \{P_{1,2,3}^{(3)}\} \\ \{R_{1,2,3}^{(4)}\} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \{S_{1,2,3}^{(1)}\} \\ \{S_{1,2,3}^{(3)}\} \\ \{S_{1,2,3}^{(4)}\} \end{bmatrix} = [K_c] \begin{bmatrix} \{\Delta_{1,2,3}^{(1)}\} \\ \{\Delta_{1,2,3}^{(3)}\} \\ \{\Delta_{1,2,3}^{(4)}\} \end{bmatrix}$$

ΦΥΣΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΣΥΜΠΥΚΝΩΣΗΣ

Σύγκριση στατικής συμπίκνωσης (ως προς τα επικόμβια φορτία) με την αρχή της επαλληλίας του αρχικού με τον παγιωμένο και τον ισοδύναμο φορέα

Κατά συνέπεια οι δράσεις που αντιστοιχούν στους υπό συμπίκνωση βαθμούς ελευθερίας παίζουν τον ρόλο των εσωτερικών δράσεων σε ένα φορέα με ενεργούς βαθμούς ελευθερίας τους παραμένοντες μετά τη στατική συμπίκνωση. Έτσι, οι τελικές δράσεις της στατικής συμπίκνωσης που υπολογίζονται αλγεβρικά από τη παρακάτω σχέση, αντιστοιχούν με την επικόμβια φόρτιση ενός ισοδύναμου φορέα με βαθμούς ελευθερίας τους παραμένοντες μετά τη στατική συμπίκνωση.

$$\{P_c\} = \{P_{cc}\} - [K_{ce}][K_{ee}]^{-1} \{P_e\}$$

ΠΟΙΟΤΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΩΝ ΔΕΙΚΤΩΝ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΥΠΕΡΣΤΟΙΧΕΙΟΥ

ΠΟΙΟΤΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΩΝ ΔΕΙΚΤΩΝ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΥΠΕΡΣΤΟΙΧΕΙΟΥ

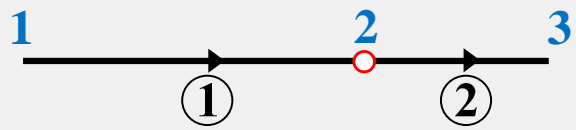
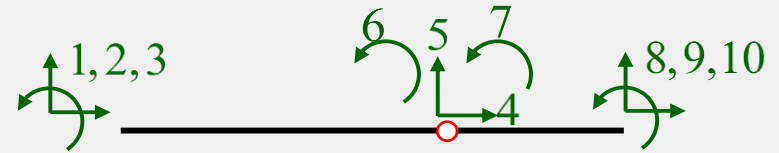


Το μητρώο στιβαρότητας του υπερστοιχείου μπορεί να προκύψει με τέσσερις διαφορετικές θεωρήσεις:

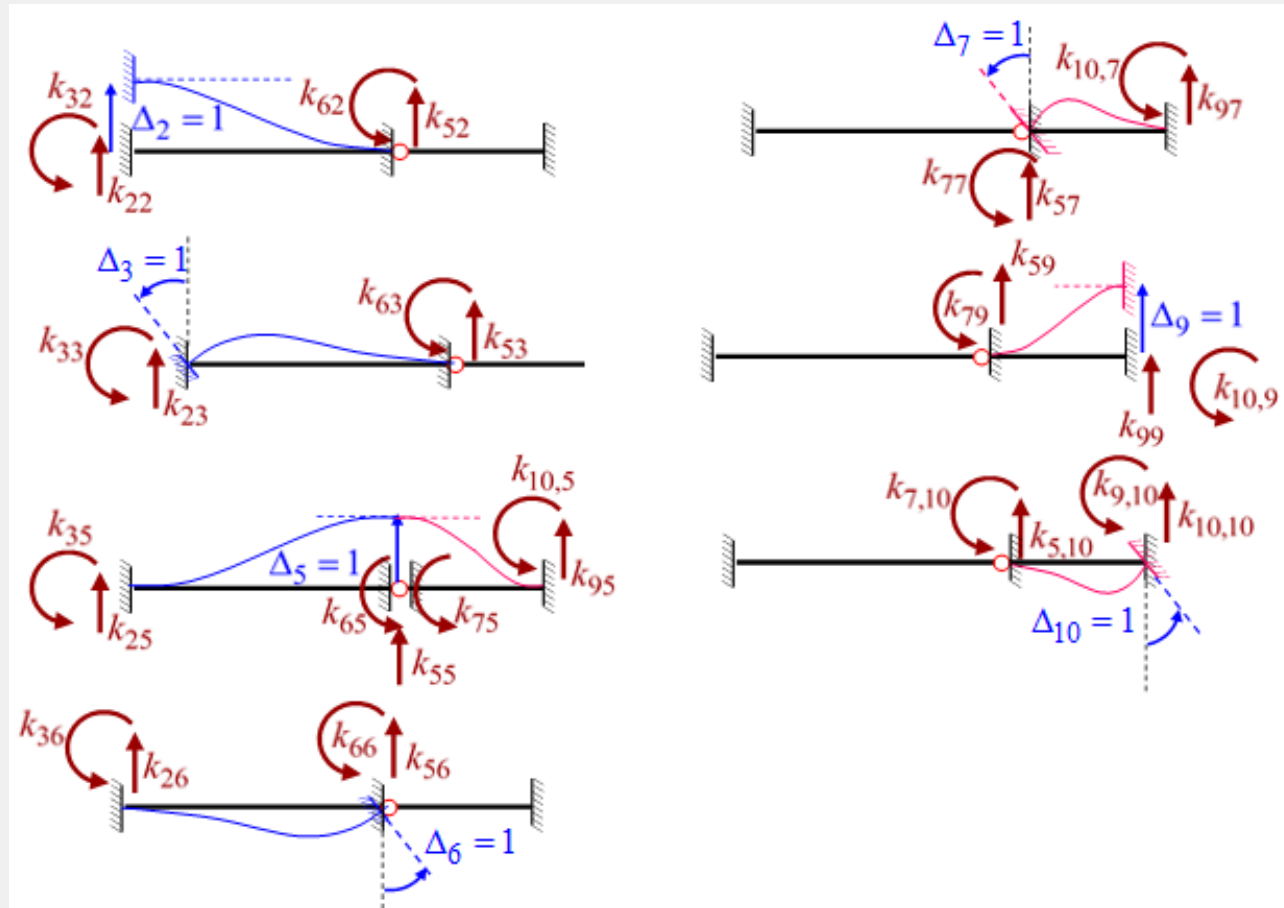
- i. θεώρηση **συνδυασμένου κόμβου στον κόμβο 2**,
- ii. θεώρηση **τροποποιημένου μητρώου στιβαρότητας στο στοιχείο 1 ή στο στοιχείο 2**,
- iii. θεώρηση **τροποποιημένων μητρώων στιβαρότητας και στα δύο στοιχεία 1 και 2**,
- iv. εφαρμογή στατικής συμπίκνωσης και θεώρηση **ενός υπερστοιχείου (1,2,3)**.

ΠΟΙΟΤΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΩΝ ΔΕΙΚΤΩΝ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΥΠΕΡΣΤΟΙΧΕΙΟΥ

i) **θεώρηση συνδυασμένου κόμβου στον κόμβο 2**

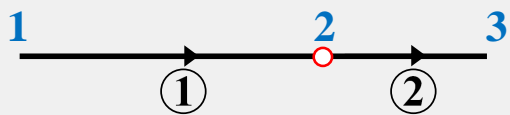


Δείκτες
στιβαρότητας με
θεώρηση
συνδυασμένου
κόμβου

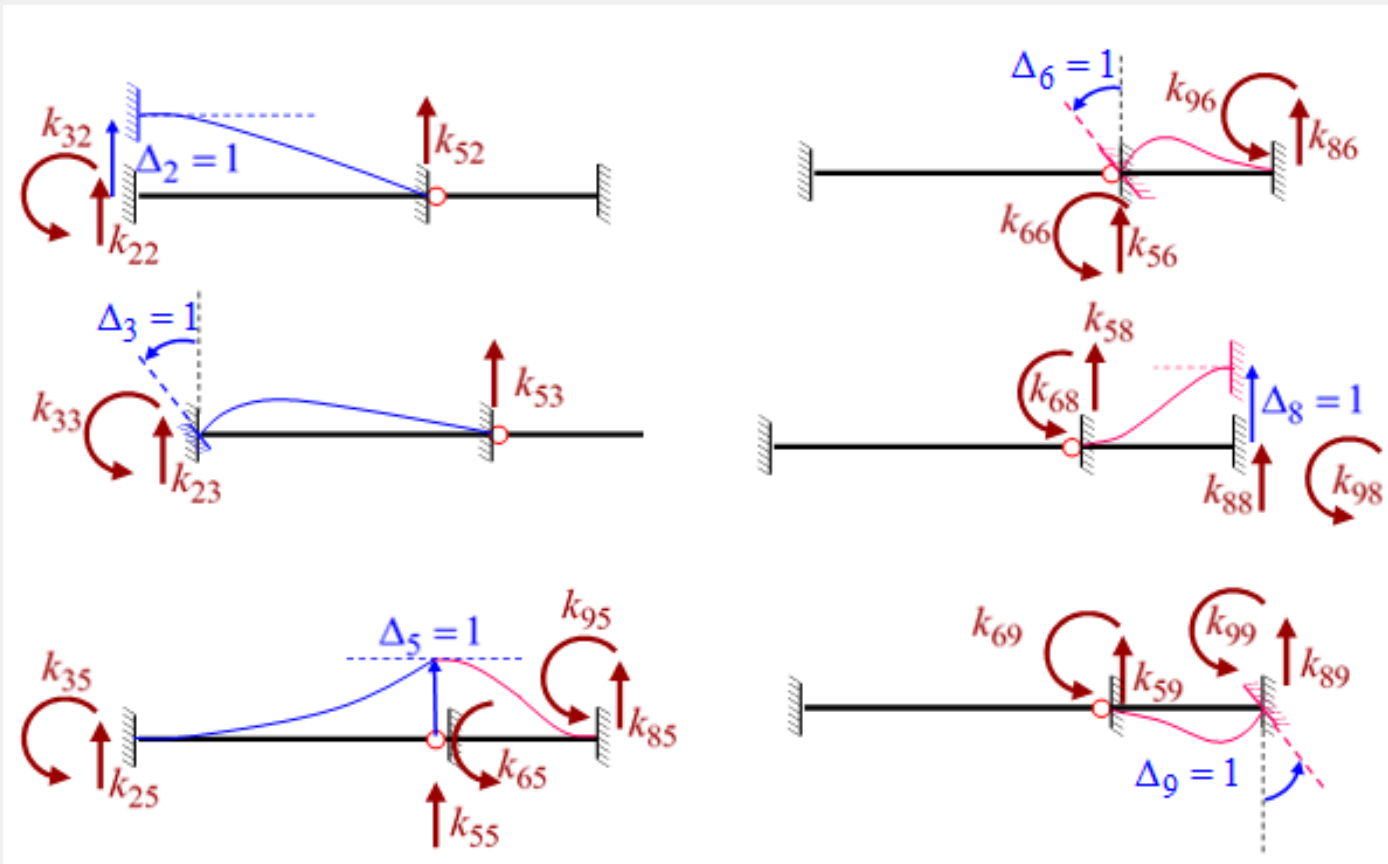
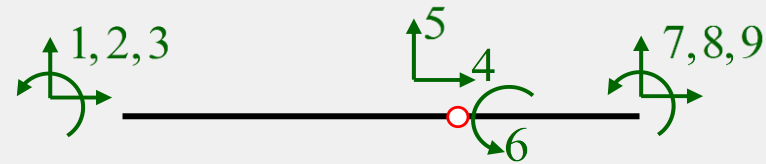


ΠΟΙΟΤΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΩΝ ΔΕΙΚΤΩΝ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΥΠΕΡΣΤΟΙΧΕΙΟΥ

ii) **Θεώρηση τροποποιημένου μητρώου στιβαρότητας στο στοιχείο 1**

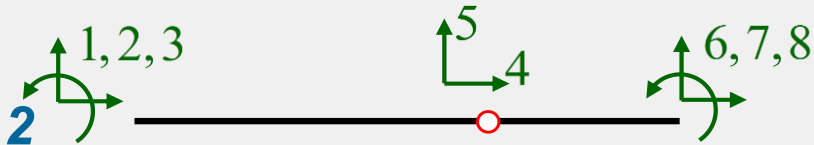
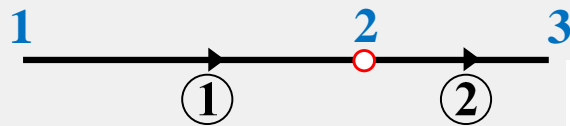


Δείκτες στιβαρότητας με θεώρηση τροποποιημένου μητρώου στιβαρότητας στο στοιχείο 1

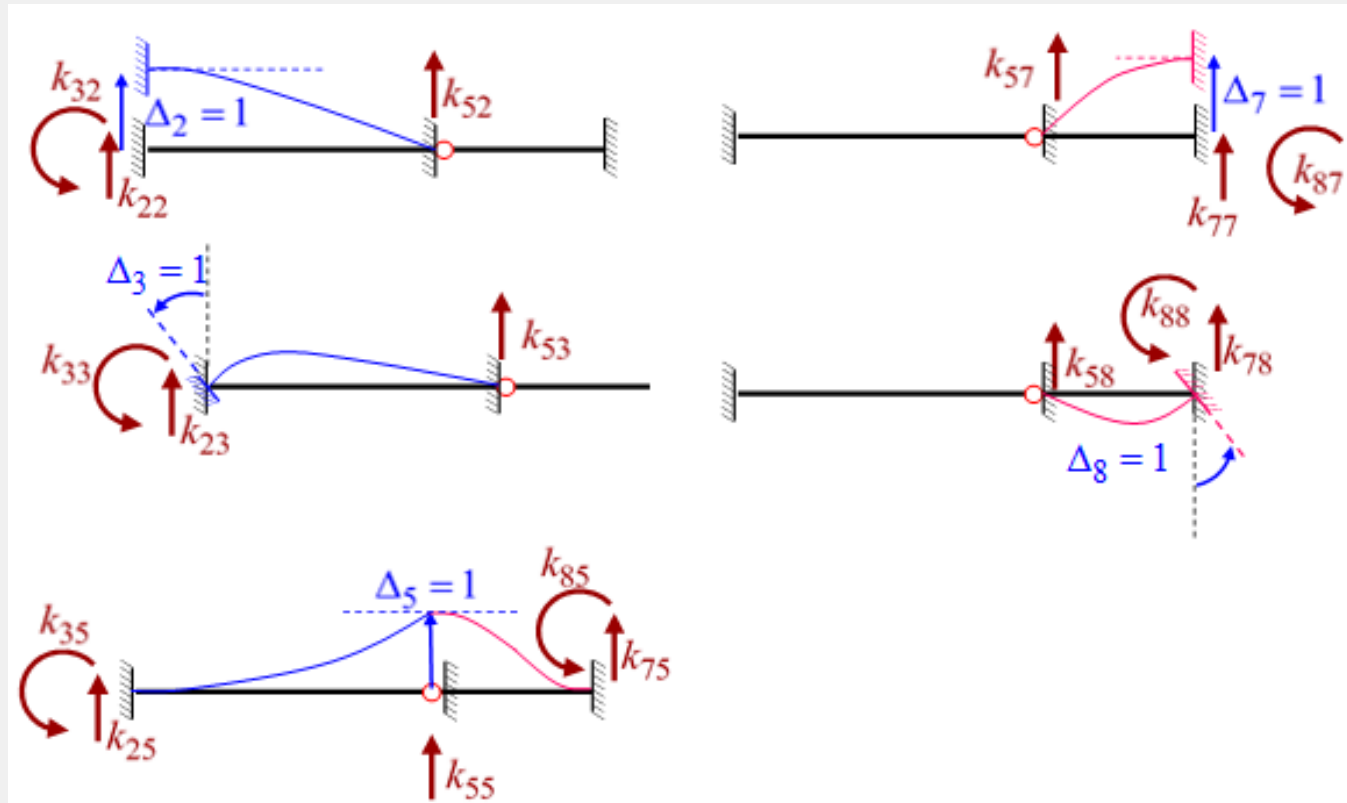


ΠΟΙΟΤΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΩΝ ΔΕΙΚΤΩΝ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΥΠΕΡΣΤΟΙΧΕΙΟΥ

iii) Θεώρηση τροποποιημένων μητρώων στιβαρότητας και στα δύο στοιχεία 1 και 2

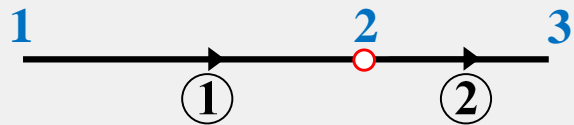


Δείκτες στιβαρότητας με θεώρηση τροποποιημένων μητρώων στιβαρότητας και στα δύο στοιχεία 1 και 2

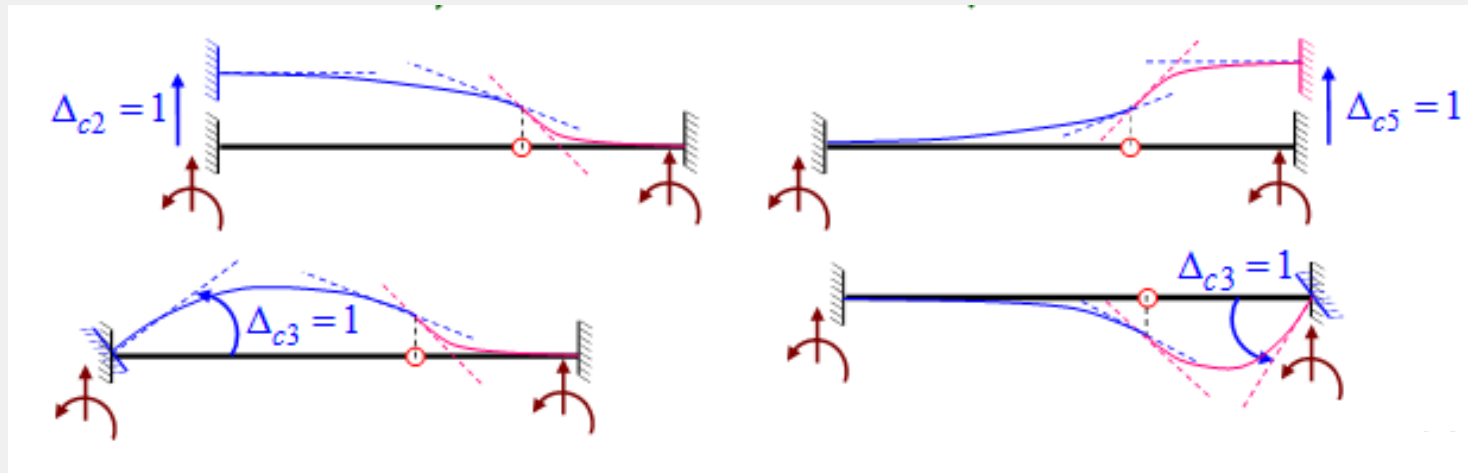


ΠΟΙΟΤΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΩΝ ΔΕΙΚΤΩΝ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΥΠΕΡΣΤΟΙΧΕΙΟΥ

iv) Θεώρηση ενός υπερστοιχείου (1,2,3) $\begin{matrix} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{matrix} (1,2,3)_c$ $\begin{matrix} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{matrix} (4,5,6)_c$



Δείκτες
στιβαρότητας με
θεώρηση ενός
υπερστοιχείου
(1,2,3)



Το τελικό μητρώο στιβαρότητας του υπερστοιχείου μπορεί να προκύψει είτε από τη στατική συμπύκνωση των τεσσάρων βαθμών ελευθερίας του κόμβου 2 στο μητρώο στιβαρότητας με τον συνδυασμένο κόμβο, είτε από τη στατική συμπύκνωση των βαθμών ελευθερίας 4, 5 του κόμβου 2 στο μητρώο στιβαρότητας που προκύπτει από τη σύνθεση των τροποποιημένων μητρώων στιβαρότητας των στοιχείων 1, 2.

ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΔΡΑΣΕΙΣ ΠΑΓΙΩΣΗΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΜΕ ΕΛΑΣΤΙΚΟ ΚΟΜΒΟ

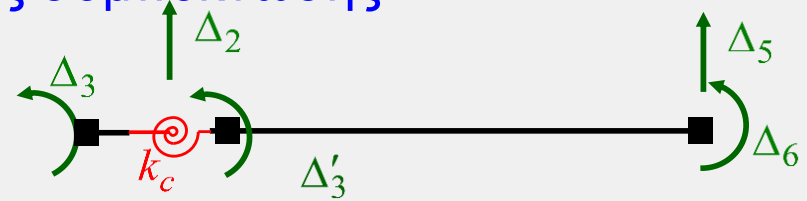
ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΔΡΑΣΕΙΣ ΠΑΓΙΩΣΗΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΜΕ ΕΛΑΣΤΙΚΟ ΚΟΜΒΟ

Υπολογισμός του μητρώου στιβαρότητας στοιχείου με ελαστικούς κόμβους στα άκρα του με τη διαδικασία της στατικής συμπίκνωσης

Αρχική εξίσωση ισορροπίας

$$\begin{Bmatrix} P_2 \\ M_3 \\ M_{3'} \\ P_5 \\ M_6 \end{Bmatrix} = \begin{matrix} 2 & 3 & 3' & 5 & 6 \\ \begin{bmatrix} k_{22} & 0 & k_{23} & k_{25} & k_{26} \\ 0 & k_c & -k_c & 0 & 0 \\ k_{32} & -k_c & k_{33} + k_c & k_{35} & k_{36} \\ k_{52} & 0 & k_{53} & k_{55} & k_{56} \\ k_{62} & 0 & k_{63} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{Bmatrix} \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_{3'} \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{Bmatrix}$$

$$[K_c] = [K_{cc}] - [K_{ce}] [K_{ee}]^{-1} [K_{ec}]$$



Συμπυκνωμένο μητρώο στιβαρότητας

$$[K_c] = \begin{matrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ \begin{bmatrix} k_{22} & 0 & k_{25} & k_{26} \\ 0 & k_c & 0 & 0 \\ k_{52} & 0 & k_{55} & k_{56} \\ k_{62} & 0 & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} - \begin{Bmatrix} k_{23} \\ -k_c \\ k_{53} \\ k_{63} \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{k_{33} + k_c} \cdot \{k_{32} \quad -k_c \quad k_{35} \quad k_{36}\} \end{matrix} =$$

$$\begin{matrix} [K_{cc}] & [K_{ce}] & [K_{ee}]^{-1} & [K_{ec}] \end{matrix}$$

Αναδιάταξη - Στατική συμπίκνωση β.ε. 3'

$$= \frac{1}{k_{33} + k_c} \cdot \begin{matrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ \begin{bmatrix} (k_{33} + k_c)k_{22} - k_{23}k_{32} & k_c k_{23} & (k_{33} + k_c)k_{25} - k_{23}k_{35} & (k_{33} + k_c)k_{26} - k_{23}k_{36} \\ k_c k_{32} & k_c k_{33} & k_c k_{35} & k_c k_{36} \\ (k_{33} + k_c)k_{52} - k_{53}k_{32} & k_c & (k_{33} + k_c)k_{55} - k_{53}k_{35} & (k_{33} + k_c)k_{56} - k_{53}k_{36} \\ (k_{33} + k_c)k_{62} - k_{63}k_{32} & k_c & (k_{33} + k_c)k_{65} - k_{63}k_{35} & (k_{33} + k_c)k_{66} - k_{63}k_{36} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

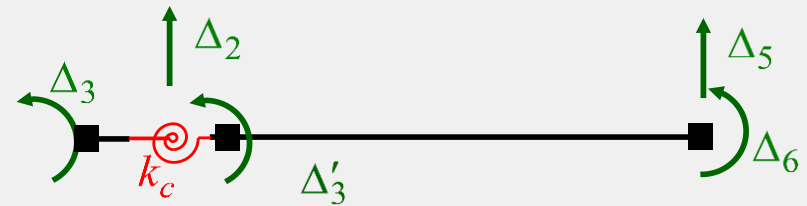
ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΔΡΑΣΕΙΣ ΠΑΓΙΩΣΗΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΜΕ ΕΛΑΣΤΙΚΟ ΚΟΜΒΟ

Υπολογισμός των δράσεων παγίωσης στοιχείου με ελαστικούς κόμβους στα άκρα του με τη διαδικασία της στατικής συμπύκνωσης

Αρχική εξίσωση ισορροπίας

$$\begin{Bmatrix} P_2 \\ M_3 \\ M_{3'} \\ P_5 \\ M_6 \end{Bmatrix} = \begin{matrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{3'} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{6} \end{matrix} \begin{bmatrix} k_{22} & 0 & k_{23} & k_{25} & k_{26} \\ 0 & k_c & -k_c & 0 & 0 \\ k_{32} & -k_c & k_{33} + k_c & k_{35} & k_{36} \\ k_{52} & 0 & k_{53} & k_{55} & k_{56} \\ k_{62} & 0 & k_{63} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_{3'} \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{Bmatrix}$$

$$\{S_c\} = [K_{ce}] [K_{ee}]^{-1} \{P_e\}$$



Συμπυκνωμένες δράσεις παγίωσης

$$\{S_c\} = - \begin{Bmatrix} k_{23} \\ -k_c \\ k_{53} \\ k_{63} \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{k_{33} + k_c} \cdot \{P_e\}$$

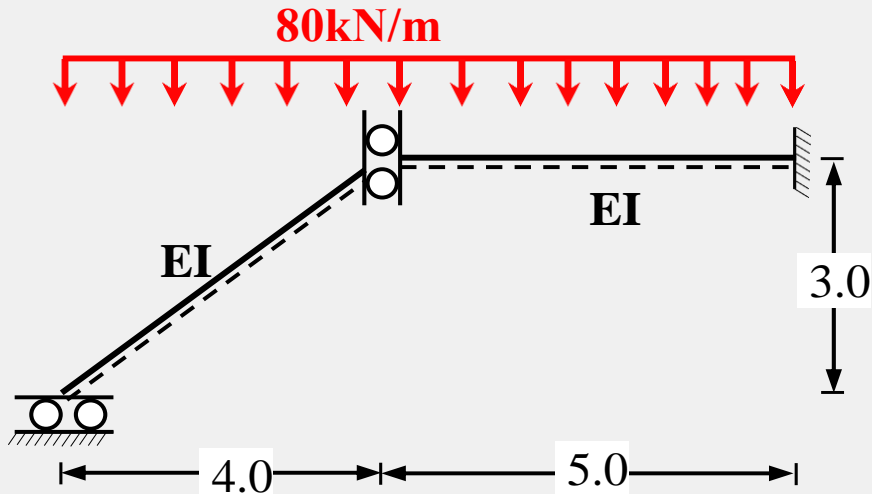
$$[K_{ce}] \quad [K_{ee}]^{-1}$$

Αναδιάταξη - Στατική συμπύκνωση β.ε. 3'

$$\begin{bmatrix} \{P_e = -S_e\} \\ \{P_{cc}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ee}] & [K_{ec}] \\ [K_{ce}] & [K_{cc}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Delta_e\} \\ \{\Delta_c = 0\} \end{bmatrix}$$

*ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ
ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΕΣ
ΘΕΩΡΗΣΕΙΣ*

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΕΣ ΘΕΩΡΗΣΕΙΣ

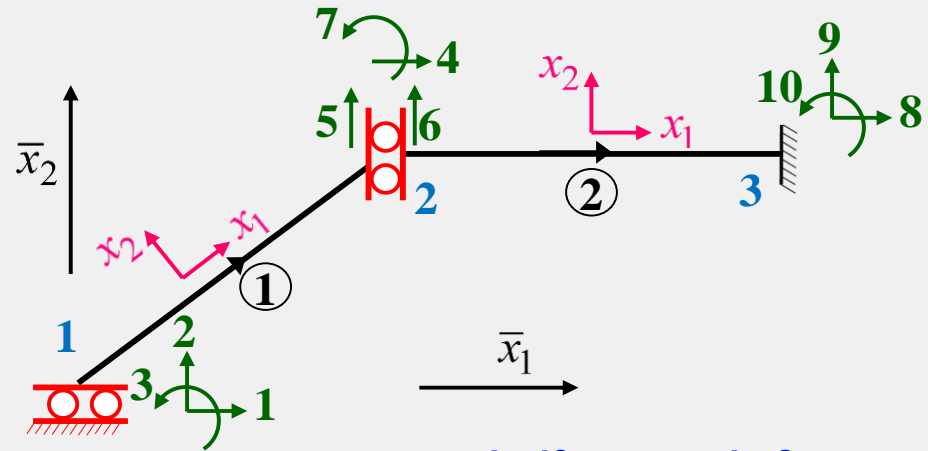


Εξεταζόμενο πλαίσιο

$$A = 0.30 \times 0.60 \text{ m}^2 \quad E = 2.1 \times 10^7 \text{ kN / m}^2$$

Στοιχεία γεωμετρίας και υλικού μελών

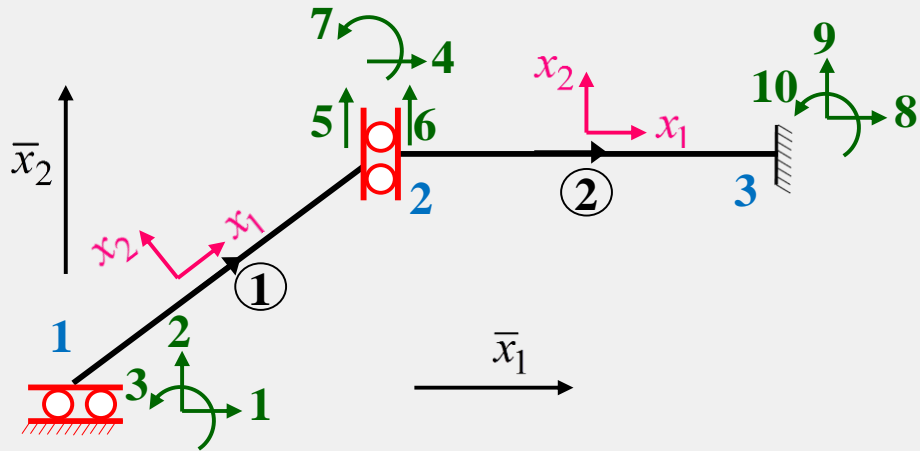
- Μέλος(1): $E^1 = 2.1 \times 10^7 \text{ kN / m}^2$, $A^1 = 0.18 \text{ m}^2$, $I^1 = 0.0054 \text{ m}^4$, $L^1 = 5.0 \text{ m}$
- Μέλος(2): $E^2 = 2.1 \times 10^7 \text{ kN / m}^2$, $A^2 = 0.18 \text{ m}^2$, $I^2 = 0.0054 \text{ m}^4$, $L^2 = 5.0 \text{ m}$



Αρίθμηση κόμβων, μελών, καθολικό και τοπικά συστήματα αξόνων, βαθμοί ελευθερίας

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΕΣ ΘΕΩΡΗΣΕΙΣ

$$[k^1] = EI \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ 6.667 & 0 & 0 & -6.667 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.240 & 0 & -0.096 & 0.240 \\ 0 & 0.240 & 0.800 & 0 & -0.240 & 0.400 \\ -6.667 & 0 & 0 & 6.667 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & -0.240 & 0 & 0.096 & -0.240 \\ 0 & 0.240 & 0.400 & 0 & -0.240 & 0.800 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{matrix}$$



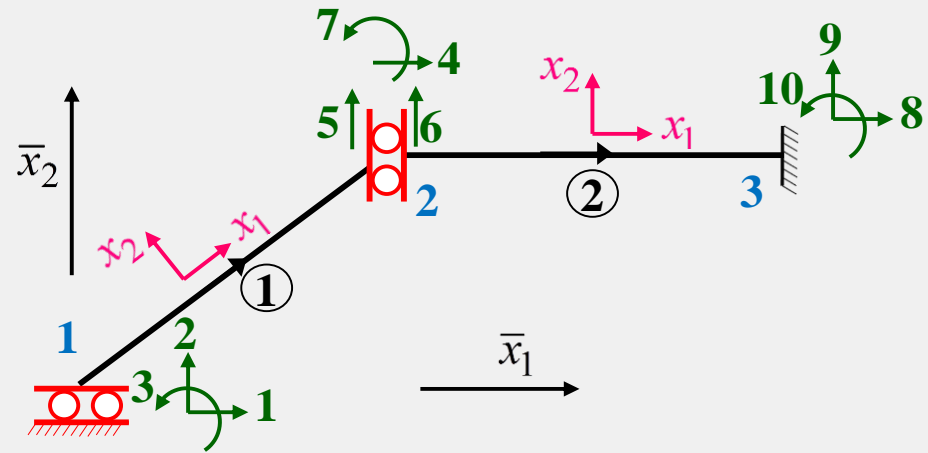
$$[k^2] = EI \begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6.667 & 0 & 0 & -6.667 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.240 & 0 & -0.096 & 0.240 \\ 0 & 0.240 & 0.800 & 0 & -0.240 & 0.400 \\ -6.667 & 0 & 0 & 6.667 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & -0.240 & 0 & 0.096 & -0.240 \\ 0 & 0.240 & 0.400 & 0 & -0.240 & 0.800 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

Τοπικά μητρώα στιβαρότητας μελών

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΕΣ ΘΕΩΡΗΣΕΙΣ

Μητρώα μετασχηματισμού μελών $\rightarrow \theta^{1j} = \theta^{1k} = 36,87^\circ$ $\theta^{2j} = \theta^{2k} = 0^\circ$ $\rightarrow [\Lambda_{PF}^i]$

$$[\Lambda_{PF}^1] = \begin{bmatrix} 0.80 & 0.6 & 0 & & & \\ -0.6 & 0.80 & 0 & & & [0] \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \hline & & & 0.80 & 0.6 & 0 \\ & [0] & & -0.6 & 0.80 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



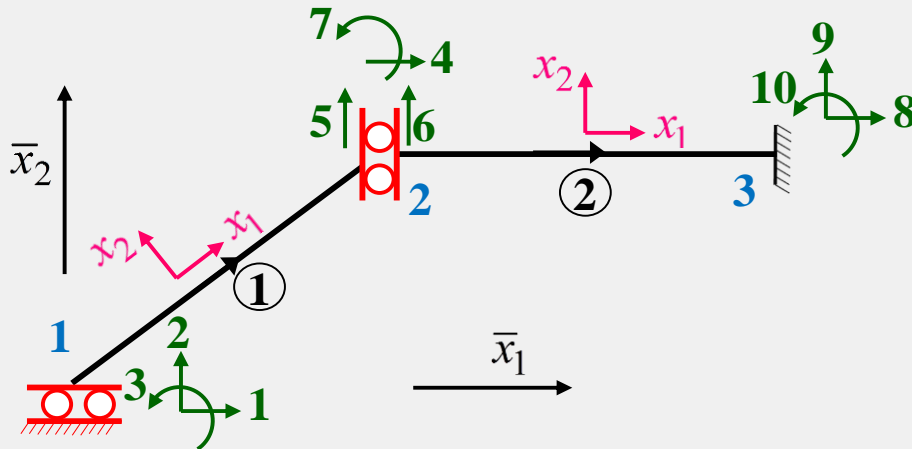
Καθολικά μητρώα σιβαρότητας μελών

$$[\Lambda_{PF}^2] = [I]$$

$$[\bar{k}^{-1}] = EI \begin{bmatrix} 4.301 & 3.154 & -0.144 & -4.301 & -3.154 & -0.144 & \mathbf{1} \\ 3.154 & 2.461 & 0.192 & -3.154 & -2.461 & 0.192 & \mathbf{2} \\ -0.144 & 0.192 & 0.800 & 0.144 & -0.192 & 0.400 & \mathbf{3} \\ -4.301 & -3.154 & 0.144 & 4.301 & 3.154 & 0.144 & \mathbf{4} \\ -3.154 & -2.461 & -0.192 & 3.154 & 2.461 & -0.192 & \mathbf{5} \\ -0.144 & 0.192 & 0.400 & 0.144 & -0.192 & 0.800 & \mathbf{7} \end{bmatrix}$$

$$[\bar{k}^{-2}] = EI \begin{bmatrix} 6.667 & 0 & 0 & -6.667 & 0 & 0 & \mathbf{4} \\ 0 & 0.096 & 0.240 & 0 & -0.096 & 0.240 & \mathbf{6} \\ 0 & 0.240 & 0.800 & 0 & -0.240 & 0.400 & \mathbf{7} \\ -6.667 & 0 & 0 & 6.667 & 0 & 0 & \mathbf{8} \\ 0 & -0.096 & -0.240 & 0 & 0.096 & -0.240 & \mathbf{9} \\ 0 & 0.240 & 0.400 & 0 & -0.240 & 0.800 & \mathbf{10} \end{bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΕΣ ΘΕΩΡΗΣΕΙΣ



Η ανάλυση του επίπεδου ολόσωμου φορέα μπορεί να επιτευχθεί με τέσσερις διαφορετικές θεωρήσεις:

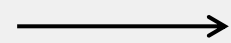
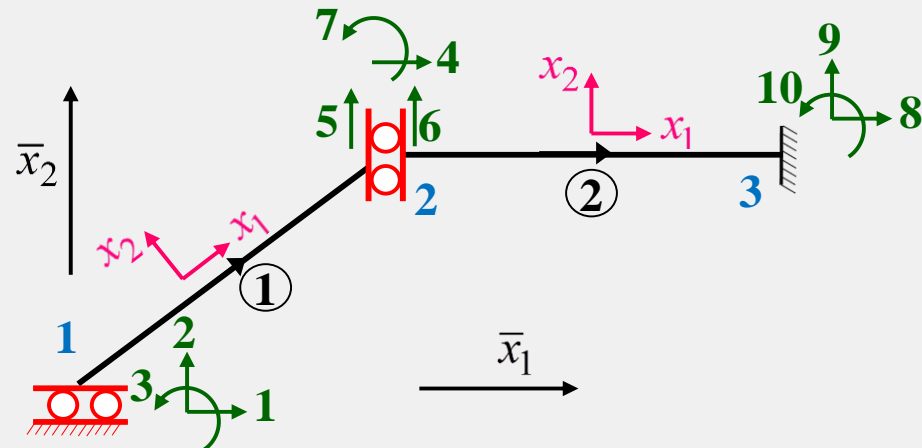
- θεώρηση **συνδυασμένου κόμβου** στον κόμβο 2,
- θεώρηση **τροποποιημένου μητρώου στιβαρότητας** στο στοιχείο 1 ή στο στοιχείο 2,
- θεώρηση **τροποποιημένων μητρώων στιβαρότητας** και στα δύο **στοιχεία** 1 και 2,
- εφαρμογή στατικής συμπύκνωσης και θεώρηση **ενός υπερστοιχείου** (1,2,3).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ - Θεώρηση συνδυασμένου κόμβου στον κόμβο 2

Μόρφωση καθολικού μητρώου στιβαρότητας πλαισίου

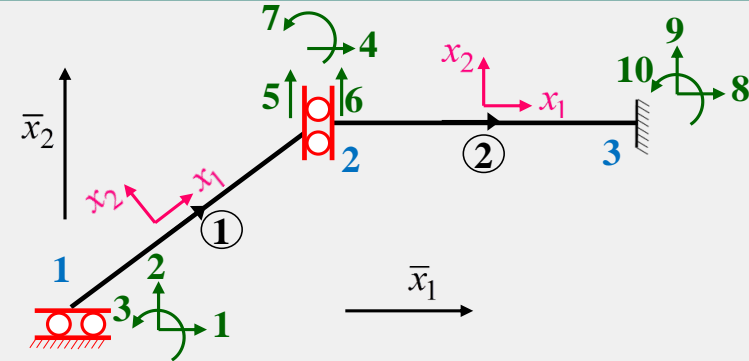
Στο εξεταζόμενο πλαίσιο, λόγω της παρουσίας του συνδυασμένου κόμβου, η σύνθεση των υπομητρώων των καθολικών μητρώων στιβαρότητας των μελών για τον προσδιορισμό του καθολικού μητρώου στιβαρότητας του φορέα **καθίσταται δυσχερής** και η **σύνθεση αυτή θα γίνει στοιχείο – στοιχείο**.

Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη τους καθολικούς βαθμούς ελευθερίας στους οποίους αντιστοιχούν τα στοιχεία των καθολικών μητρώων στιβαρότητας των μελών, το καθολικό μητρώο στιβαρότητας του πλαισίου προκύπτει ως



ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ - Θεώρηση συνδυασμένου κόμβου στον κόμβο 2

**Μόρφωση καθολικού μητρώου
στιβαρότητας πλαισίου**



	#1			#2				#3			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$[K] = EI$	4,301	3,154	-0,144	-4,301	-3,154	0,000	-0,144	0,000	0,000	0,000	1
	3,154	2,461	0,192	-3,154	-2,461	0,000	0,192	0,000	0,000	0,000	2
	-0,144	0,192	0,800	0,144	-0,192	0,000	0,400	0,000	0,000	0,000	3
	-4,301	-3,154	0,144	10,968	3,154	0,000	0,144	-6,667	0,000	0,000	4
	-3,154	-2,461	-0,192	3,154	2,461	0,000	-0,192	0,000	0,000	0,000	5
	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,096	0,240	0,000	-0,096	0,240	6
	-0,144	0,192	0,400	0,144	-0,192	0,240	1,600	0,000	-0,240	0,400	7
	0,000	0,000	0,000	-6,667	0,000	0,000	0,000	6,667	0,000	0,000	8
	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-0,096	-0,240	0,000	0,096	-0,240	9
	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,240	0,400	0,000	-0,240	0,800	10

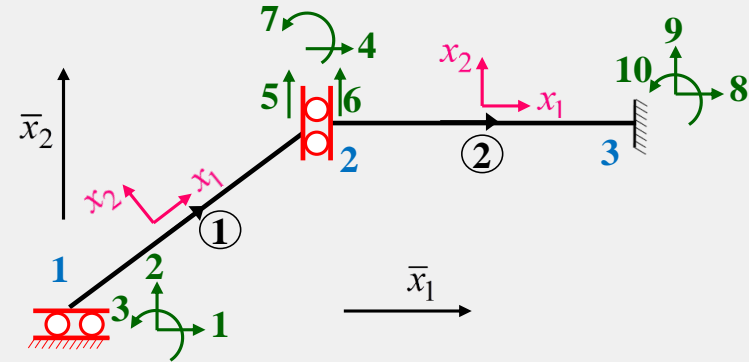
**Καθολικό μητρώο
στιβαρότητας
πλαισίου**

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ - Θεώρηση συνδυασμένου κόμβου στον κόμβο 2

Αναδιατεταγμένο καθολικό μητρώο
στιβαρότητας πλαισίου (1^η τροποποίηση)

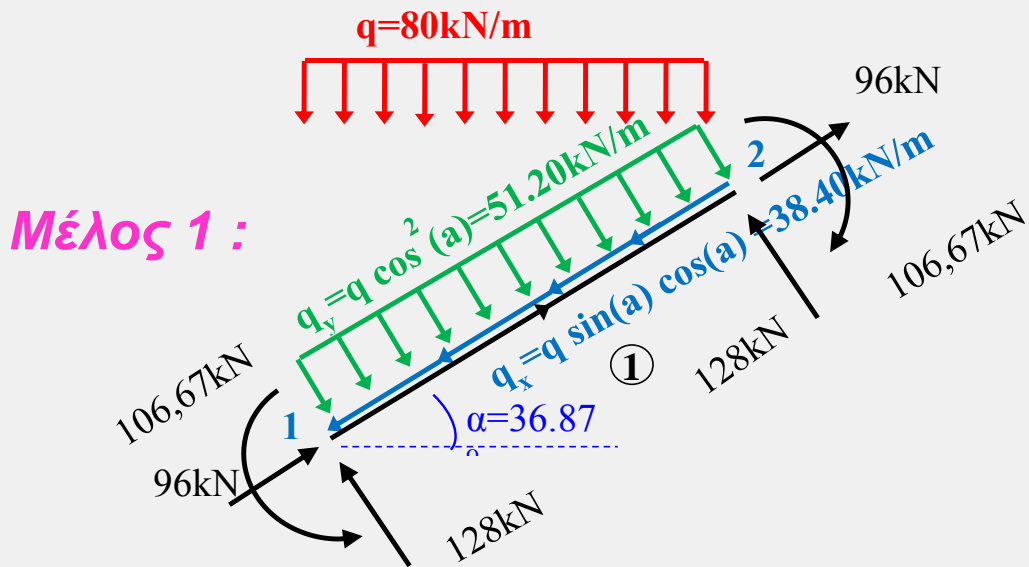
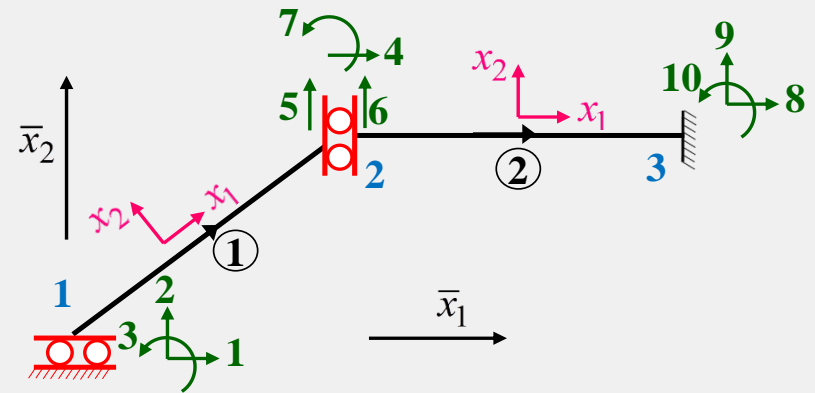
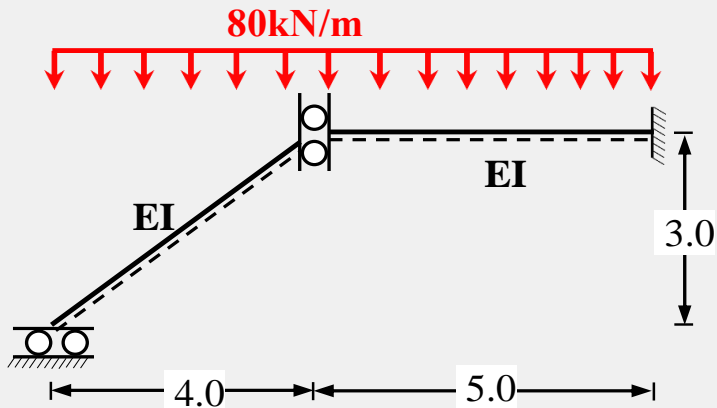
$$[\bar{K}_m] = [V][\bar{K}][V]^T = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{ff}] & [\bar{K}_{fs}] \\ [\bar{K}_{sf}] & [\bar{K}_{ss}] \end{bmatrix} =$$

	1	4	5	6	7	2	3	8	9	10	
= EI	4,301	-4,301	-3,154	0,000	-0,144	3,154	-0,144	0,000	0,000	0,000	1
	-4,301	10,968	3,154	0,000	0,144	-3,154	0,144	-6,667	0,000	0,000	4
	-3,154	3,154	2,461	0,000	-0,192	-2,461	-0,192	0,000	0,000	0,000	5
	0,000	0,000	0,000	0,096	0,240	0,000	0,000	0,000	-0,096	0,240	6
	-0,144	0,144	-0,192	0,240	1,600	0,192	0,400	0,000	-0,240	0,400	7
	3,154	-3,154	-2,461	0,000	0,192	2,461	0,192	0,000	0,000	0,000	2
	-0,144	0,144	-0,192	0,000	0,400	0,192	0,800	0,000	0,000	0,000	3
	0,000	-6,667	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	6,667	0,000	0,000	8
	0,000	0,000	0,000	-0,096	-0,240	0,000	0,000	0,000	0,096	-0,240	9
	0,000	0,000	0,000	0,240	0,400	0,000	0,000	0,000	-0,240	0,800	10



ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ - Θεώρηση συνδυασμένου κόμβου στον κόμβο 2

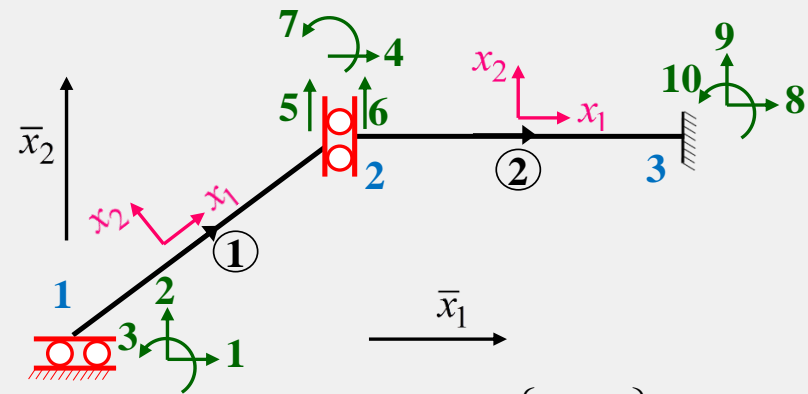
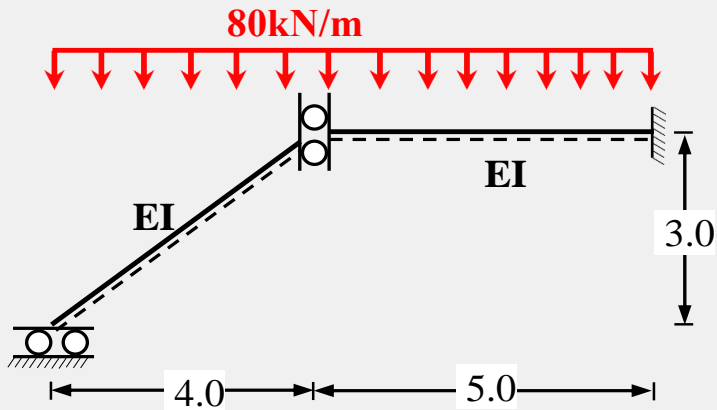
Ανάλυση παγιωμένου φορέα – Τοπικές ακραίες δράσεις μελών



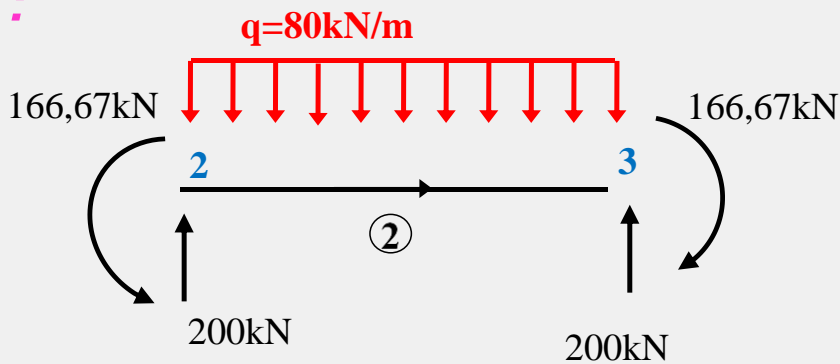
$$\{A_r^1\} = \begin{bmatrix} \{A_r^{1j}\} \\ \{A_r^{1k}\} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{1j} \\ F_2^{1j} \\ M_3^{1j} \\ F_1^{1k} \\ F_2^{1k} \\ M_3^{1k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 96 \\ 128 \\ 106.67 \\ \hline 96 \\ 128 \\ -106.67 \end{Bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ - Θεώρηση συνδυασμένου κόμβου στον κόμβο 2

Ανάλυση παγιωμένου φορέα – Τοπικές ακραίες δράσεις μελών



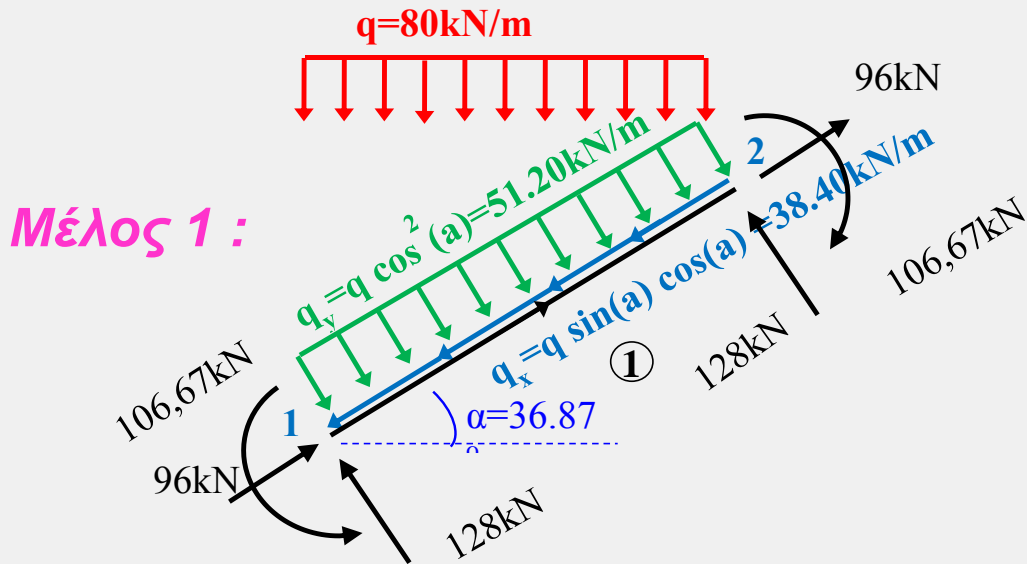
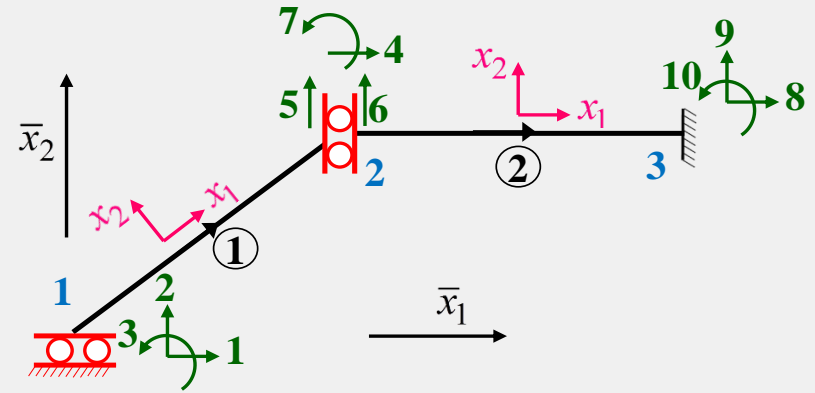
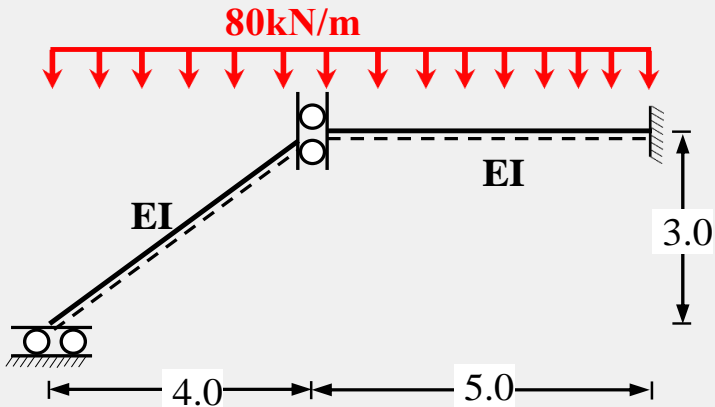
Μέλος 2 :



$$\{A_r^2\} = \begin{bmatrix} \{A_r^{2j}\} \\ \{A_r^{2k}\} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{2j} \\ F_2^{2j} \\ M_3^{2j} \\ \hline F_1^{2k} \\ F_2^{2k} \\ M_3^{2k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 200 \\ 166.67 \\ \hline 0 \\ 200 \\ -166.67 \end{Bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ - Θεώρηση συνδυασμένου κόμβου στον κόμβο 2

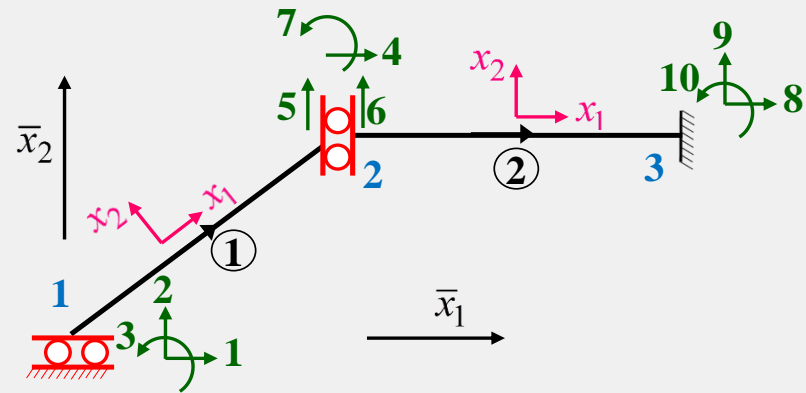
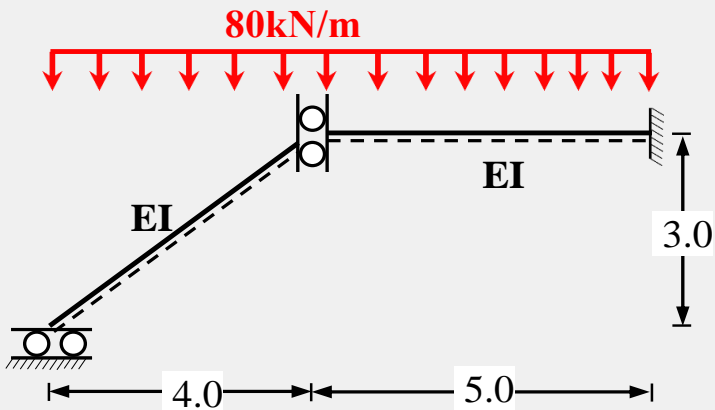
Ανάλυση παγιωμένου φορέα – Καθολικές ακραίες δράσεις μελών



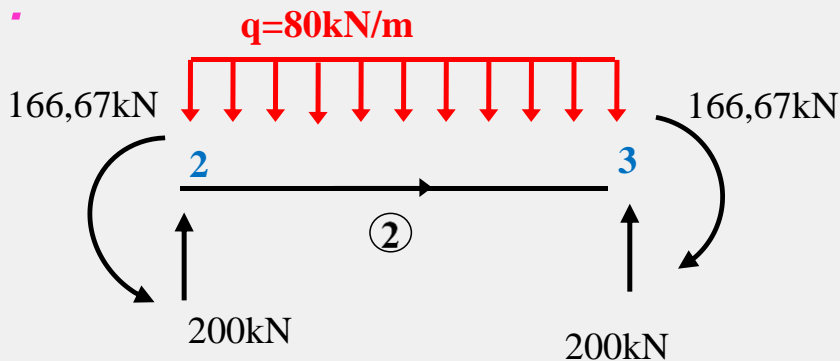
$$\left\{ \bar{A}_r^{-1} \right\} = \left[\Lambda_{PF}^1 \right]^T \left\{ A_r^1 \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0.00 \\ 160 \\ 106.67 \\ \dots \\ 0.00 \\ 160 \\ -106.67 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \dots \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{array}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ - Θεώρηση συνδυασμένου κόμβου στον κόμβο 2

Ανάλυση παγιωμένου φορέα – Καθολικές ακραίες δράσεις μελών



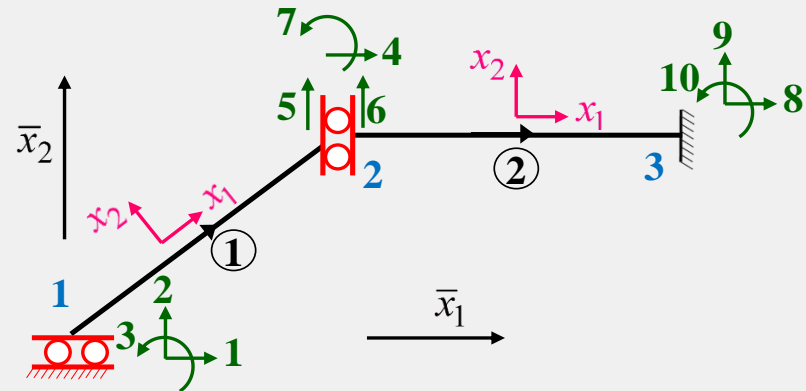
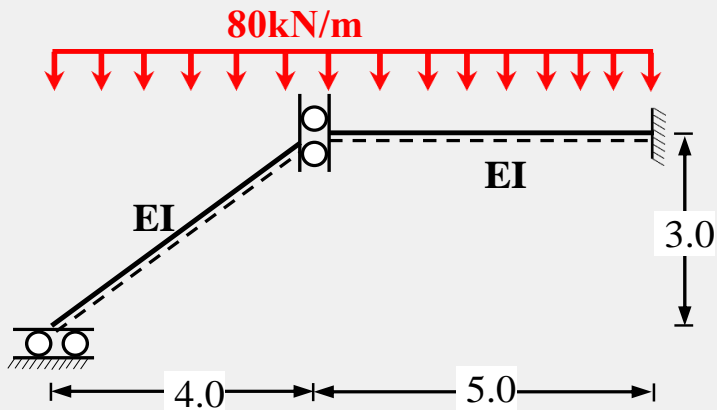
Μέλος 2 :



$$\begin{Bmatrix} -2 \\ A_r \end{Bmatrix} = [\Lambda_{PF}^2]^T \begin{Bmatrix} A_r^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.00 \\ 200 \\ 166.67 \\ \dots \\ 0.00 \\ 200 \\ -166.67 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 6 \\ 7 \\ \dots \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ - Θεώρηση συνδυασμένου κόμβου στον κόμβο 2

Ανάλυση παγιωμένου φορέα – Υπολογισμός δράσεων παγίωσης



Κόμβος 1 :

Κόμβος 2 :

Κόμβος 3 :

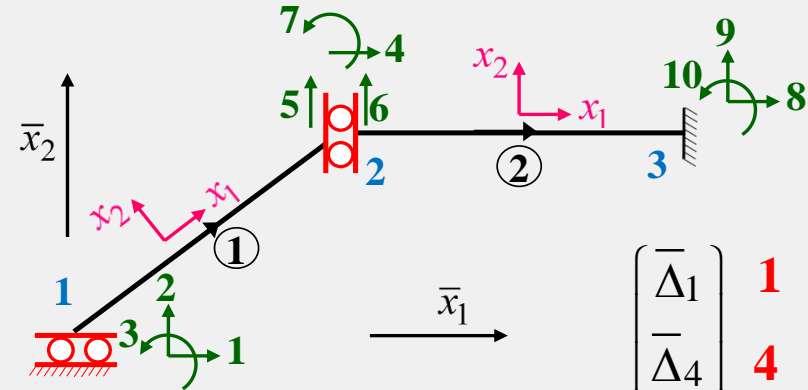
$$\left\{ \bar{S}^{(1)} \right\} = \left\{ \bar{A}_r^{1j} \right\} = \begin{Bmatrix} 0.00 & \mathbf{1} \\ 160 & \mathbf{2} \\ 106.67 & \mathbf{3} \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ \bar{S}^{(2)} \right\} = \left\{ \bar{A}_r^{1k} \right\} + \left\{ \bar{A}_r^{2j} \right\} = \begin{Bmatrix} 155.9 & \mathbf{4} \\ 160 & \mathbf{5} \\ 200 & \mathbf{6} \\ 60 & \mathbf{7} \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ \bar{S}^{(3)} \right\} = \left\{ \bar{A}_r^{2k} \right\} = \begin{Bmatrix} 0.00 & \mathbf{8} \\ 200 & \mathbf{9} \\ -166.67 & \mathbf{10} \end{Bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ - Θεώρηση συνδυασμένου κόμβου στον κόμβο 2

Αναδιατεταγμένα μητρώα επικόμβιων δράσεων και μετακινήσεων πλαισίου

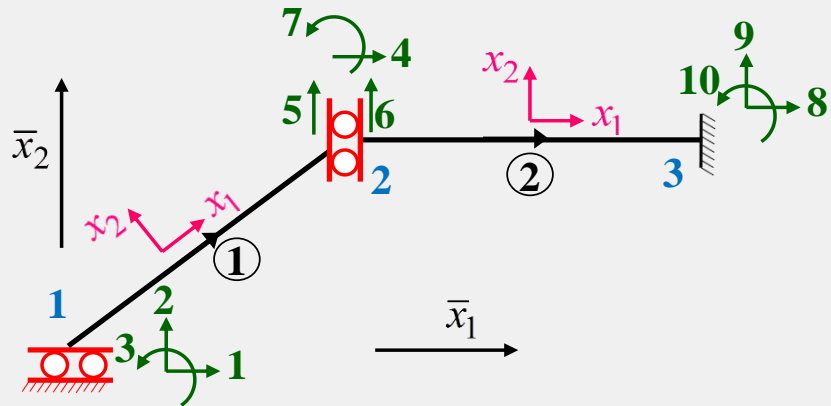


$$\{\bar{P}_m\} = \{\bar{P}_m^{nodal} - \bar{S}_m\} = \begin{bmatrix} \{\bar{P}_f\} \\ \{\bar{P}_s\} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.00 & \mathbf{1} \\ -155.90 & \mathbf{4} \\ -160 & \mathbf{5} \\ -200 & \mathbf{6} \\ -60 & \mathbf{7} \\ \hline \bar{R}_2^{(1)} - 160 & \mathbf{2} \\ \bar{R}_3^{(1)} - 106.67 & \mathbf{3} \\ \bar{R}_1^{(3)} & \mathbf{8} \\ \bar{R}_2^{(3)} - 200 & \mathbf{9} \\ \bar{R}_3^{(3)} + 166.67 & \mathbf{10} \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{\Delta}_m\} = \begin{bmatrix} \{\bar{\Delta}_f\} \\ \{\bar{\Delta}_s\} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 & \mathbf{1} \\ \bar{\Delta}_4 & \mathbf{4} \\ \bar{\Delta}_5 & \mathbf{5} \\ \bar{\Delta}_6 & \mathbf{6} \\ \bar{\Delta}_7 & \mathbf{7} \\ \hline 0 & \mathbf{2} \\ 0 & \mathbf{3} \\ 0 & \mathbf{8} \\ 0 & \mathbf{9} \\ 0 & \mathbf{10} \end{Bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ - Θεώρηση συνδυασμένου κόμβου στον κόμβο 2

Επίλυση –
Επικόμβιες μετακινήσεις
κατά τους ελεύθερους και
επικόμβιες δράσεις
(αντιδράσεις) κατά τους
δεσμευμένους β.ε.



$$\{\bar{\Delta}_f\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -29.85 \\ 0.00 \\ -41.91 \\ -249.85 \\ 26.46 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

$$\{\bar{P}_s\} = \begin{Bmatrix} \bar{R}_2^{(1)} \\ \bar{R}_3^{(1)} \\ \bar{R}_1^{(3)} \\ \bar{R}_2^{(3)} \\ \bar{R}_3^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 320.00 \\ 366.67 \\ 0.00 \\ 400.00 \\ -726.67 \end{Bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ - Θεώρηση συνδυασμένου κόμβου στον κόμβο 2

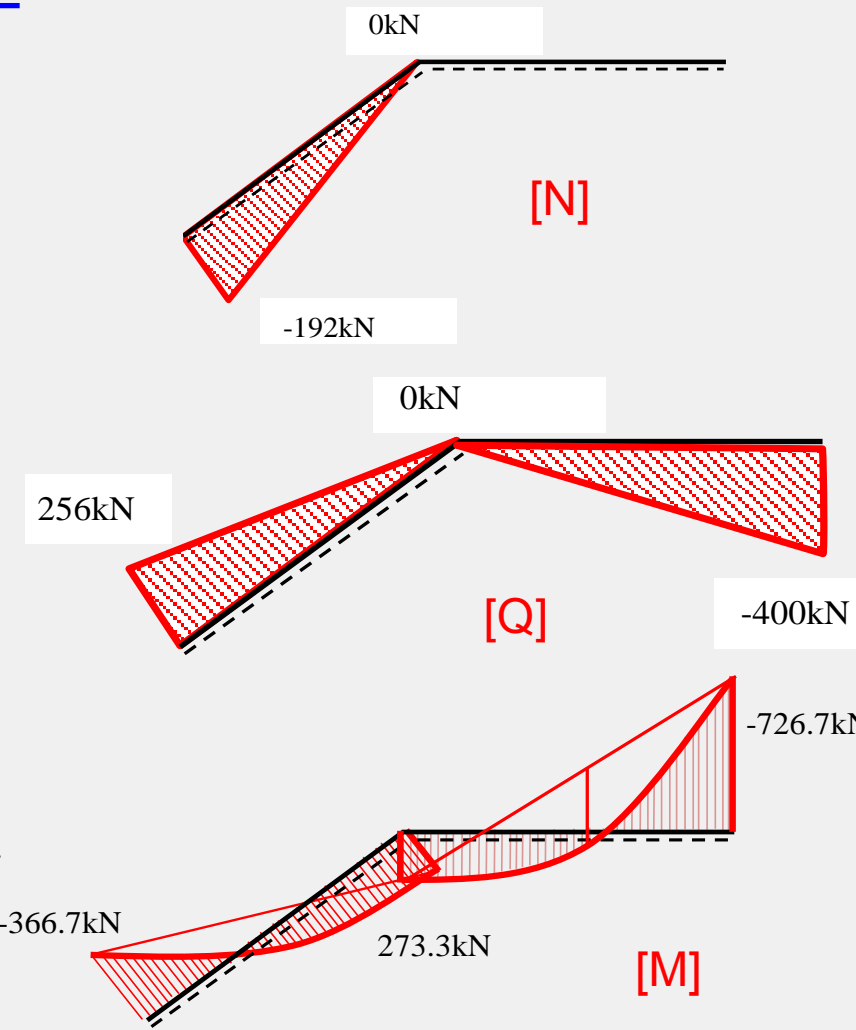
**Εσωτερικά εντατικά μεγέθη μελών πλαισίου –
Διαγράμματα εντατικών μεγεθών**

$$\{A^1\} = \{A_r^1\} + [k^1][\Lambda_{PF}^1]\{\bar{D}^1\} = \text{Μέλος 1 :}$$

$$= \begin{Bmatrix} F_1^{1j} \\ F_2^{1j} \\ M_3^{1j} \\ F_1^{1k} \\ F_2^{1k} \\ M_3^{1k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 96 \\ 128 \\ 106.67 \\ 96 \\ 128 \\ -106.67 \end{Bmatrix} + [k^1][\Lambda_{PF}^1] \begin{Bmatrix} -29.85 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -41.91 \\ 26.45 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4} = \begin{Bmatrix} 192 \\ 256 \\ 366.67 \\ 0 \\ 0 \\ 273.33 \end{Bmatrix}$$

$$\{A^2\} = \{A_r^2\} + [k^2][\Lambda_{PF}^2]\{\bar{D}^2\} = \text{Μέλος 2 :}$$

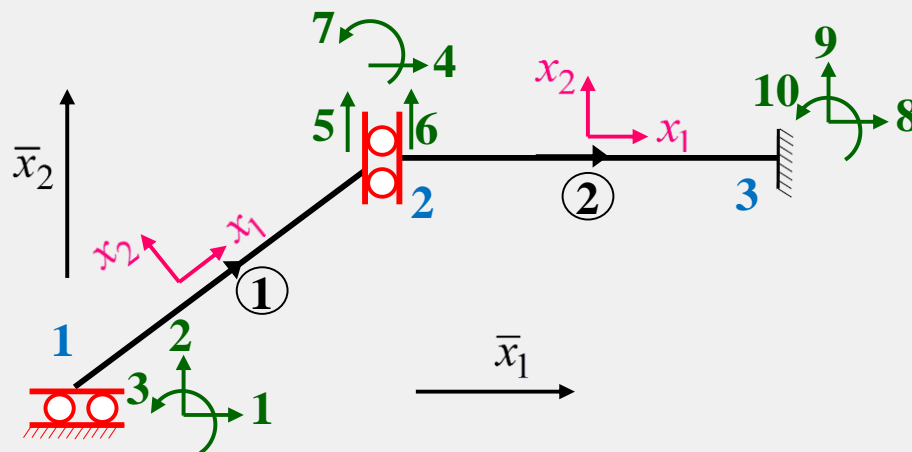
$$= \begin{Bmatrix} F_1^{2j} \\ F_2^{2j} \\ M_3^{2j} \\ F_1^{2k} \\ F_2^{2k} \\ M_3^{2k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 200 \\ 166.67 \\ 0 \\ 200 \\ -166.67 \end{Bmatrix} + [k^2][I] \begin{Bmatrix} 0 \\ -249.85 \\ 26.45 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -273.33 \\ 0 \\ 400 \\ -726.67 \end{Bmatrix}$$



ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ - Θεώρηση τροποποιημένου μητρώου στιβαρότητας στο στοιχείο 1

Τα βήματα μέχρι τη μόρφωση των καθολικών μητρώων στιβαρότητας των μελών του πλαισίου είναι ίδια.

Καθολικά μητρώα
στιβαρότητας μελών



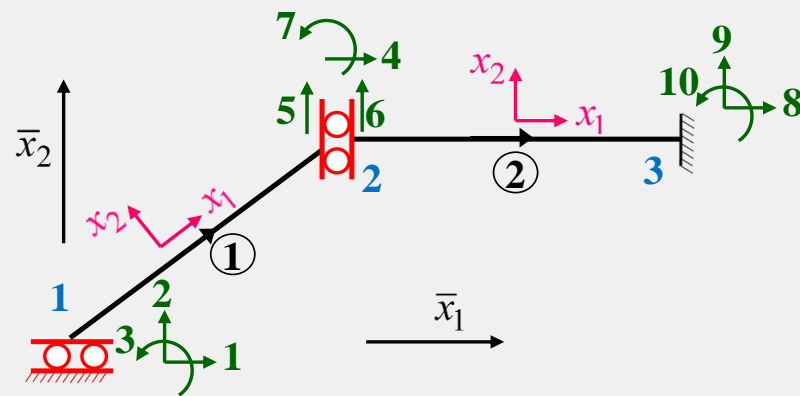
$$\left[\bar{k}^1 \right] = EI \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ 4.301 & 3.154 & -0.144 & -4.301 & -3.154 & -0.144 \\ 3.154 & 2.461 & 0.192 & -3.154 & -2.461 & 0.192 \\ -0.144 & 0.192 & 0.800 & 0.144 & -0.192 & 0.400 \\ -4.301 & -3.154 & 0.144 & 4.301 & 3.154 & 0.144 \\ -3.154 & -2.461 & -0.192 & 3.154 & 2.461 & -0.192 \\ -0.144 & 0.192 & 0.400 & 0.144 & -0.192 & 0.800 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{matrix}$$

$$\left[\bar{k}^2 \right] = EI \begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6.667 & 0 & 0 & -6.667 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.240 & 0 & -0.096 & 0.240 \\ 0 & 0.240 & 0.800 & 0 & -0.240 & 0.400 \\ -6.667 & 0 & 0 & 6.667 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & -0.240 & 0 & 0.096 & -0.240 \\ 0 & 0.240 & 0.400 & 0 & -0.240 & 0.800 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ - Θεώρηση τροποποιημένου μητρώου στιβαρότητας στο στοιχείο 1

Απαλοιφή καθολικού βαθμού ελευθερίας 5

Κατά τη θεώρηση αυτή, η αντιμετώπιση της εσωτερικής διατμητικής ελευθέρωσης γίνεται με **απαλοιφή του καθολικού βαθμού ελευθερίας 5** (μετατόπιση), έτσι ώστε οι ενεργοί βαθμοί ελευθερίας του κόμβου 2 να περιοριστούν στους 3, δηλαδή τους 4 (μετατόπιση), 6 (μετατόπιση) και 7 (στροφή)

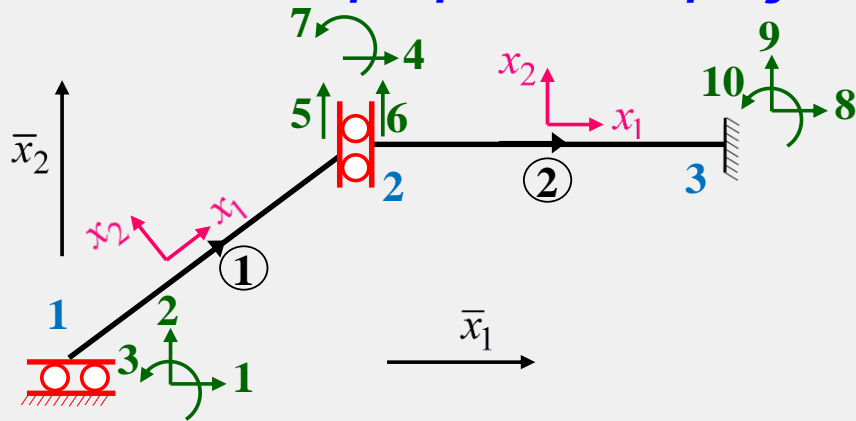


Αναδιατεταγμένη
 εξίσωση
 ισορροπίας του
 μέλους 1 στο
 καθολικό σύστημα
 αξόνων

$$\begin{matrix} \{P_e\} \\ \{P_{cc}\} \end{matrix} \begin{matrix} \bar{P}_5 \\ \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_3 \\ \bar{P}_4 \\ \bar{P}_7 \end{matrix} = EI \begin{matrix} [K_{ee}] & [K_{ec}] \\ [K_{ce}] & [K_{cc}] \end{matrix} \begin{matrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 2,461 & -3,154 & -2,461 & -0,192 & 3,154 & -0,192 \\ -3,154 & 4,301 & 3,154 & -0,144 & -4,301 & -0,144 \\ -2,461 & 3,154 & 2,461 & 0,192 & -3,154 & 0,192 \\ -0,192 & -0,144 & 0,192 & 0,800 & 0,144 & 0,400 \\ 3,154 & -4,301 & -3,154 & 0,144 & 4,301 & 0,144 \\ -0,192 & -0,144 & 0,192 & 0,400 & 0,144 & 0,800 \end{array} \right] \begin{matrix} \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_7 \end{matrix} \end{matrix} \begin{matrix} \{ \Delta_e \} \\ \{ \Delta_c \} \end{matrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ - Θεώρηση τροποποιημένου μητρώου στιβαρότητας στο στοιχείο 1

Υπολογισμός τροποποιημένου μητρώου στιβαρότητας μέλους 1, λόγω απαλοιφής του καθολικού βαθμού ελευθερίας 5



το τροποποιημένο μητρώο στιβαρότητας του μέλους 1 προκύπτει ως

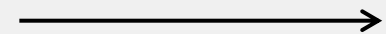
$$\left[\bar{k}_c \right]^{-1} = EI \begin{bmatrix} 0,260 & 0 & -0,390 & -0,260 & -0,390 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,390 & 0 & 0,785 & 0,390 & 0,385 \\ -0,260 & 0 & 0,390 & 0,260 & 0,390 \\ -0,390 & 0 & 0,385 & 0,390 & 0,785 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \end{matrix}$$

Αντικαθιστώντας τα υπομητρώα της προηγούμενης σχέσης στη σχέση

$$[K_c] = [K_{cc}] - [K_{ce}] [K_{ee}]^{-1} [K_{ec}]$$

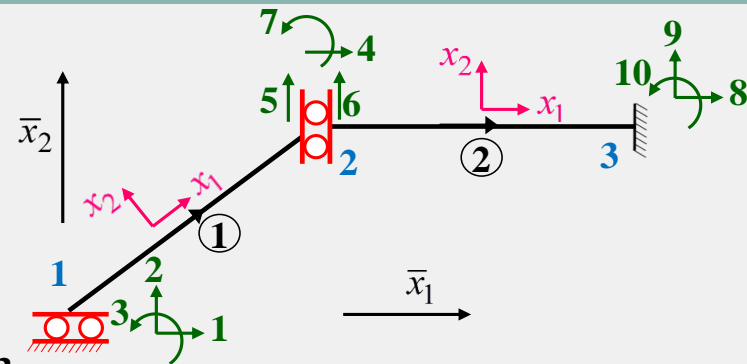
(παρατηρούνται τα μηδενικά στοιχεία της δεύτερης γραμμής και στήλης, τα οποία αντιστοιχούν σε κίνηση στερεού σώματος)

Η σύνθεση των μητρώων στιβαρότητας των μελών του πλαισίου, όπως και στην πρώτη θεώρηση, θα γίνει
 στοιχείο – στοιχείο



ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ - Θεώρηση τροποποιημένου μητρώου στιβαρότητας στο στοιχείο 1

Μόρφωση καθολικού μητρώου
στιβαρότητας πλαισίου



$$[K] = EI$$

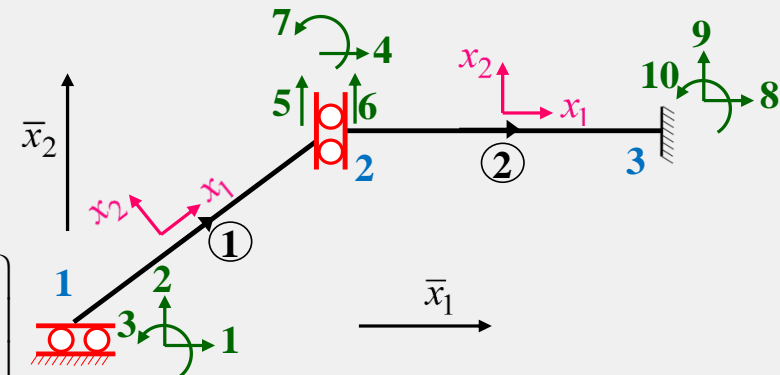
	#1			#2				#3	
	1	2	3	4	6	7	8	9	10
1	0.260	0.000	-0.390	-0.260	0.000	-0.390	0.000	0.000	0.000
2	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	-0.390	0.000	0.785	0.390	0.000	0.385	0.000	0.000	0.000
4	-0.260	0.000	0.390	6.927	0.000	0.390	-6.667	0.000	0.000
6	0.000	0.000	0.000	0.000	0.096	0.240	0.000	-0.096	0.240
7	-0.390	0.000	0.385	0.390	0.240	1.585	0.000	-0.240	0.400
8	0.000	0.000	0.000	-6.667	0.000	0.000	6.667	0.000	0.000
9	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.096	-0.240	0.000	0.096	-0.240
10	0.000	0.000	0.000	0.000	0.240	0.400	0.000	-0.240	0.800

Καθολικό μητρώο
στιβαρότητας
πλαϊσίου

(παρατηρούνται τα μηδενικά στοιχεία της δεύτερης γραμμής και στήλης, τα οποία αντιστοιχούν σε κίνηση στερεού σώματος)

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ - Θεώρηση τροποποιημένου μητρώου στιβαρότητας στο στοιχείο 1

Τροποποίηση καθολικού μητρώου
στιβαρότητας πλαισίου λόγω αναδιάταξης



$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} \text{ελεύθεροι} \\ \text{βαθμοί (free)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \end{array} \\
 \left. \begin{array}{l} \text{δεσμευμένοι} \\ \text{βαθμοί} \\ \text{(sup ported)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \\ 3 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array}$$

Μητρώο
αναδιάταξης
[V]

$$[\bar{K}_m] = [V][\bar{K}][V]^T = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{ff}] & [\bar{K}_{fs}] \\ [\bar{K}_{sf}] & [\bar{K}_{ss}] \end{bmatrix}$$

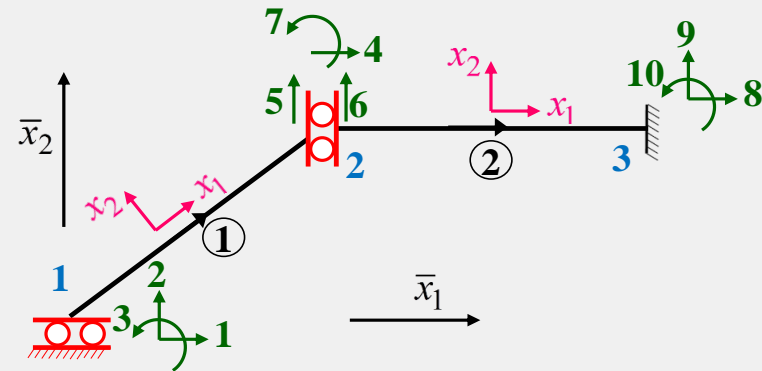
ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ - Θεώρηση τροποποιημένου μητρώου στιβαρότητας στο στοιχείο 1

Αναδιατεταγμένο καθολικό μητρώο
στιβαρότητας πλαισίου (1^η τροποποίηση)

$$[\bar{K}_m] = [V][\bar{K}][V]^T = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{ff}] & [\bar{K}_{fs}] \\ [\bar{K}_{sf}] & [\bar{K}_{ss}] \end{bmatrix} =$$

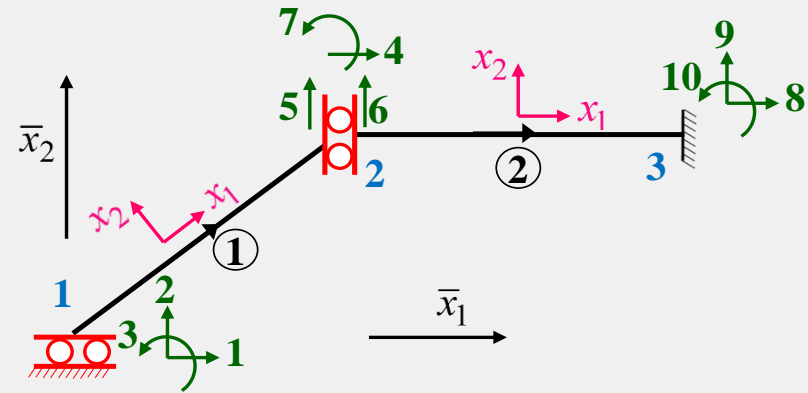
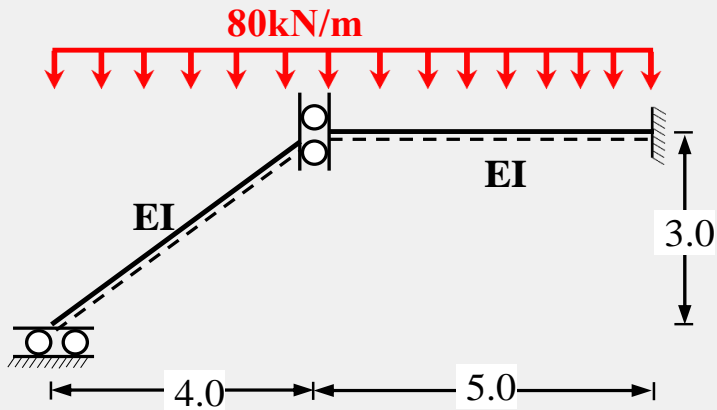
	1	4	6	7	2	3	8	9	10	
$= EI$	0.260	-0.260	0.000	-0.390	0.000	-0.390	0.000	0.000	0.000	1
	-0.260	6.927	0.000	0.390	0.000	0.390	-6.667	0.000	0.000	4
	0.000	0.000	0.096	0.240	0.000	0.000	0.000	-0.096	0.240	6
	-0.390	0.390	0.240	1.585	0.000	0.385	0.000	-0.240	0.400	7
	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	2
	-0.390	0.390	0.000	0.385	0.000	0.785	0.000	0.000	0.000	3
	0.000	-6.667	0.000	0.000	0.000	0.000	6.667	0.000	0.000	8
	0.000	0.000	-0.096	-0.240	0.000	0.000	0.000	0.096	-0.240	9
	0.000	0.000	0.240	0.400	0.000	0.000	0.000	-0.240	0.800	10

(παρατηρούνται τα μηδενικά στοιχεία της πέμπτης γραμμής και στήλης, τα οποία αντιστοιχούν σε κίνηση στερεού σώματος)

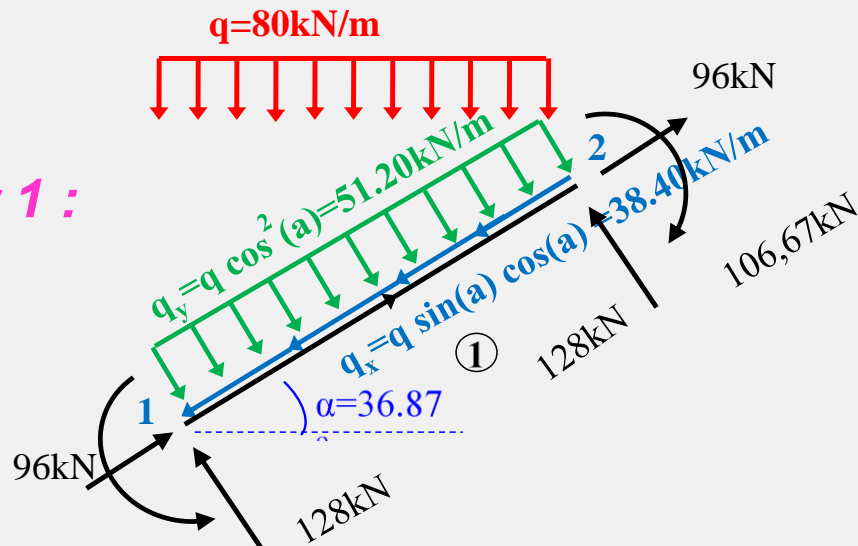


ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ - Θεώρηση τροποποιημένου μητρώου στιβαρότητας στο στοιχείο 1

Ανάλυση παγιωμένου φορέα – Τοπικές ακραίες δράσεις μελών



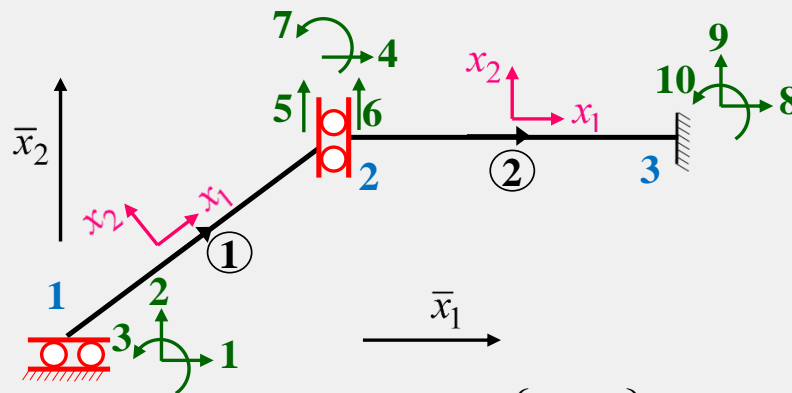
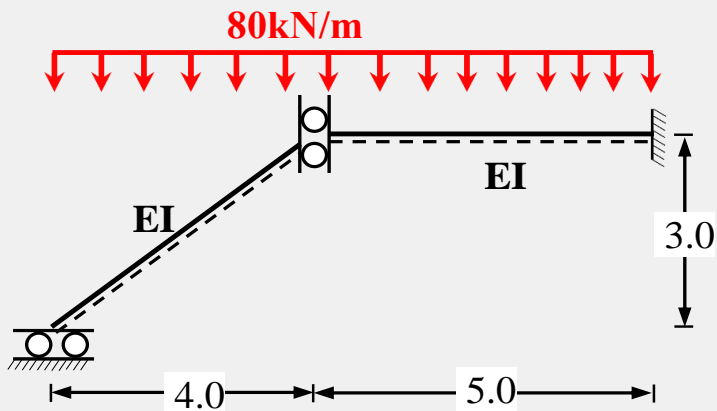
Μέλος 1 :



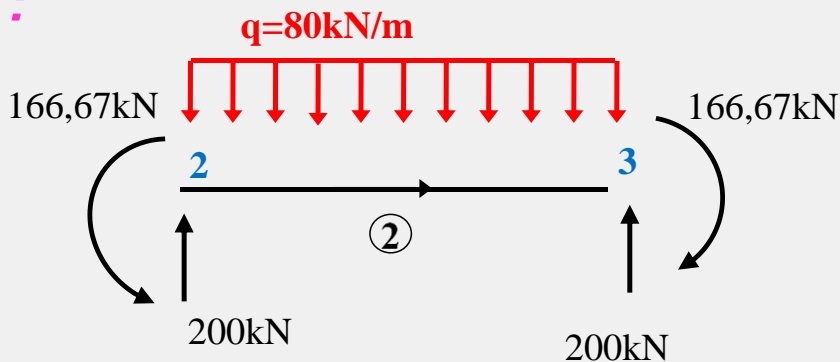
$$\{A_r^1\} = \begin{bmatrix} \{A_r^{1j}\} \\ \{A_r^{1k}\} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{1j} \\ F_2^{1j} \\ M_3^{1j} \\ F_1^{1k} \\ F_2^{1k} \\ M_3^{1k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 96 \\ 128 \\ 106.67 \\ \hline 96 \\ 128 \\ -106.67 \end{Bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ - Θεώρηση τροποποιημένου μητρώου στιβαρότητας στο στοιχείο 1

Ανάλυση παγιωμένου φορέα – Τοπικές ακραίες δράσεις μελών



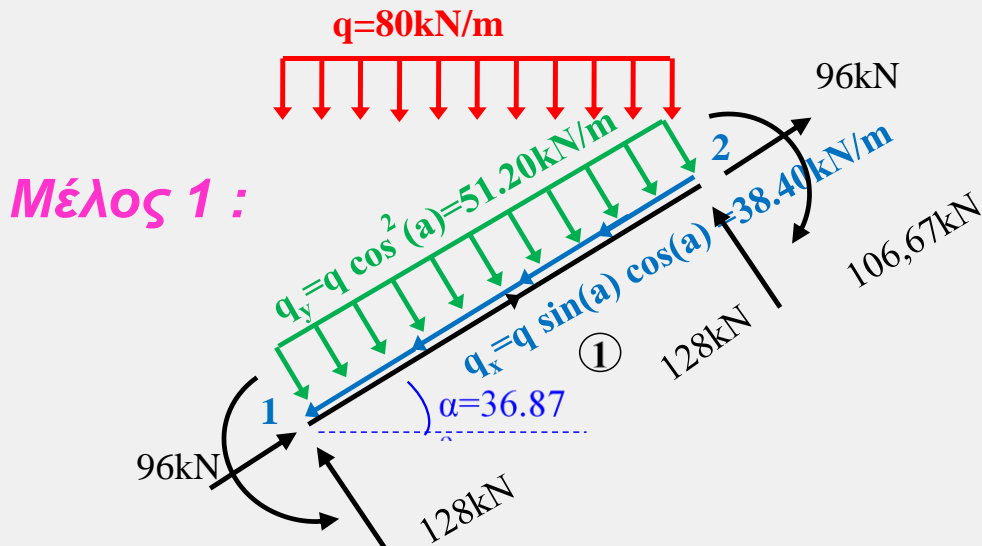
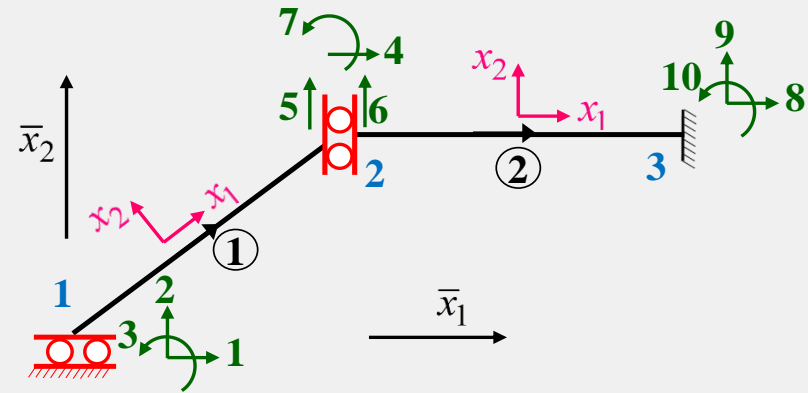
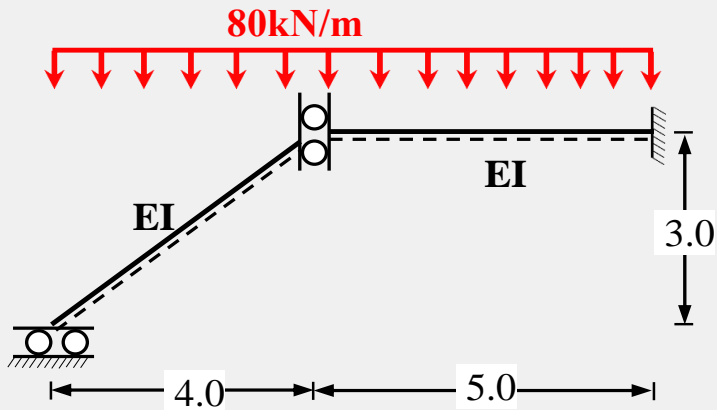
Μέλος 2 :



$$\{A_r^2\} = \begin{bmatrix} \{A_r^{2j}\} \\ \{A_r^{2k}\} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{2j} \\ F_2^{2j} \\ M_3^{2j} \\ \dots \\ F_1^{2k} \\ F_2^{2k} \\ M_3^{2k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 200 \\ 166.67 \\ \dots \\ 0 \\ 200 \\ -166.67 \end{Bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ - Θεώρηση τροποποιημένου μητρώου στιβαρότητας στο στοιχείο 1

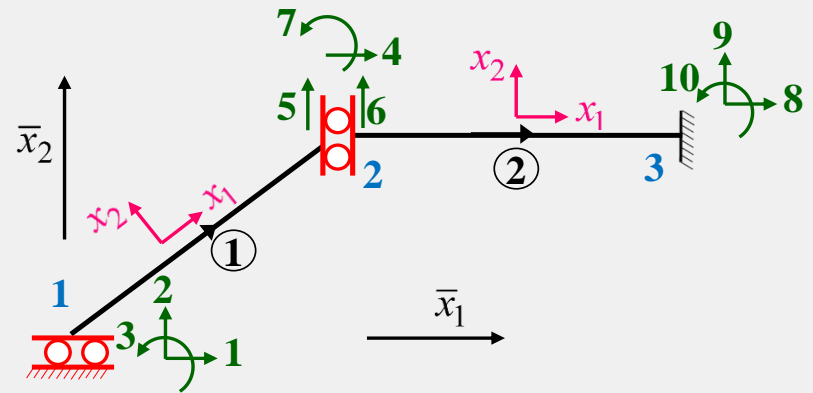
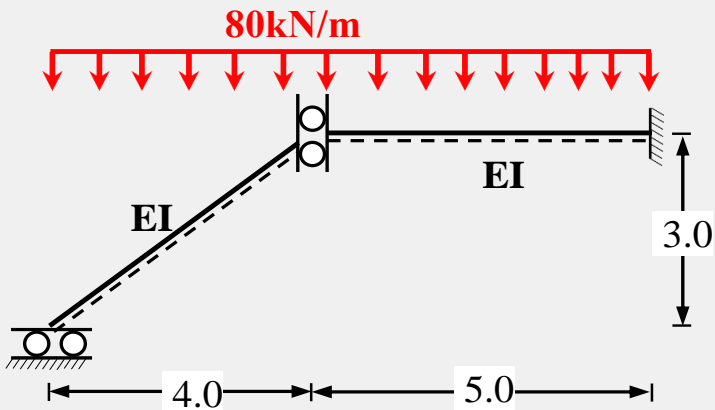
Ανάλυση παγιωμένου φορέα – Καθολικές ακραίες δράσεις μελών



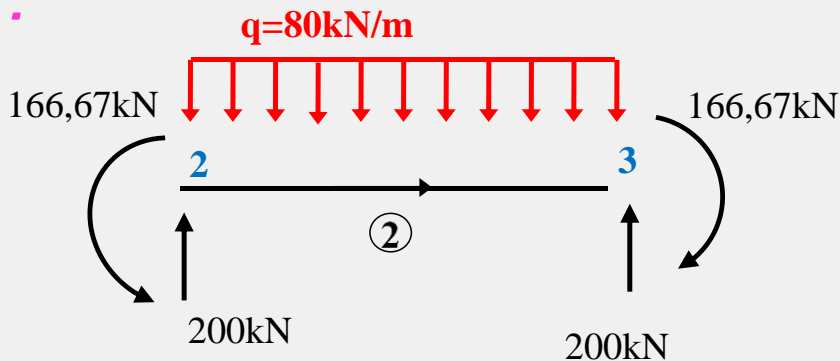
$$\begin{Bmatrix} -1 \\ \bar{A}_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{PF}^1 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} A_r^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.00 & 160 & 106.67 & 0.00 & 160 & -106.67 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{matrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ - Θεώρηση τροποποιημένου μητρώου στιβαρότητας στο στοιχείο 1

Ανάλυση παγιωμένου φορέα – Καθολικές ακραίες δράσεις μελών



Μέλος 2 :



$$\begin{Bmatrix} -2 \\ A_r \end{Bmatrix} = [\Lambda_{PF}^2]^T \begin{Bmatrix} A_r^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.00 \\ 200 \\ 166.67 \\ \dots \\ 0.00 \\ 200 \\ -166.67 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 6 \\ 7 \\ \dots \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ - Θεώρηση τροποποιημένου μητρώου στιβαρότητας στο στοιχείο 1

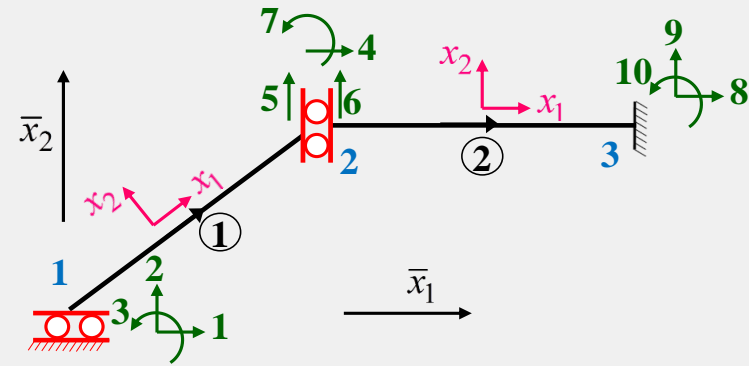
Ανάλυση παγιωμένου φορέα – Υπολογισμός τροποποιημένου μητρώου καθολικών ακραίων δράσεων μέλους 1, λόγω απαλοιφής του καθολικού βαθμού ελευθερίας 5

Η προαναφερθείσα **απαλοιφή του καθολικού βαθμού ελευθερίας 5** επηρεάζει το καθολικό μητρώο των ακραίων δράσεων του μέλους 1 του πλαισίου.

Αναδιατεταγμένο μητρώο καθολικών ακραίων δράσεων μέλους 1 έτσι ώστε να προηγούνται οι μετακινήσεις προς απαλοιφή $\{\Delta_e\}$ και να έπονται οι παραμένουσες μετακινήσεις $\{\Delta_c\}$.

$$\left\{ \left(\bar{A}_r \right)_m^{-1} \right\} = \begin{Bmatrix} 160 & \mathbf{5} \\ \cdots & \mathbf{1} \\ 0.00 & \mathbf{2} \\ 160 & \mathbf{3} \\ 106.67 & \mathbf{4} \\ 0.00 & \mathbf{7} \\ -106.67 & \mathbf{7} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P_e\} \\ \\ \\ \{P_{cc}\} \\ \\ \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ \left(A_r \right)_c \right\} = \{P_{cc}\} - [K_{ce}][K_{ee}]^{-1} \{P_e\}$$



Τροποποιημένο μητρώο καθολικών ακραίων δράσεων μέλους 1

$$\left\{ \left(\bar{A}_r \right)_c^{-1} \right\} = \begin{Bmatrix} \left\{ \left(\bar{A}_r^{-1j} \right)_c \right\} \\ \cdots \\ \left\{ \left(\bar{A}_r^{-1k} \right)_c \right\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 205 & \mathbf{1} \\ 320 & \mathbf{2} \\ 119.2 & \mathbf{3} \\ \cdots & \mathbf{4} \\ -205 & \mathbf{4} \\ -94.2 & \mathbf{7} \end{Bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ - Θεώρηση τροποποιημένου μητρώου στιβαρότητας στο στοιχείο 1

Ανάλυση παγιωμένου φορέα – Υπολογισμός δράσεων παγίωσης

Κόμβος 1 :

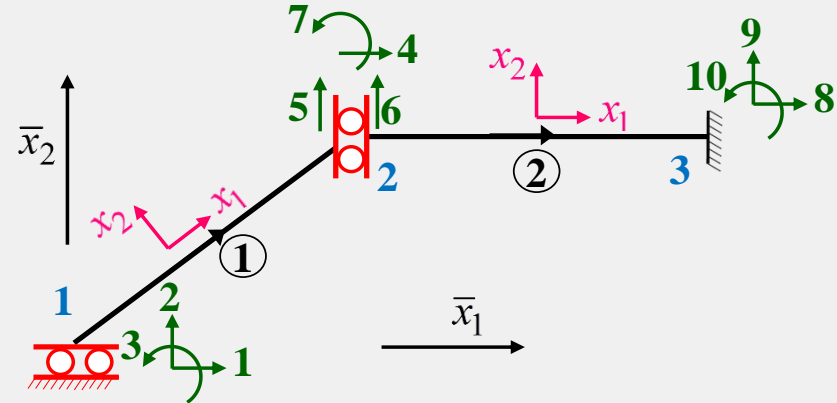
$$\left\{ \bar{S}^{(1)} \right\} = \left\{ \left(\bar{A}_r^{1j} \right)_c \right\} = \begin{Bmatrix} 205 \\ 320 \\ 119.2 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{matrix}$$

Κόμβος 2 :

$$\left\{ \bar{S}^{(2)} \right\} = \left\{ \left(\bar{A}_r^{1k} \right)_c \right\} + \left\{ \bar{A}_r^{2j} \right\} = \begin{Bmatrix} -205 \\ 200 \\ 72.5 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{6} \\ \mathbf{7} \end{matrix}$$

Κόμβος 3 :

$$\left\{ \bar{S}^{(3)} \right\} = \left\{ \bar{A}_r^{2k} \right\} = \begin{Bmatrix} 0.00 \\ 200 \\ -166.67 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{8} \\ \mathbf{9} \\ \mathbf{10} \end{matrix}$$



Οι δράσεις παγίωσης σε κάθε κόμβο του παγιωμένου φορέα του πλαισίου είναι ίσες με το άθροισμα των καθολικών ακραίων δράσεων των άκρων των μελών που καταλήγουν στον κόμβο αυτόν, **δίνοντας ιδιαίτερη προσοχή στον κόμβο 2** (όπου η άθροιση θα πρέπει να γίνει στοιχείο-στοιχείο)

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ - Θεώρηση τροποποιημένου μητρώου στιβαρότητας στο στοιχείο 1

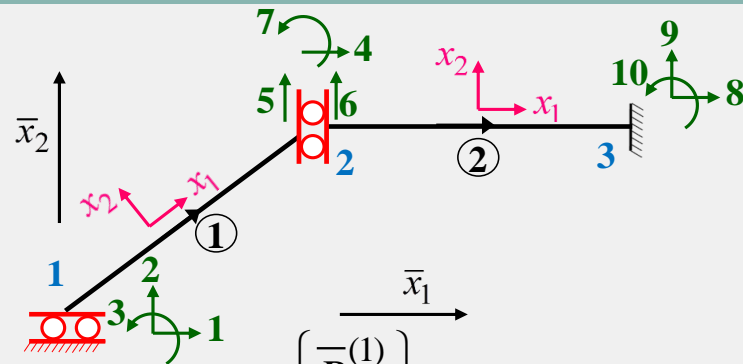
Αναδιατεταγμένα
μητρώα επικόμβιων
δράσεων και
μετακινήσεων
πλασιίου

$$\{\bar{P}_m\} = \{\bar{P}_m^{nodal} - \bar{S}_m\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{P}_f\} \\ \{\bar{P}_s\} \end{Bmatrix} =$$

$$\{\bar{\Delta}_m\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{\Delta}_f\} \\ \{\bar{\Delta}_s\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 & \mathbf{1} \\ \bar{\Delta}_4 & \mathbf{4} \\ \bar{\Delta}_6 & \mathbf{6} \\ \bar{\Delta}_7 & \mathbf{7} \\ \dots & \dots \\ 0 & \mathbf{2} \\ 0 & \mathbf{3} \\ 0 & \mathbf{8} \\ 0 & \mathbf{9} \\ 0 & \mathbf{10} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} -205 & \mathbf{1} \\ 205 & \mathbf{4} \\ -200 & \mathbf{6} \\ -72.5 & \mathbf{7} \\ \dots & \dots \\ \bar{R}_2^{(1)} - 320 & \mathbf{2} \\ \bar{R}_3^{(1)} - 119.2 & \mathbf{3} \\ \dots & \dots \\ \bar{R}_1^{(3)} & \mathbf{8} \\ \bar{R}_2^{(3)} - 200 & \mathbf{9} \\ \bar{R}_3^{(3)} + 166.67 & \mathbf{10} \end{Bmatrix}$$

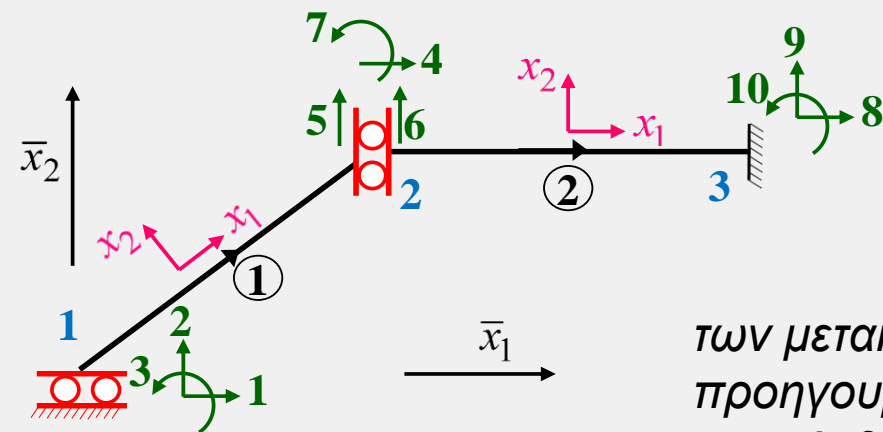
Επίλυση –
Επικόμβιες μετακινήσεις
κατά τους ελεύθερους και
επικόμβιες δράσεις
(αντιδράσεις) κατά τους
δεσμευμένους β.ε.



$$\{\bar{P}_s\} = \begin{Bmatrix} \bar{R}_2^{(1)} \\ \bar{R}_3^{(1)} \\ \bar{R}_1^{(3)} \\ \bar{R}_2^{(3)} \\ \bar{R}_3^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 320.00 \\ 366.67 \\ 0.00 \\ 400.00 \\ -726.67 \end{Bmatrix}$$

$$[\bar{\Delta}_f] = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -29.85 \\ 0.00 \\ -249.85 \\ 26.46 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ - Θεώρηση τροποποιημένου μητρώου στιβαρότητας στο στοιχείο 1



Υπολογισμός μετατόπισης κατά τον καθολικό βαθμό ελευθερίας 5 που απαλείφθηκε σε προηγούμενο βήμα

Με τη βοήθεια της σχέσης

$$\{\Delta_e\} = [K_{ee}]^{-1} (\{P_e\} - [K_{ec}]\{\Delta_c\})$$

των μετακινήσεων κατά τους β.ε. 4, 7 που υπολογίστηκαν προηγουμένως και των υπομητρώων των σχέσεων που αναφέρθηκαν σε προηγούμενο βήμα

$$\begin{matrix} \{P_e\} \\ \{P_{cc}\} \end{matrix} \begin{matrix} \bar{P}_5 \\ \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_3 \\ \bar{P}_4 \\ \bar{P}_7 \end{matrix} = EI \begin{matrix} [K_{ee}] & & & & & & \\ & [K_{ec}] & & & & & \\ & & [K_{ee}] & & & & \\ & & & [K_{ec}] & & & \\ & & & & [K_{ee}] & & \\ & & & & & [K_{ec}] & \\ & & & & & & [K_{ee}] \end{matrix} \begin{matrix} \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_7 \end{matrix} \begin{matrix} \{P_e\} \\ \{P_{cc}\} \end{matrix}$$

προκύπτει η μετατόπιση κατά τον καθολικό β.ε. 5 ως

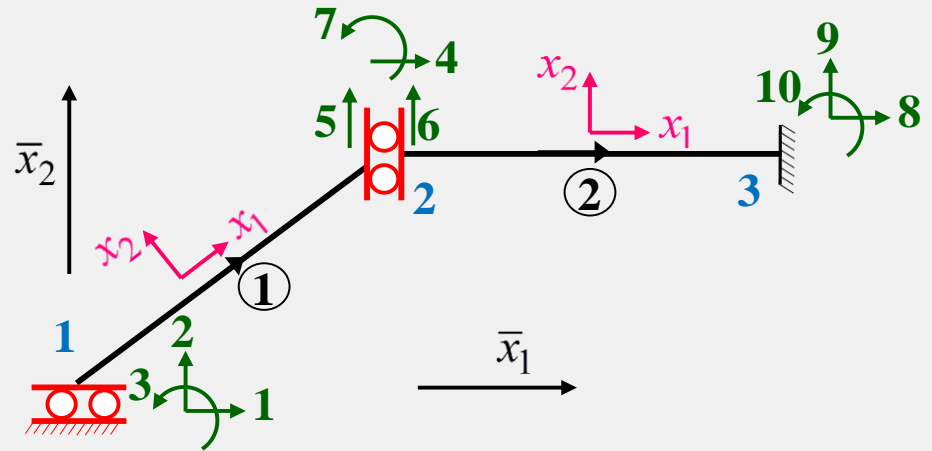
$$\{\Delta_e\} = \{\bar{\Delta}_5\} = \{-41.91\} \cdot 10^{-4}$$

Ακολουθεί ο υπολογισμός των τοπικών ακραίων δράσεων και η χάραξη των διαγραμμάτων εντατικών μεγεθών των μελών του πλαισίου (ίδια με τα προηγούμενα)

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ - Θεώρηση τροποποιημένων μ.σ. και στα δύο στοιχεία 1 και 2

Τα βήματα μέχρι τη μόρφωση των καθολικών μητρώων στιβαρότητας των μελών του πλαισίου είναι ίδια.

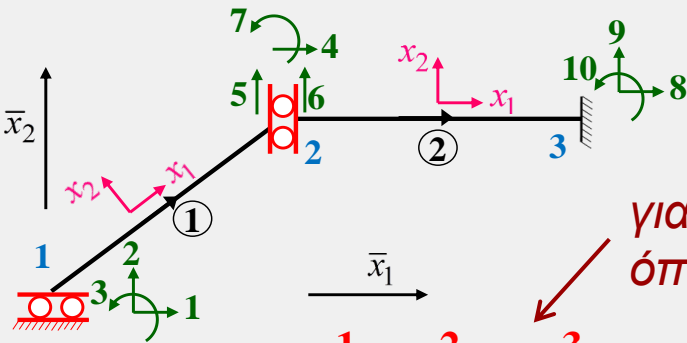
Καθολικά μητρώα
στιβαρότητας μελών



$$\left[\bar{k}^1 \right] = EI \begin{bmatrix} 4.301 & 3.154 & -0.144 & -4.301 & -3.154 & -0.144 \\ 3.154 & 2.461 & 0.192 & -3.154 & -2.461 & 0.192 \\ -0.144 & 0.192 & 0.800 & 0.144 & -0.192 & 0.400 \\ -4.301 & -3.154 & 0.144 & 4.301 & 3.154 & 0.144 \\ -3.154 & -2.461 & -0.192 & 3.154 & 2.461 & -0.192 \\ -0.144 & 0.192 & 0.400 & 0.144 & -0.192 & 0.800 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{matrix}$$

$$\left[\bar{k}^2 \right] = EI \begin{bmatrix} 6.667 & 0 & 0 & -6.667 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.240 & 0 & -0.096 & 0.240 \\ 0 & 0.240 & 0.800 & 0 & -0.240 & 0.400 \\ -6.667 & 0 & 0 & 6.667 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & -0.240 & 0 & 0.096 & -0.240 \\ 0 & 0.240 & 0.400 & 0 & -0.240 & 0.800 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ - Θεώρηση τροποποιημένων μ.σ. και στα δύο στοιχεία 1 και 2



Υπολογισμός τροποποιημένων μητρώων στιβαρότητας μελών 1,2 λόγω απαλοιφής των καθολικών βαθμών ελευθερίας 5,6

για το μέλος 1
όπως πριν

$$[k_c^{-1}] = EI \begin{bmatrix} 0,260 & 0 & -0,390 & -0,260 & -0,390 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,390 & 0 & 0,785 & 0,390 & 0,385 \\ \hline -0,260 & 0 & 0,390 & 0,260 & 0,390 \\ -0,390 & 0 & 0,385 & 0,390 & 0,785 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \end{matrix}$$

το τροποποιημένο μητρώο στιβαρότητας του μέλους 2 προκύπτει ως

$$[k_c^{-2}] = EI \begin{bmatrix} 6.667 & 0.000 & -6.667 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.200 & 0.000 & 0.000 & -0.200 \\ -6.667 & 0.000 & 6.667 & 0.000 & 0.000 \\ \hline 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -0.200 & 0.000 & 0.000 & 0.200 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

για το μέλος 2

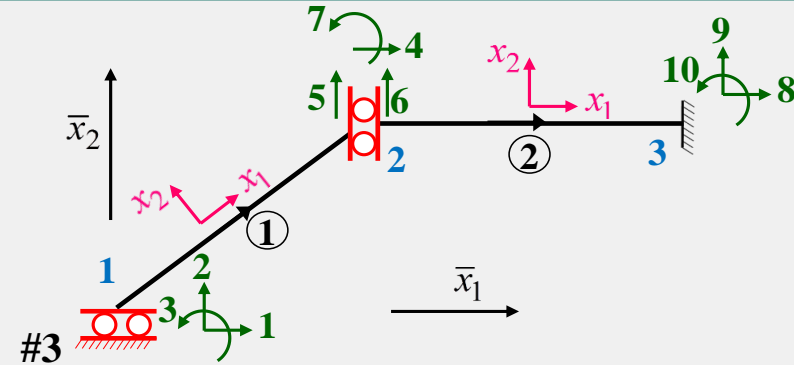
Αντικαθιστώντας τα υπομητρώα της καθολικής σχέσης στιβαρότητας του μέλους 2 στη σχέση

$$[K_c] = [K_{cc}] - [K_{ce}] [K_{ee}]^{-1} [K_{ec}]$$

Η σύνθεση των μητρώων στιβαρότητας των μελών του πλαισίου, μπορεί να γίνει είτε υπομητρώο-υπομητρώο είτε στοιχείο – στοιχείο

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ - Θεώρηση τροποποιημένων μ.σ. και στα δύο στοιχεία 1 και 2

Μόρφωση καθολικού μητρώου
στιβαρότητας πλαισίου



	#1			#2			#3			
	1	2	3	4	7	8	9	10		
$[K] = EI$	0.260	0.000	-0.390	-0.260	-0.390	0.000	0.000	0.000	1	#1
	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	2	
	-0.390	0.000	0.785	0.390	0.385	0.000	0.000	0.000	3	
	-0.260	0.000	0.390	6.927	0.390	-6.667	0.000	0.000	4	#2
	-0.390	0.000	0.385	0.390	0.985	0.000	0.000	-0.200	7	
	0.000	0.000	0.000	-6.667	0.000	6.667	0.000	0.000	8	#3
	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	9	
	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.200	0.000	0.000	0.200	10	

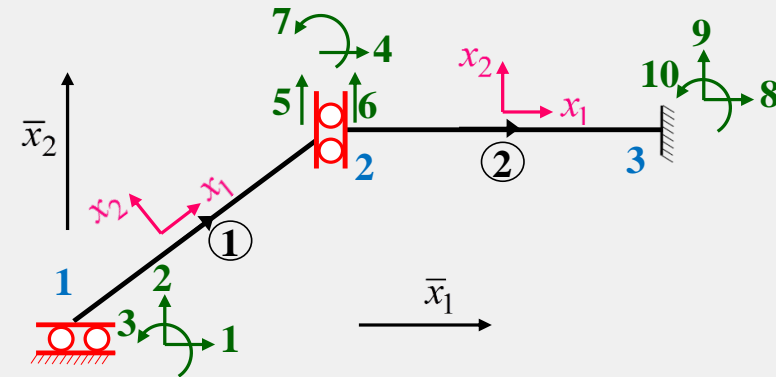
Καθολικό
μητρώο
στιβαρότητας
πλαισίου

(παρατηρούνται τα μηδενικά στοιχεία της δεύτερης και έβδομης γραμμής και στήλης, τα οποία αντιστοιχούν σε κίνηση στερεού σώματος)

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ - Θεώρηση τροποποιημένων μ.σ. και στα δύο στοιχεία 1 και 2

Τροποποίηση καθολικού μητρώου
στιβαρότητας πλαισίου λόγω αναδιάταξης

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} \text{ελεύθεροι} \\ \text{βαθμοί (free)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 \\ 4 \\ 7 \end{array} \\
 \left. \begin{array}{l} \text{δεσμευμένοι} \\ \text{βαθμοί} \\ \text{(supported)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \\ 3 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 4 \\ 7 \\ \hline 2 \\ 3 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \right\}$$

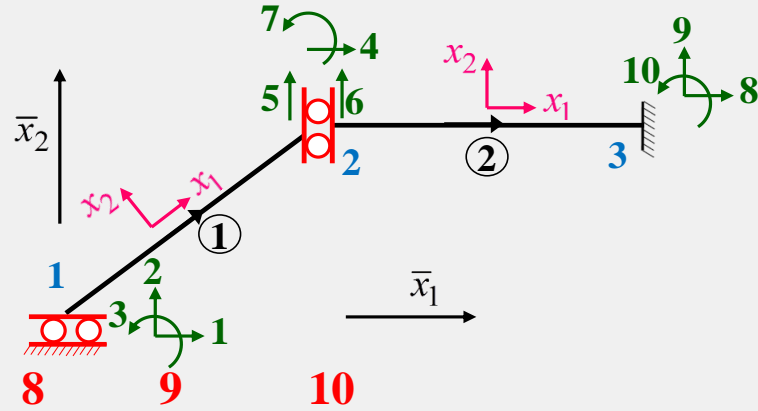


Μητρώο
αναδιάταξης
[V]

$$[\bar{K}_m] = [V][\bar{K}][V]^T = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{ff}] & [\bar{K}_{fs}] \\ \hline [\bar{K}_{sf}] & [\bar{K}_{ss}] \end{bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ - Θεώρηση τροποποιημένων μ.σ. και στα δύο στοιχεία 1 και 2

Αναδιατεταγμένο καθολικό μητρώο
στιβαρότητας πλαισίου (1^η τροποποίηση)



$$[\bar{K}_m] = [V][\bar{K}][V]^T = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{ff}] & [\bar{K}_{fs}] \\ [\bar{K}_{sf}] & [\bar{K}_{ss}] \end{bmatrix} =$$

	1	4	7	2	3	8	9	10	
$= EI$	0.260	-0.260	-0.390	0.000	-0.390	0.000	0.000	0.000	1
	-0.260	6.927	0.390	0.000	0.390	-6.667	0.000	0.000	4
	-0.390	0.390	0.985	0.000	0.385	0.000	0.000	-0.200	7
	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	2
	-0.390	0.390	0.385	0.000	0.785	0.000	0.000	0.000	3
	0.000	-6.667	0.000	0.000	0.000	6.667	0.000	0.000	8
	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	9
	0.000	0.000	-0.200	0.000	0.000	0.000	0.000	0.200	10

(παρατηρούνται τα μηδενικά στοιχεία της τέταρτης και έβδομης γραμμής και στήλης, τα οποία αντιστοιχούν σε κίνηση στερεού σώματος)

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ - Θεώρηση τροποποιημένων μ.σ. και στα δύο στοιχεία 1 και 2

Ανάλυση παγιωμένου φορέα – Ο υπολογισμός των τοπικών και καθολικών ακραίων δράσεων των μελών 1, 2, γίνεται όπως στα προηγούμενα.

Ακολουθεί ο υπολογισμός των τροποποιημένων μητρώων καθολικών ακραίων δράσεων των μελών 1,2 λόγω απαλοιφής των καθολικών β.ε. 5,6

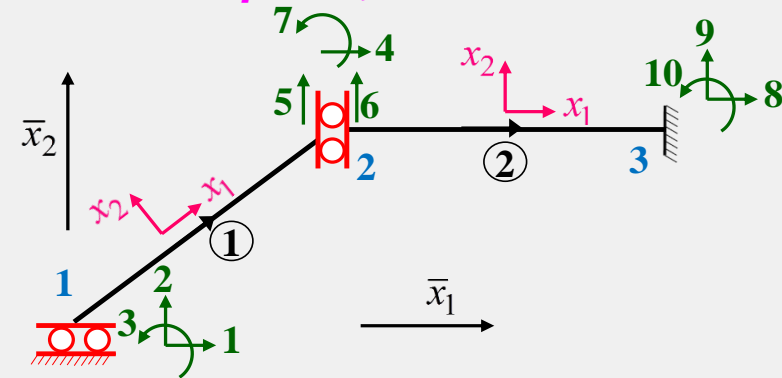
για το μέλος 1, όπως πριν

$$\left\{ \left(\bar{A}_r^1 \right)_c \right\} = \begin{bmatrix} \left\{ \left(\bar{A}_r^{1j} \right)_c \right\} \\ \left\{ \left(\bar{A}_r^{1k} \right)_c \right\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 205 & \mathbf{1} \\ 320 & \mathbf{2} \\ 119.2 & \mathbf{3} \\ -205 & \mathbf{4} \\ -94.2 & \mathbf{7} \end{bmatrix}$$

**Αναδιατεταγμένο
μητρώο καθολικών
ακραίων δράσεων
μέλους 2**

$$\left\{ \left(\bar{A}_r^2 \right)_m \right\} = \begin{bmatrix} 200 & \mathbf{6} \\ 0 & \mathbf{4} \\ 166.67 & \mathbf{7} \\ 0 & \mathbf{8} \\ 200 & \mathbf{9} \\ -166.67 & \mathbf{10} \end{bmatrix} \begin{matrix} \{P_e\} \\ \\ \{P_{cc}\} \end{matrix}$$

για το μέλος 2



**Τροποποιημένο μητρώο
καθολικών ακραίων δράσεων
μέλους 2**

$$\left\{ \left(\bar{A}_r^2 \right)_c \right\} = \begin{bmatrix} \left\{ \left(\bar{A}_r^{2j} \right)_c \right\} \\ \left\{ \left(\bar{A}_r^{2k} \right)_c \right\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{4} \\ -333.33 & \mathbf{7} \\ 0 & \mathbf{8} \\ 400 & \mathbf{9} \\ -666.67 & \mathbf{10} \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \left(A_r \right)_c \right\} = \{P_{cc}\} - [K_{ce}][K_{ee}]^{-1} \{P_e\}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ - Θεώρηση τροποποιημένων μ.σ. και στα δύο στοιχεία 1 και 2

Ανάλυση παγιωμένου φορέα – Υπολογισμός δράσεων παγίωσης

Κόμβος 1 :

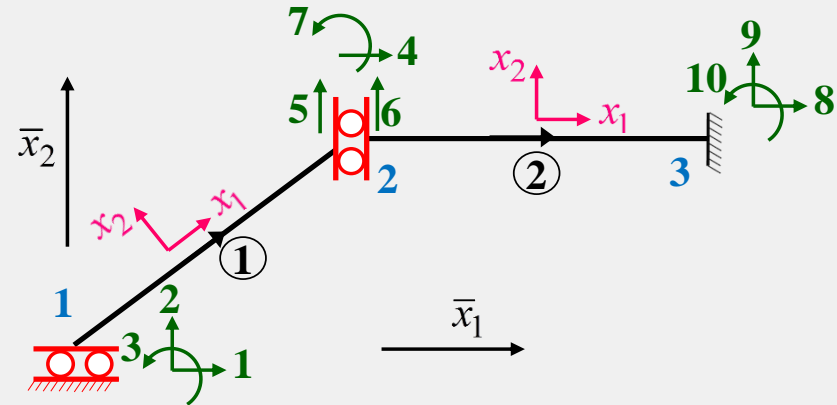
$$\left\{ \bar{S}^{(1)} \right\} = \left\{ \left(\bar{A}_r^{1j} \right)_c \right\} = \begin{Bmatrix} 205 \\ 320 \\ 119.2 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{matrix}$$

Κόμβος 2 :

$$\left\{ \bar{S}^{(2)} \right\} = \left\{ \left(\bar{A}_r^{1k} \right)_c \right\} + \left\{ \bar{A}_r^{2j} \right\} = \begin{Bmatrix} -205 \\ -427.5 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{7} \end{matrix}$$

Κόμβος 3 :

$$\left\{ \bar{S}^{(3)} \right\} = \left\{ \bar{A}_r^{2k} \right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 400 \\ -666.67 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{8} \\ \mathbf{9} \\ \mathbf{10} \end{matrix}$$



Οι δράσεις παγίωσης σε κάθε κόμβο του παγιωμένου φορέα του πλαισίου είναι ίσες με το άθροισμα των καθολικών ακραίων δράσεων των άκρων των μελών που καταλήγουν στον κόμβο αυτόν

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ - Θεώρηση τροποποιημένων μ.σ. και στα δύο στοιχεία 1 και 2

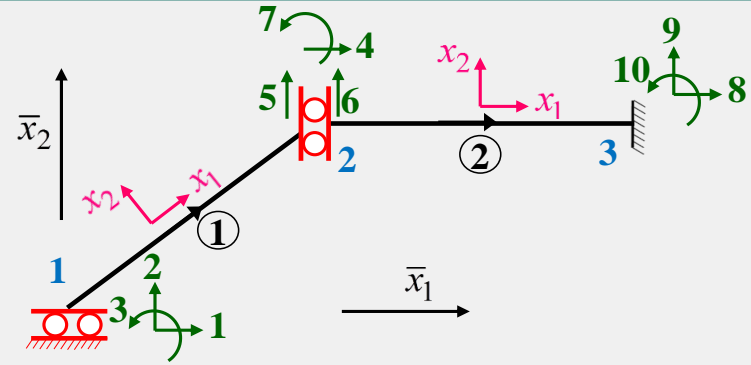
**Αναδιατεταγμένα
μητρώα επικόμβιων
δράσεων και
μετακινήσεων
πλασιίου**

$$\{\bar{P}_m\} = \{\bar{P}_m^{nodal} - \bar{S}_m\} = \begin{bmatrix} \{\bar{P}_f\} \\ \{\bar{P}_s\} \end{bmatrix}$$

$$\{\bar{\Delta}_m\} = \begin{bmatrix} \{\bar{\Delta}_f\} \\ \{\bar{\Delta}_s\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_1 & \mathbf{1} \\ \bar{\Delta}_4 & \mathbf{4} \\ \bar{\Delta}_7 & \mathbf{7} \\ \dots & \dots \\ 0 & \mathbf{2} \\ 0 & \mathbf{3} \\ 0 & \mathbf{8} \\ 0 & \mathbf{9} \\ 0 & \mathbf{10} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -205 & \mathbf{1} \\ 205 & \mathbf{4} \\ 427.5 & \mathbf{7} \\ \dots & \dots \\ \bar{R}_2^{(1)} - 320 & \mathbf{2} \\ \bar{R}_3^{(1)} - 119.2 & \mathbf{3} \\ \dots & \dots \\ \bar{R}_1^{(3)} & \mathbf{8} \\ \bar{R}_2^{(3)} - 400 & \mathbf{9} \\ \bar{R}_3^{(3)} + 666.7 & \mathbf{10} \end{bmatrix}$$

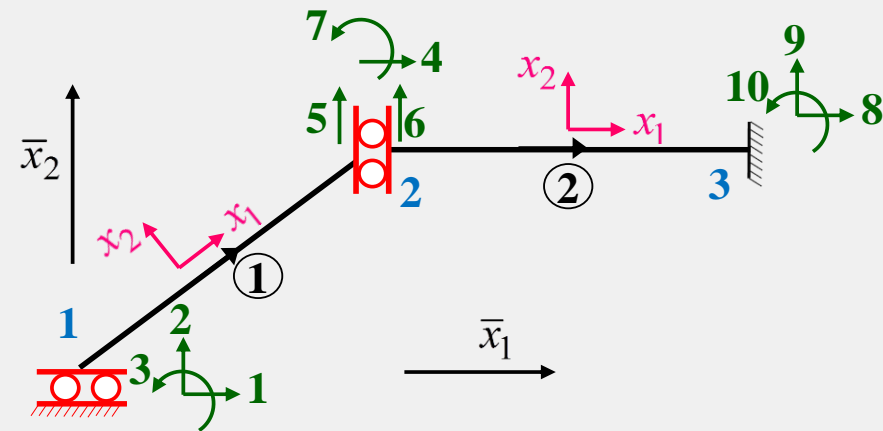
**Επίλυση –
Επικόμβιες μετακινήσεις
κατά τους ελεύθερους και
επικόμβιες δράσεις
(αντιδράσεις) κατά τους
δεσμευμένους β.ε.**



$$[\bar{\Delta}_f] = \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -29.85 \\ 0.00 \\ 26.46 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

$$\{\bar{P}_s\} = \begin{bmatrix} \bar{R}_2^{(1)} \\ \bar{R}_3^{(1)} \\ \bar{R}_1^{(3)} \\ \bar{R}_2^{(3)} \\ \bar{R}_3^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 320.00 \\ 366.67 \\ 0.00 \\ 400.00 \\ -726.67 \end{bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ - Θεώρηση τροποποιημένων μ.σ. και στα δύο στοιχεία 1 και 2



Υπολογισμός μετατοπίσεων κατά τους καθολικούς βαθμούς ελευθερίας 5,6 που απαλείφθηκαν σε προηγούμενο βήμα

Με τη βοήθεια της σχέσης

$$\{\Delta_e\} = [K_{ee}]^{-1} (\{P_e\} - [K_{ec}]\{\Delta_c\})$$

των μετακινήσεων κατά τους β.ε. 4,7 που υπολογίστηκαν προηγουμένως και των υπομητρώων των σχέσεων που αναφέρθηκαν σε προηγούμενο βήμα

$\begin{matrix} \{P_e\} \\ \{P_{cc}\} \end{matrix} \begin{matrix} \bar{P}_5 \\ \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_3 \\ \bar{P}_4 \\ \bar{P}_7 \end{matrix} = EI \begin{bmatrix} [K_{ee}] & & & & & \\ & [K_{ec}] & & & & \\ & & [K_{ee}] & & & \\ & & & [K_{ec}] & & \\ & & & & [K_{ee}] & \\ & & & & & [K_{ec}] \end{bmatrix} \begin{matrix} \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_7 \end{matrix} \begin{matrix} \{\Delta_c\} \\ \{\Delta_c\} \\ \{\Delta_c\} \\ \{\Delta_c\} \\ \{\Delta_c\} \\ \{\Delta_c\} \end{matrix}$ $\left\{ (\bar{A}_r)^{-1} \right\}_m = \begin{matrix} 160 & 5 & \{P_e\} \\ 0.00 & 1 & \{P_{cc}\} \\ 160 & 2 & \\ 106.67 & 3 & \{P_{cc}\} \\ 0.00 & 4 & \\ -106.67 & 7 & \end{matrix}$	$\begin{matrix} \{P_e\} \\ \{P_{cc}\} \end{matrix} \begin{matrix} \bar{P}_6 \\ \bar{P}_4 \\ \bar{P}_7 \\ \bar{P}_8 \\ \bar{P}_9 \\ \bar{P}_{10} \end{matrix} = EI \begin{bmatrix} [K_{ee}] & & & & & \\ & [K_{ec}] & & & & \\ & & [K_{ee}] & & & \\ & & & [K_{ec}] & & \\ & & & & [K_{ee}] & \\ & & & & & [K_{ec}] \end{bmatrix} \begin{matrix} \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \bar{\Delta}_{10} \end{matrix} \begin{matrix} \{\Delta_e\} \\ \{\Delta_c\} \\ \{\Delta_c\} \\ \{\Delta_c\} \\ \{\Delta_c\} \\ \{\Delta_c\} \end{matrix}$ $\left\{ (\bar{A}_r)^{-2} \right\}_m = \begin{matrix} 200 & 6 & \{P_e\} \\ 0 & 4 & \\ 166.67 & 7 & \{P_{cc}\} \\ 0 & 8 & \{P_{cc}\} \\ 200 & 9 & \\ -166.67 & 10 & \end{matrix}$
--	---

προκύπτουν οι μετατοπίσεις κατά τους καθολ. β.ε. 5,6 ως

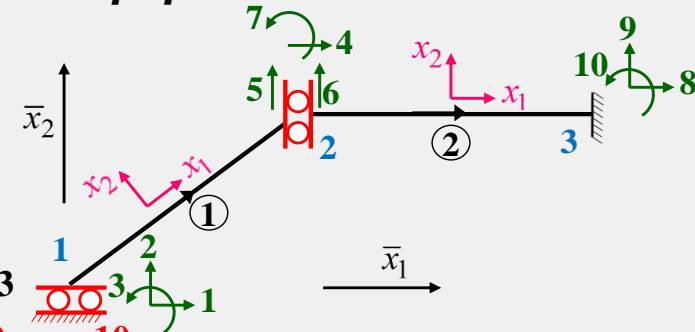
$$\{\Delta_e\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -41.91 \\ -249.85 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

Ακολουθεί ο υπολογισμός των τοπικών ακραίων δράσεων και η χάραξη των διαγραμμάτων εντατικών μεγεθών των μελών του πλαισίου (ίδια με τα προηγούμενα)

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ - Στατική συμπίκνωση και θεώρηση ενός υπερστοιχείου

Ακολουθούνται τα βήματα της θεώρησης συνδυασμένων κόμβων μέχρι τη μόρφωση του καθολικού μητρώου στιβαρότητας του φορέα του πλαισίου.

**Μόρφωση καθολικού μητρώου
 στιβαρότητας πλαισίου**



$$[K] = EI$$

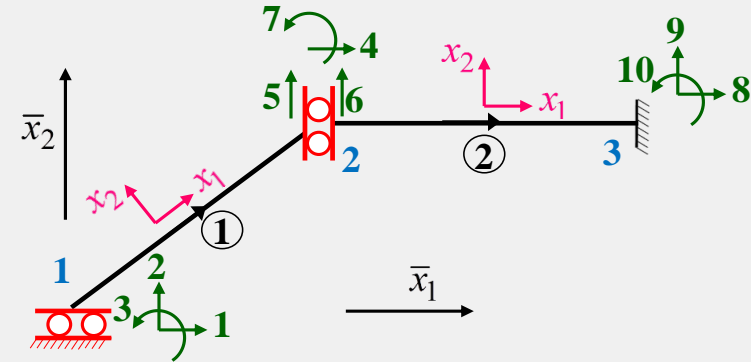
	#1			#2				#3			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
	4,301	3,154	-0,144	-4,301	-3,154	0,000	-0,144	0,000	0,000	0,000	1
	3,154	2,461	0,192	-3,154	-2,461	0,000	0,192	0,000	0,000	0,000	2
	-0,144	0,192	0,800	0,144	-0,192	0,000	0,400	0,000	0,000	0,000	3
	-4,301	-3,154	0,144	10,968	3,154	0,000	0,144	-6,667	0,000	0,000	4
	-3,154	-2,461	-0,192	3,154	2,461	0,000	-0,192	0,000	0,000	0,000	5
	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,096	0,240	0,000	-0,096	0,240	6
	-0,144	0,192	0,400	0,144	-0,192	0,240	1,600	0,000	-0,240	0,400	7
	0,000	0,000	0,000	-6,667	0,000	0,000	0,000	6,667	0,000	0,000	8
	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-0,096	-0,240	0,000	0,096	-0,240	9
	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,240	0,400	0,000	-0,240	0,800	10

**Καθολικό
 μητρώο
 στιβαρότητας
 πλαισίου**

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ - Στατική συμπύκνωση και θεώρηση ενός υπερστοιχείου

Μόρφωση αναδιατεταγμένης καθολικής εξίσωσης ισορροπίας πλαισίου

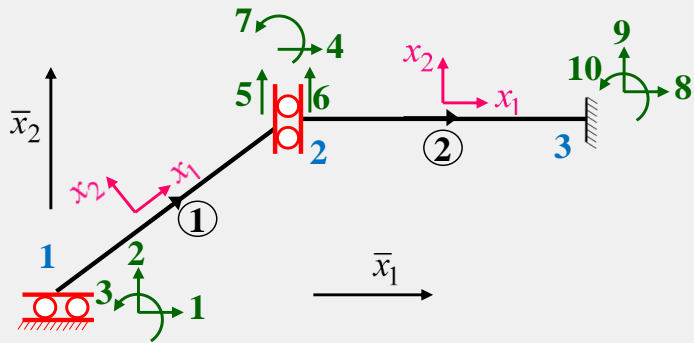
Εφαρμόζεται στατική συμπύκνωση των εσωτερικών βαθμών ελευθερίας, δηλαδή των 4 βαθμών ελευθερίας του κόμβου (2). Έτσι, προκειμένου να επιτευχθεί η απαλοιφή των βαθμών ελευθερίας 4, 5, 6, 7 του κόμβου 2 μορφώνεται για το σύνολο του φορέα η αναδιατεταγμένη καθολική εξίσωση ισορροπίας



Αναδιατεταγμένη καθολική εξίσωση ισορροπίας του φορέα

$$\begin{matrix} \{P_e\} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \{P_{cc}\} \end{matrix} \begin{matrix} \bar{P}_4 \\ \bar{P}_5 \\ \bar{P}_6 \\ \bar{P}_7 \\ \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_3 \\ \bar{P}_8 \\ \bar{P}_9 \\ \bar{P}_{10} \end{matrix} = EI \begin{matrix} [K_{ee}] & & \\ & [K_{ec}] & \\ & & [K_{ce}] & \\ & & & [K_{cc}] \end{matrix} \begin{matrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 8 & 9 & 10 \\ \begin{matrix} \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \bar{\Delta}_{10} \end{matrix} \\ \{ \Delta_e \} \\ \\ \\ \{ \Delta_c \} \end{matrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ - Στατική συμπίκνωση και θεώρηση ενός υπερστοιχείου



Υπολογισμός συμπτυκνωμένου καθολικού μητρώου στιβαρότητας φορέα λόγω συμπίκνωσης των καθολικών βαθμών ελευθερίας 4,5,6,7

Αντικαθιστώντας τα υπομητρώα της προηγούμενης σχέσης στη σχέση

$$[K_c] = [K_{cc}] - [K_{ce}] [K_{ee}]^{-1} [K_{ec}]$$

το συμπτυκνωμένο μητρώο στιβαρότητας του φορέα προκύπτει ως

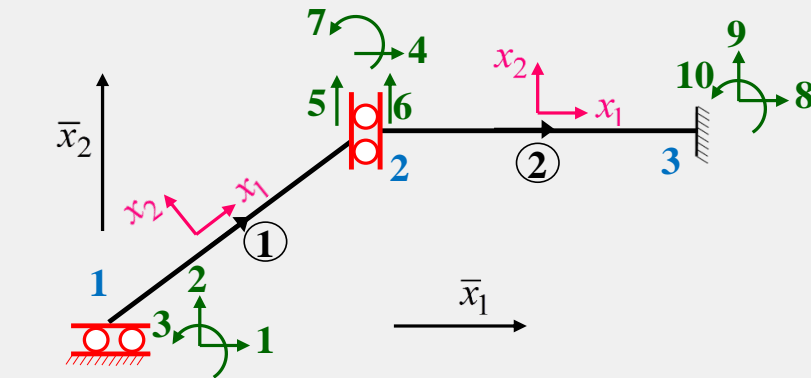
$$[\bar{K}_c] = EI \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.104 & 0.000 & -0.234 & -0.104 & 0.000 & -0.078 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -0.234 & 0.000 & 0.626 & 0.234 & 0.000 & 0.075 \\ -0.104 & 0.000 & 0.234 & 0.104 & 0.000 & 0.078 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -0.078 & 0.000 & 0.075 & 0.078 & 0.000 & 0.158 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

(παρατηρούνται τα μηδενικά στοιχεία της δεύτερης και πέμπτης γραμμής και στήλης, τα οποία αντίστοιχούν σε κίνηση στερεού σώματος)

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ - Στατική συμπίκνωση και θεώρηση ενός υπερστοιχείου

Τροποποίηση καθολικού συμπυκνωμένου μητρώου στιβαρότητας πλαισίου λόγω αναδιάταξης

$$\begin{array}{l}
 \text{ελεύθεροι} \\
 \text{δεσμευμένοι} \\
 \text{βαθμοί}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 8 \\
 9 \\
 10
 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l}
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 8 \\
 9 \\
 10
 \end{array} \right\}$$



Μητρώο αναδιάταξης $[V]$

δηλαδή το μητρώο αναδιάταξης είναι το μοναδιαίο μητρώο $[V] = [I]$

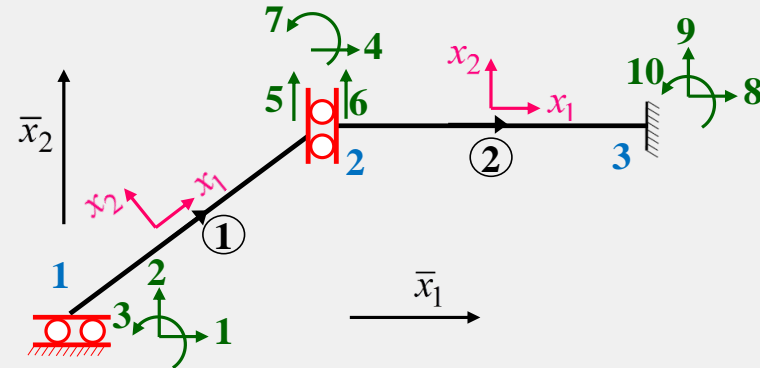
και επομένως

$$[\bar{K}_m] = [V][\bar{K}_c][V]^T = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{ff}] & [\bar{K}_{fs}] \\ [\bar{K}_{sf}] & [\bar{K}_{ss}] \end{bmatrix} = [\bar{K}_c]$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ - Στατική συμπίκνωση και θεώρηση ενός υπερστοιχείου

Αναδιατεταγμένο συμπυκνωμένο καθολικό μητρώο στιβαρότητας πλαισίου (1^η τροποποίηση)

$$[\bar{K}_m] = [V][\bar{K}_c][V]^T = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{ff}] & [\bar{K}_{fs}] \\ [\bar{K}_{sf}] & [\bar{K}_{ss}] \end{bmatrix} = [\bar{K}_c] =$$



	1	2	3	8	9	10	
$= EI$	0.104	0.000	-0.234	-0.104	0.000	-0.078	1
	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	2
	-0.234	0.000	0.626	0.234	0.000	0.075	3
	-0.104	0.000	0.234	0.104	0.000	0.078	8
	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	9
	-0.078	0.000	0.075	0.078	0.000	0.158	10

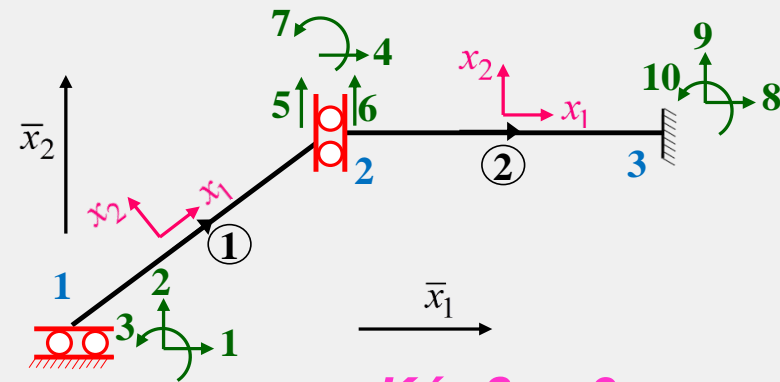
(παρατηρούνται τα μηδενικά στοιχεία της δεύτερης και πέμπτης γραμμής και στήλης, τα οποία αντίστοιχούν σε κίνηση στερεού σώματος)

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ -

Στατική συμπίκνωση και θεώρηση ενός υπερστοιχείου

Ανάλυση παγιωμένου φορέα – Ο υπολογισμός των τοπικών και καθολικών ακραίων δράσεων των μελών 1, 2, και η μόρφωση των μητρώων επικόμβιων δράσεων και μετακινήσεων του συνόλου του πλαισίου γίνεται όπως και στη θεώρηση συνδυασμένου κόμβου κατά την πρώτη θεώρηση.

Έτσι, ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφηκε στα προηγούμενα, οι δράσεις παγίωσης των κόμβων του φορέα προκύπτουν ως



Κόμβος 1 :

Κόμβος 2 :

Κόμβος 3 :

$$\left\{ \bar{S}^{(1)} \right\} = \left\{ \bar{A}_r^{1j} \right\} = \begin{Bmatrix} 0.00 \\ 160 \\ 106.67 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{matrix} \quad \left\{ \bar{S}^{(2)} \right\} = \left\{ \bar{A}_r^{1k} \right\} + \left\{ \bar{A}_r^{2j} \right\} = \begin{Bmatrix} 155.9 \\ 160 \\ 200 \\ 60 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{6} \\ \mathbf{7} \end{matrix} \quad \left\{ \bar{S}^{(3)} \right\} = \left\{ \bar{A}_r^{2k} \right\} = \begin{Bmatrix} 0.00 \\ 200 \\ -166.67 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{8} \\ \mathbf{9} \\ \mathbf{10} \end{matrix}$$

και επομένως τα αρχικά διανύσματα επικόμβιων δράσεων και μετακινήσεων γράφονται ως

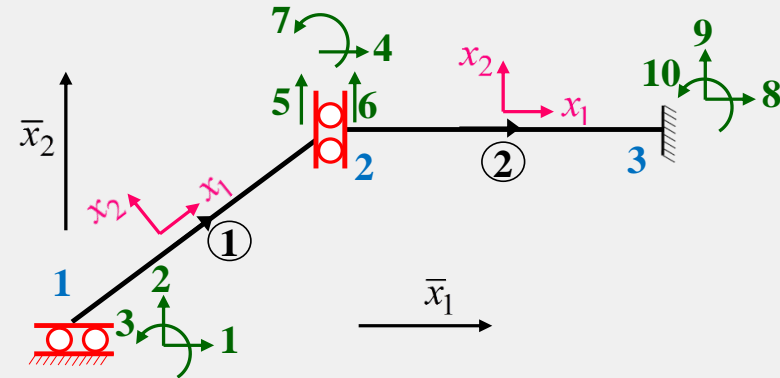


ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ -

Στατική συμπίκνωση και θεώρηση ενός υπερστοιχείου

Ανάλυση παγιωμένου φορέα – Ο υπολογισμός των τοπικών και καθολικών ακραίων δράσεων των μελών 1, 2, και η μόρφωση των μητρώων επικόμβιων δράσεων και μετακινήσεων του συνόλου του πλαισίου γίνεται όπως και στη θεώρηση συνδυασμένου κόμβου κατά την πρώτη θεώρηση.

$$\{\bar{P}\} = \{\bar{P}^{nodal} - \bar{S}\} = \begin{Bmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \bar{R}_2^{(1)} - 160 & \mathbf{2} \\ \bar{R}_3^{(1)} - 106.67 & \mathbf{3} \\ 0.00 & \mathbf{4} \\ -160 & \mathbf{5} \\ -200 & \mathbf{6} \\ -60 & \mathbf{7} \\ \bar{R}_1^{(3)} & \mathbf{8} \\ \bar{R}_2^{(3)} - 200 & \mathbf{9} \\ \bar{R}_3^{(3)} + 106.67 & \mathbf{10} \end{Bmatrix} \quad \{\bar{\Delta}\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 & \mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{2} \\ 0 & \mathbf{3} \\ \bar{\Delta}_4 & \mathbf{4} \\ \bar{\Delta}_5 & \mathbf{5} \\ \bar{\Delta}_6 & \mathbf{6} \\ \bar{\Delta}_7 & \mathbf{7} \\ 0 & \mathbf{8} \\ 0 & \mathbf{9} \\ 0 & \mathbf{10} \end{Bmatrix}$$

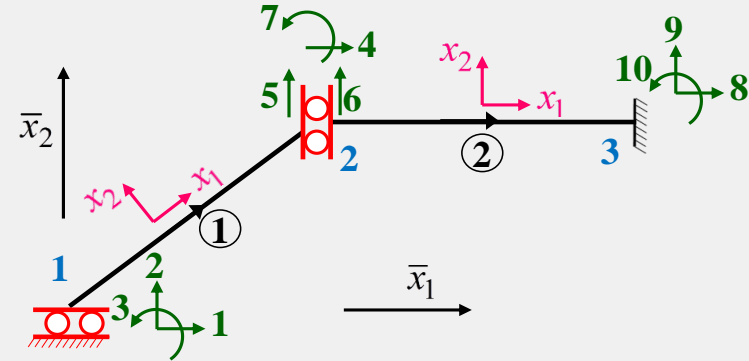


Ακολουθεί στατική συμπίκνωση των βαθμών ελευθερίας του κόμβου 2 (αφού προηγηθεί αναδιάταξη)



ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ - Στατική συμπύκνωση και θεώρηση ενός υπερστοιχείου

Υπολογισμός καθολικών μητρώων ολικών ακραίων δράσεων και μετακινήσεων του υπερστοιχείου 1-2-3 (λόγω συμπύκνωσης των εσωτερικών καθολικών βαθμών ελευθερίας 4,5,6,7)



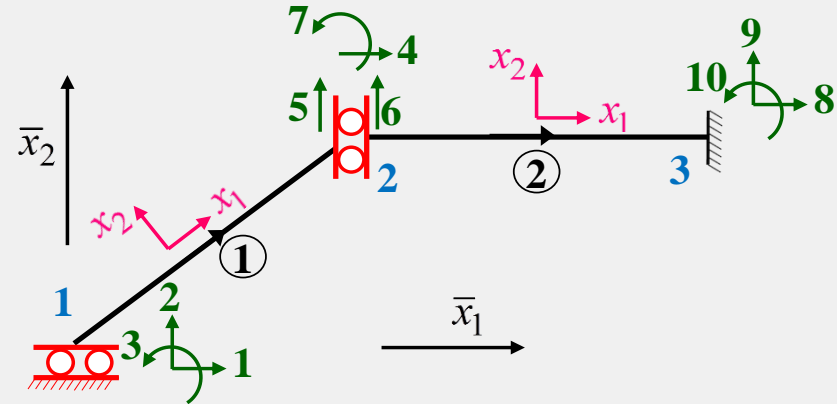
$$\{\bar{P}_c\} = \{\bar{P}_{cc}\} - [\bar{K}_{ce}] [\bar{K}_{ee}]^{-1} \{\bar{P}_e\}$$

$$\{\bar{P}_c\} = \begin{bmatrix} \{\bar{P}_f\} \\ \{\bar{P}_s\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -35.2 & \mathbf{1} \\ \bar{R}_2^{(1)} - 320 & \mathbf{2} \\ \bar{R}_3^{(1)} - 287.5 & \mathbf{3} \\ \bar{R}_1^{(3)} + 35.2 & \mathbf{8} \\ \bar{R}_2^{(3)} - 400 & \mathbf{9} \\ \bar{R}_3^{(3)} + 753.1 & \mathbf{10} \end{bmatrix}$$

$$\{\bar{\Delta}_c\} = \begin{bmatrix} \{\bar{\Delta}_f\} \\ \{\bar{\Delta}_s\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_1 & \mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{2} \\ 0 & \mathbf{3} \\ 0 & \mathbf{8} \\ 0 & \mathbf{9} \\ 0 & \mathbf{10} \end{bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ - Στατική συμπίκνωση και θεώρηση ενός υπερστοιχείου

(τα αναδιατεταγμένα μητρώα ακραίων δράσεων και μετακινήσεων του υπερστοιχείου ταυτίζονται με τα αρχικά)



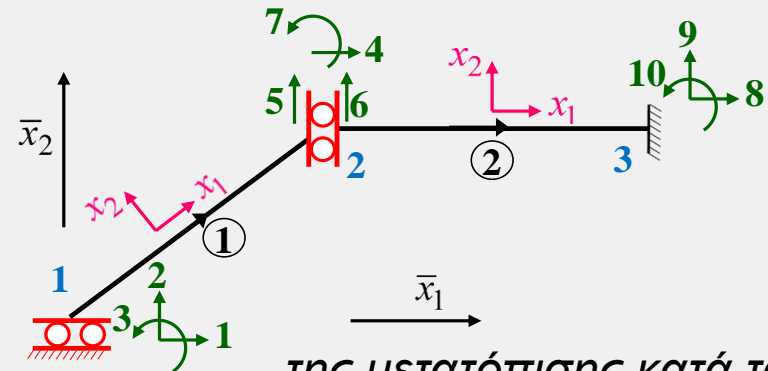
Επίλυση –
Επικόμβιες μετακινήσεις κατά τους ελεύθερους και επικόμβιες δράσεις (αντιδράσεις) κατά τους δεσμευμένους β.ε.

$$[\bar{\Delta}_f] = \{\bar{\Delta}_1\} = \{-29.85\} \cdot 10^{-4}$$

$$\{\bar{P}_s\} = \begin{Bmatrix} \bar{R}_2^{(1)} \\ \bar{R}_3^{(1)} \\ \bar{R}_1^{(3)} \\ \bar{R}_2^{(3)} \\ \bar{R}_3^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 320.00 \\ 366.67 \\ 0.00 \\ 400.00 \\ -726.67 \end{Bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΛΟΣΩΜΟΥ ΦΟΡΕΑ -

Στατική συμπίκνωση και θεώρηση ενός υπερστοιχείου



Υπολογισμός μετακινήσεων κατά τους καθολικούς βαθμούς ελευθερίας 4,5,6,7 που συμπεκνώθηκαν σε προηγούμενο βήμα

Με τη βοήθεια της σχέσης

$$\{\Delta_e\} = [K_{ee}]^{-1} (\{P_e\} - [K_{ec}]\{\Delta_c\})$$

της μετατόπισης κατά τον β.ε. 1 που υπολογίστηκε προηγουμένως και των υπομητρώων των σχέσεων που αναφέρθηκαν σε προηγούμενο βήμα

$$\begin{matrix} \{P_e\} \\ \{P_{cc}\} \end{matrix} = EI \begin{matrix} [K_{ee}] & [K_{ec}] \\ [K_{ce}] & [K_{cc}] \end{matrix} \begin{matrix} \{\Delta_e\} \\ \{\Delta_c\} \end{matrix}$$

$$\{\bar{P}\} = \{\bar{P}^{nodal} - \bar{S}\} = \begin{matrix} 0 \\ \bar{R}_2^{(1)} - 160 \\ \bar{R}_3^{(1)} - 106.67 \\ 0.00 \\ -160 \\ -200 \\ -60 \\ \bar{R}_1^{(3)} \\ \bar{R}_2^{(3)} - 200 \\ \bar{R}_3^{(3)} + 106.67 \end{matrix}$$

$$\{\Delta_e\} = \begin{matrix} \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \end{matrix} = \begin{matrix} 0.00 \\ -41.91 \\ -249.85 \\ 26.46 \end{matrix} \cdot 10^{-4}$$

προκύπτουν οι μετατοπίσεις κατά τους καθολ. β.ε. 4,5,6,7 ως

Ακολουθεί ο υπολογισμός των τοπικών ακραίων δράσεων και η χάραξη των διαγραμμάτων εντατικών μεγεθών των μελών του πλαισίου (ίδια με τα προηγούμενα)