



ΕΣΩΤΕΡΙΚΕΣ ΕΛΕΥΘΕΡΩΣΕΙΣ – ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΩΝ ΜΗΤΡΩΩΝ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ

Ε.Ι. Σαπουντζάκης
Καθηγητής ΕΜΠ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΡΑΒΔΩΤΩΝ ΦΟΡΕΩΝ ΜΕ
ΜΗΤΡΩΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή
2. Τροποποιημέα μητρώα στιβαρότητας
3. Τροποποιημένα μητρώα και εσωτερικές ελευθερώσεις
4. Δράσεις παγίωσης – Ισοδύναμες δράσεις.
5. Εφαρμογή – Ανάλυση επίπεδου πλαισίου με τη μέθοδο τροποποιημένων μητρώων στιβαρότητας

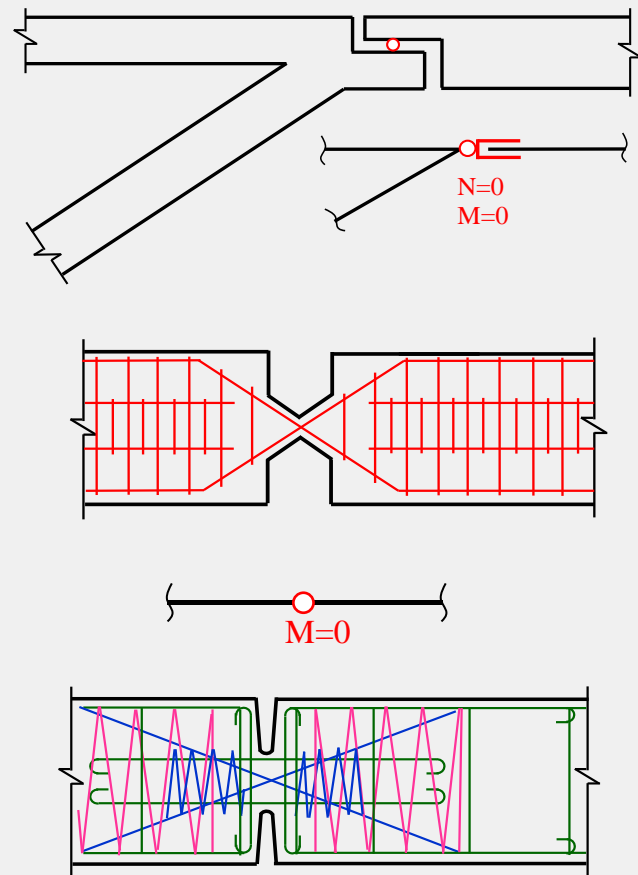
ΕΙΣΑΓΩΓΗ

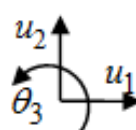
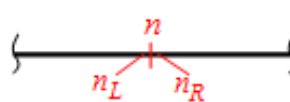
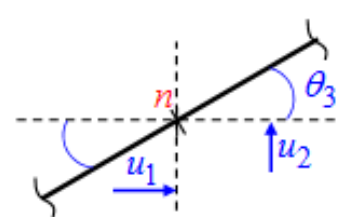
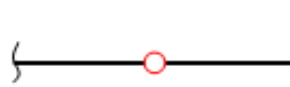
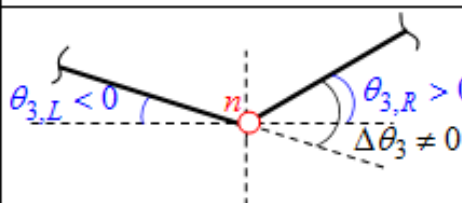
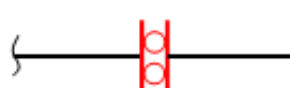
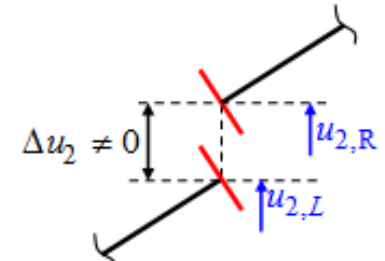
ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα σημεία σύνδεσης δύο γραμμικών στοιχείων είναι οι γνωστοί **κόμβοι** του φορέα. Στην περίπτωση κατά την οποία η σύνδεση γίνεται με **μονολιθικό τρόπο** (πλήρης σύνδεση), τότε μεταφέρονται όλα τα αναπτυσσόμενα εντατικά μεγέθη. Αν για κάποιο λόγο (κατασκευαστικό, λειτουργικό ή στατικό) δεν είναι επιθυμητή ή δυνατή η μεταφορά συγκεκριμένων εντατικών μεγεθών διατομής, τότε η σύνδεση των στοιχείων παρουσιάζει **εσωτερική ελευθέρωση**. Ειδικότερα, η αδυναμία μεταφοράς **αξονικών δυνάμεων** ή **τεμνουσών δυνάμεων** ή **καμπτικών ροπών** ή **στρεπτικών ροπών** σημαίνει ότι τα στοιχεία συνδέονται με **αξονική** ή **διατμητική** ή **καμπτική** ή **στρεπτική ελευθέρωση**, αντίστοιχα. Η σύνδεση δύο γραμμικών στοιχείων μπορεί να γίνει με τρόπο που να αποκλείεται η μεταφορά όχι μόνο ενός, αλλά περισσότερων εντατικών μεγεθών (**πολλαπλή εσωτερική ελευθέρωση**).

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Χαρακτηριστικές εσωτερικές ελευθερώσεις

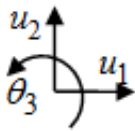

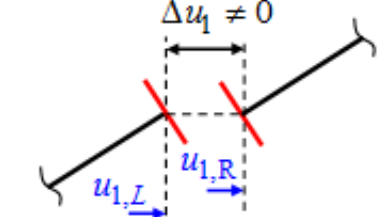

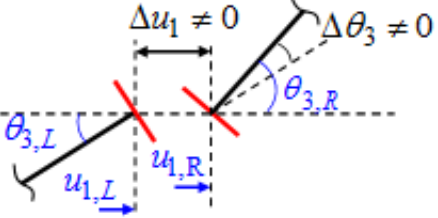
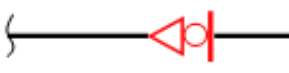
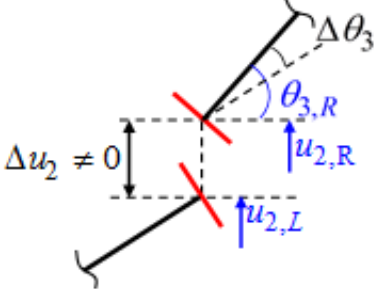


 u_2 u_1 θ_3	Συμβολισμός	Άγνωστα μεγέθη στον κόμβο n	Παραμορφωμένη κατάσταση
Μονολιθική Σύνδεση $\Delta u_1 = u_{1,R} - u_{1,L} = 0$ $\Delta u_2 = u_{2,R} - u_{2,L} = 0$ $\Delta \theta_3 = \theta_{3,R} - \theta_{3,L} = 0$		M, Q, N u_1, u_2, θ_3	
Καμπτική ελευθέρωση M = 0 $\Delta u_1 = \Delta u_2 = 0$		Q, N u_1, u_2 $\Delta \theta_3$	
Διατμητική ελευθέρωση Q = 0 $\Delta u_1 = \Delta \theta_3 = 0$		M, N u_1, θ_3 Δu_2	

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

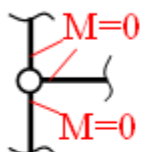
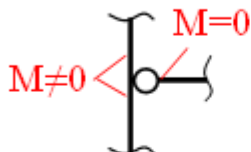
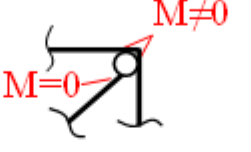
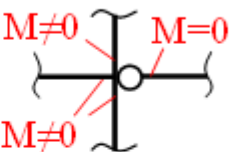
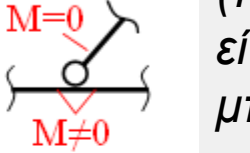
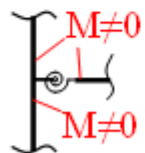
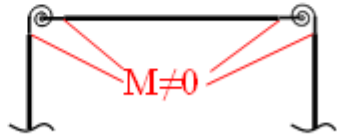
Χαρακτηριστικές εσωτερικές ελευθεώσεις

Η εισαγωγή εσωτερικής ελευθέρωσης σε σημείο φορέα έχει άμεση επίπτωση στα κινηματικά μεγέθη που αναπτύσσονται εκατέρωθεν του σημείου αυτού. Η μονολιθική σύνδεση των άκρων των δύο συνδεόμενων στοιχείων δεν υφίσταται πλέον και τα δύο αυτά άκρα μπορούν να εμφανίσουν διαφορετικές μετακινήσεις (μετατοπίσεις ή/και στροφές). Αυτό σημαίνει ότι στην **καμπτική ελευθέρωση** ($M=0$) εμφανίζεται **γόνατο** $\Delta\theta_3 \neq 0$, στη **διατμητική ελευθέρωση** ($Q=0$) **άλμα** $\Delta u_2 \neq 0$ και στην **αξονική ελευθέρωση** ($N=0$) **χάσμα** $\Delta u_1 \neq 0$.

	Συμβολισμός	Άγνωστα μεγέθη στον κόμβο n	Παραμορφωμένη κατάσταση
Αξονική ελευθέρωση $N=0$ $\Delta u_2 = \Delta \theta_3 = 0$		M, Q u_2, θ_3 Δu_1	
Κατακόρυφη Σύνδεση $M=N=0$ $\Delta u_2 = 0$		Q u_2 $\Delta u_1, \Delta \theta_3$	
Οριζόντια Σύνδεση $M=Q=0$ $\Delta u_1 = 0$		N u_1 $\Delta u_2, \Delta \theta_3$	

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Πλήρεις, μονόπλευρες και ελαστικές ελευθερώσεις

Πλήρης Αρθρωση	Μονόπλευρες Αρθρώσεις				
 <p>(α)</p>	 <p>(β)</p>	 <p>(γ)</p>	 <p>(δ)</p>	 <p>(ε)</p>	
Ελαστικοί κόμβοι					
 <p>(στ)</p>	 <p>(ζ)</p>				

Σε περίπτωση κόμβου φορέα στον οποίο συνδέονται τρία ή περισσότερα μέλη, η εσωτερική ελευθέρωση (π.χ. άρθρωση) μπορεί να είναι **μονόπλευρη**. Επίσης, μπορεί να θεωρηθεί ότι ναι μεν δεν επιτυγχάνεται μονολιθική σύνδεση, εντούτοις όμως μπορεί να μεταφερθεί ικανό ποσοστό ροπής. Στις περιπτώσεις αυτές ο κόμβος σύνδεσης ονομάζεται **ελαστικός κόμβος**, η σύνδεση θεωρείται ημιάκαμπτη ή αλλιώς ενδόσιμη.

ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΑ ΜΗΤΡΩΑ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ

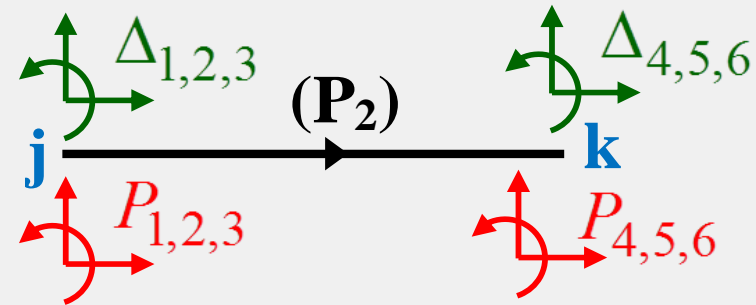
ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΑ ΜΗΤΡΩΑ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ

Η **απαλοιφή** ακραίων βαθμών ελευθερίας ενός στοιχείου i από την εξίσωση ισορροπίας του στο τοπικό ή στο καθολικό σύστημα αξόνων οδηγεί σε **τροποποιημένη εξίσωση ισορροπίας** με διαφορετικό μητρώο στιβαρότητας, το οποίο ονομάζεται **"τροποποιημένο" μητρώο στιβαρότητας** του στοιχείου.

Το στοιχείο τύπου P_2 (στοιχείο δοκού στο επίπεδο) μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελεί φορέα με μητρική εξίσωση ισορροπίας ως προς τοπικό ή καθολικό σύστημα αξόνων.

$$\{P\} = [K]\{\Delta\}$$

Θεωρώντας ότι οι μετακινήσεις του στοιχείου-φορέα χωρίζονται σε **μετακινήσεις προς απαλοιφή** $\{\Delta_e\}$ (eliminated) και **παραμένουσες μετακινήσεις** $\{\Delta_c\}$ (condensed), η μητρική εξίσωση ισορροπίας που προαναφέρθηκε, μετά τον χωρισμό και την αναδιάταξη των αντίστοιχων γραμμών και στηλών των μητρώων στιβαρότητας και ακραίων δράσεων και μετακινήσεων γράφεται ως



ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΑ ΜΗΤΡΩΑ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ

Αναδιατεταγμένη μητρική εξίσωση ισορροπίας
$$\begin{bmatrix} \{P_e\} \\ \{P_{cc}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ee}] & [K_{ec}] \\ [K_{ce}] & [K_{cc}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Delta_e\} \\ \{\Delta_c\} \end{bmatrix}$$

όπου $\{P_e\}$, $\{P_{cc}\}$ είναι οι συνιστώσες των ακραίων δράσεων που αντιστοιχούν στις συνιστώσες των μετακινήσεων $\{\Delta_e\}$, $\{\Delta_c\}$

Αναπτύσσοντας τις δύο μητρικές εξισώσεις της προηγούμενης σχέσης προκύπτει
$$\{P_e\} = [K_{ee}]\{\Delta_e\} + [K_{ec}]\{\Delta_c\} \quad (1)$$

$$\{P_{cc}\} = [K_{ce}]\{\Delta_e\} + [K_{cc}]\{\Delta_c\} \quad (2)$$

Επιλύοντας την (1) ως προς $\{\Delta_e\}$ προκύπτει
$$\{\Delta_e\} = [K_{ee}]^{-1} (\{P_e\} - [K_{ec}]\{\Delta_c\})$$

και αντικαθιστώντας στη (2) προκύπτει
$$\{P_{cc}\} - [K_{ce}][K_{ee}]^{-1}\{P_e\} = ([K_{cc}] - [K_{ce}][K_{ee}]^{-1}[K_{ec}])\{\Delta_c\}$$

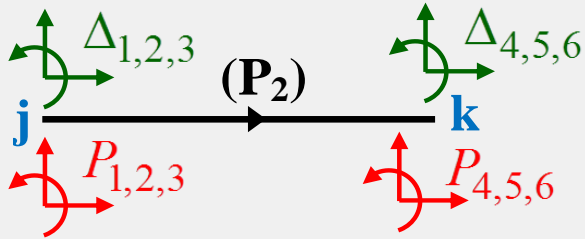
δηλαδή

τροποποιημένη εξίσωση ισορροπίας
$$\boxed{\{P_c\} = [K_c]\{\Delta_c\}} \quad \text{όπου}$$

τροποποιημένο μητρώο στιβαρότητας
$$[K_c] = [K_{cc}] - [K_{ce}][K_{ee}]^{-1}[K_{ec}]$$

τροποποιημένο διάνυσμα ακραίων δράσεων
$$\{P_c\} = \{P_{cc}\} - [K_{ce}][K_{ee}]^{-1}\{P_e\}$$

ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΑ ΜΗΤΡΩΑ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ

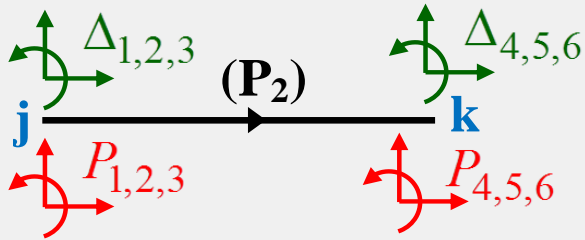


Για παράδειγμα εξετάζεται η **απαλοιφή της στροφής του άκρου k (Δ_6)** μέλους τύπου P2 (στοιχείο δοκού στο επίπεδο).

Αναδιατεταγμένη μητρική εξίσωση ισορροπίας

$$\begin{array}{c}
 \{P_e\} \\
 \{P_{cc}\}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 P_6 \\
 P_1 \\
 P_2 \\
 P_3 \\
 P_4 \\
 P_5
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 [K_{ee}] \\
 [K_{ec}] \\
 [K_{ce}] \\
 [K_{cc}]
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \Delta_6 \\
 \Delta_1 \\
 \Delta_2 \\
 \Delta_3 \\
 \Delta_4 \\
 \Delta_5
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \{ \Delta_e \} \\
 \\
 \\
 \{ \Delta_c \} \\
 \\
 \end{array}$$

ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΑ ΜΗΤΡΩΑ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ



Για παράδειγμα εξετάζεται η **απαλοιφή της στροφής του άκρου k (Δ_6)** μέλους τύπου P2 (στοιχείο δοκού στο επίπεδο).

Μετά τον υπολογισμό του τροποποιημένου μητρώου στιβαρότητας μπορεί να γραφεί η

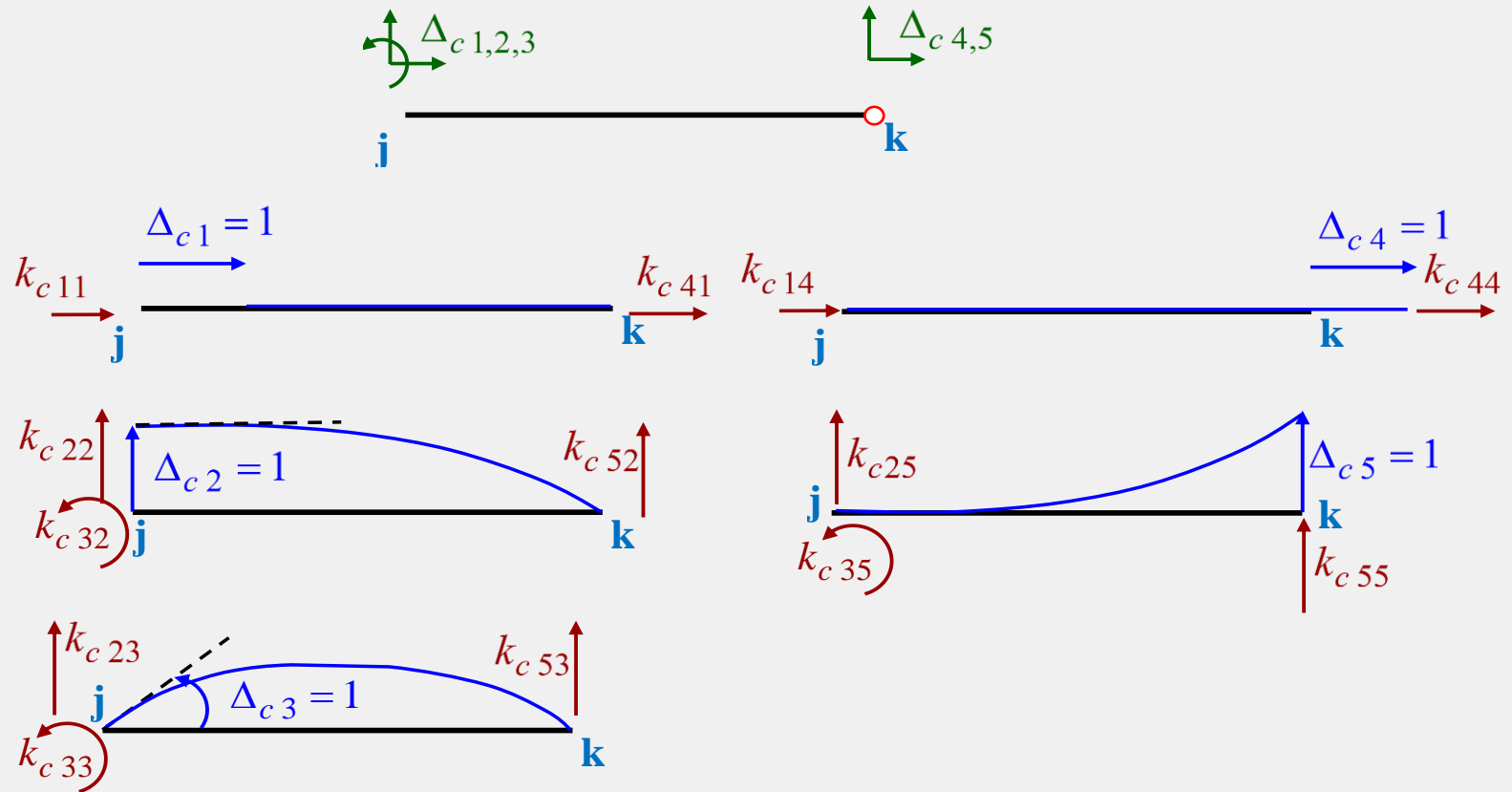
$$[K_c] = [K_{cc}] - [K_{ce}] [K_{ee}]^{-1} [K_{ec}]$$

Τροποποιημένη μητρική εξίσωση ισορροπίας

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} AE/L & 0 & 0 & -AE/L & 0 \\ 0 & 3EI/L^3 & 3EI/L^2 & 0 & -3EI/L^3 \\ 0 & EI/L^2 & 3EI/L & 0 & -3EI/L^2 \\ -AE/L & 0 & 0 & AE/L & 0 \\ 0 & -3EI/L^3 & -3EI/L^2 & 0 & 3EI/L^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \end{Bmatrix}$$

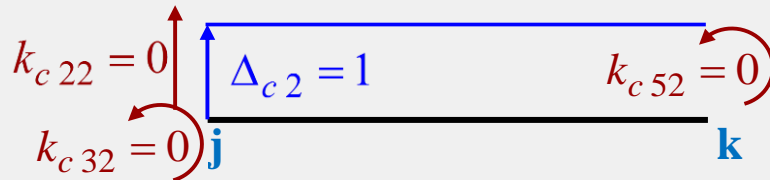
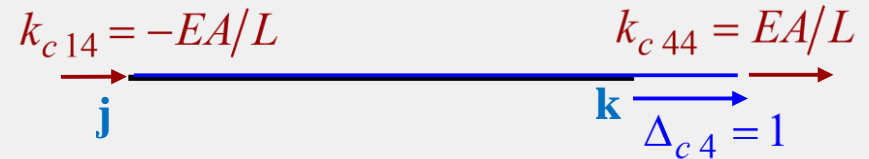
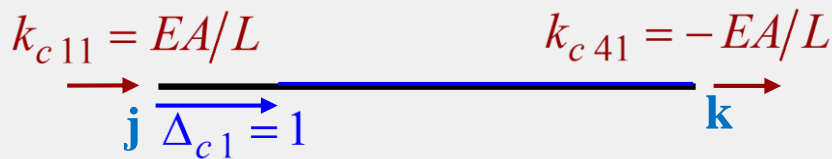
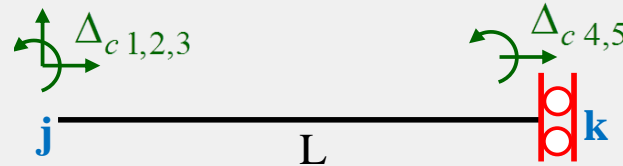
ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΑ ΜΗΤΡΩΑ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ

Από το τροποποιημένο μητρώο στιβαρότητας προκύπτουν οι **Δείκτες στιβαρότητας μονόπακτης δοκού στο επίπεδο με άρθρωση στο άκρο k**

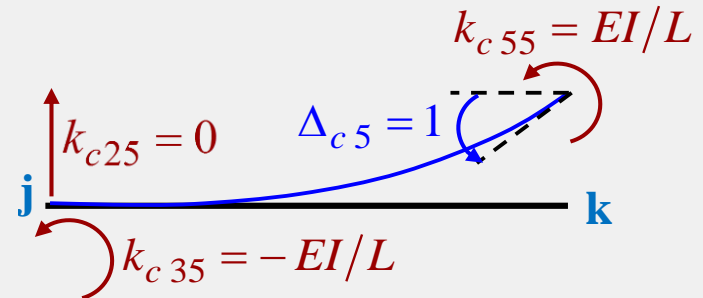
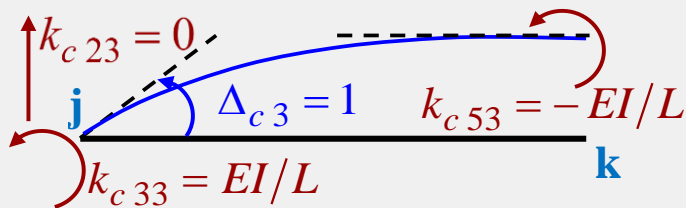


ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΑ ΜΗΤΡΩΑ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ

Όμοια εξετάζεται η απαλοιφή της εγκάρσιας μετατόπισης του άκρου k (Δ_5) μέλους $P2$
Δείκτες στιβαρότητας δοκού στο επίπεδο με εγκάρσια ελευθέρωση στο άκρο k .



(Μηδενική στήλη)



ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΑ ΜΗΤΡΩΑ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ

Όμοια εξετάζεται η απαλοιφή της εγκάρσιας μετατόπισης του άκρου k (Δ_5) μέλους $P2$

Δείκτες στιβαρότητας δοκού στο επίπεδο με εγκάρσια ελευθέρωση στο άκρο k .

Έχει διατυπωθεί ότι τα διαγώνια στοιχεία μητρώου στιβαρότητας είναι πάντα θετικά, δηλαδή $k_{mm} > 0$

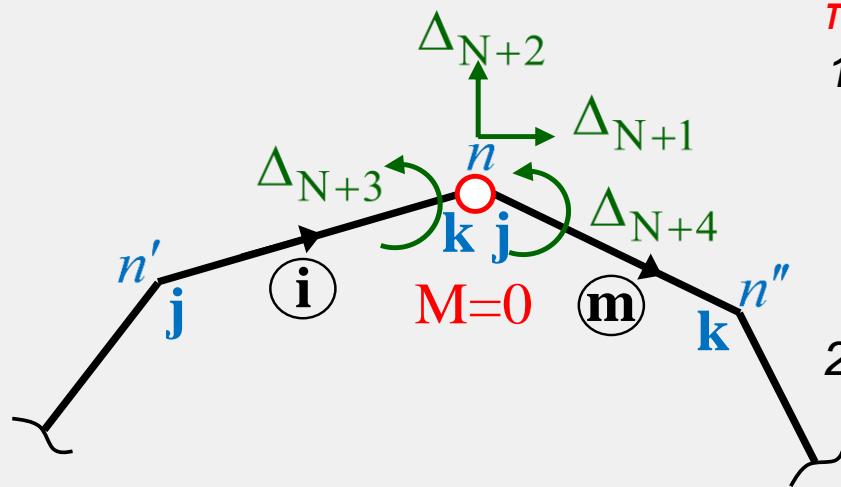
Παρ' όλα αυτά είναι δυνατόν το τροποποιημένο μητρώο στιβαρότητας να έχει **μηδενική γραμμή και στήλη**

Αυτό συμβαίνει, για παράδειγμα, κατά την απαλοιφή της συνιστώσας Δ_5 στοιχείου $P2$ όπου οι δείκτες στιβαρότητας (K_{ci2} ($i=1,2, \dots,5$)) είναι μηδέν λόγω μηδενικής αντίστασης κατά την εγκάρσια μετατόπιση του τροποποιημένου στοιχείου. Πράγματι, οι βαθμοί ελευθερίας που μπορούν να απαλειφθούν καθορίζονται από την απαιτούμενη ευστάθεια του τροποποιημένου στοιχείου. Εάν το τροποποιημένο στοιχείο, μετά την απαλοιφή των βαθμών ελευθερίας είναι ευσταθές με τη δέσμευση των ενεργών βαθμών ελευθερίας, τότε μπορεί να πραγματοποιηθεί και αλγεβρικά η τροποποίηση της εξίσωσης. Στην περίπτωση κατά την οποία το τροποποιημένο στοιχείο είναι μηχανισμός, τότε η απαλοιφή δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί διότι η ορίζουσα του μητρώου $[K_{ee}]$ γίνεται μηδενική.

ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΑ ΜΗΤΡΩΑ ΚΑΙ ΕΣΩΤΕΡΙΚΕΣ ΕΛΕΥΘΕΡΩΣΕΙΣ

ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΑ ΜΗΤΡΩΑ ΚΑΙ ΕΣΩΤΕΡΙΚΕΣ ΕΛΕΥΘΕΡΩΣΕΙΣ

Η αντιμετώπιση της άρθρωσης μπορεί να γίνει με τρεις εναλλακτικές τροποποιήσεις ανάλογα με το που θεωρείται ότι εφαρμόζεται η άρθρωση.



1. Αν θεωρηθεί ότι εφαρμόζεται στο άκρο k του στοιχείου (i) , τότε απαλείφεται ο στροφικός βαθμός ελευθερίας Δ_6 του στοιχείου (i) και οι ενεργοί βαθμοί ελευθερίας του κόμβου (n) περιορίζονται στους $\Delta_{N+1}, \Delta_{N+2}, \Delta_{N+4}$.
2. Αν θεωρηθεί ότι εφαρμόζεται στο άκρο j του στοιχείου (m) , τότε απαλείφεται ο στροφικός βαθμός ελευθερίας Δ_3 του στοιχείου (m) με παραμένοντες ενεργούς βαθμούς ελευθερίας του κόμβου (n) τους $\Delta_{N+1}, \Delta_{N+2}, \Delta_{N+3}$.

3. Αν τέλος θεωρηθεί ότι η άρθρωση επιδρά στα άκρα και των δύο στοιχείων (i) , (m) , κάτι που δεν αλλοιώνει τη στατική συμπεριφορά του φορέα, τότε τροποποιούνται και τα δύο στοιχεία κατά τους αντίστοιχους βαθμούς ελευθερίας και οι ενεργοί βαθμοί ελευθερίας του κόμβου (n) περιορίζονται στους $\Delta_{N+1}, \Delta_{N+2}$.

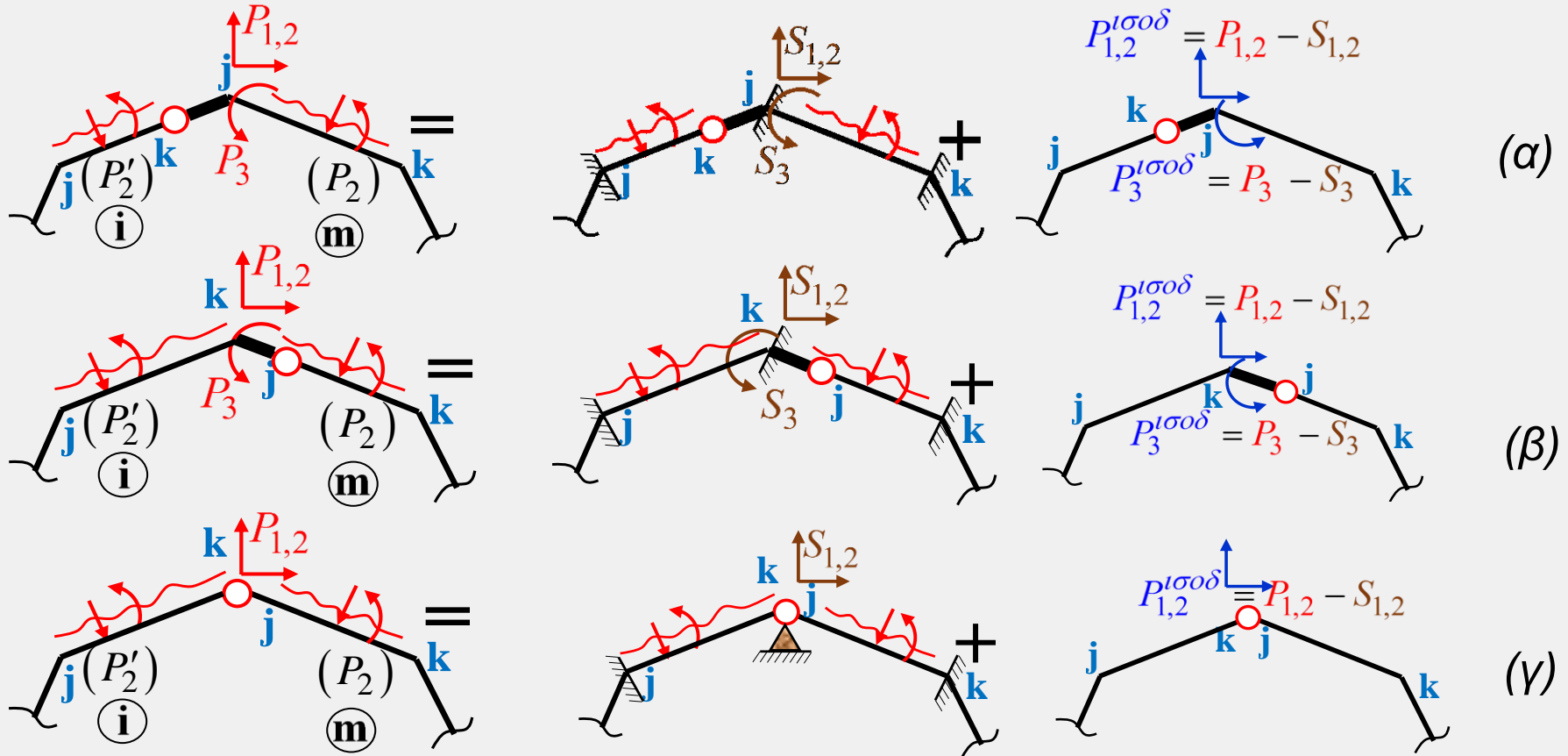
Ακολουθεί η μόρφωση του μητρώου στιβαρότητας του φορέα με τη βοήθεια των τροποποιημένων μητρώων στιβαρότητας των μελών.

ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΑ ΜΗΤΡΩΑ ΚΑΙ ΕΣΩΤΕΡΙΚΕΣ ΕΛΕΥΘΕΡΩΣΕΙΣ

Από την άποψη της **ευκολίας στον προγραμματισμό**, η **θεώρηση των τροποποιημένων μητρώων στιβαρότητας** προσφέρεται διότι η **επέμβαση γίνεται κατά τον υπολογισμό του μητρώου στιβαρότητας του στοιχείου και όχι στους καθολικούς βαθμούς ελευθερίας του μητρώου στιβαρότητας του φορέα**. Η **θεώρηση των συνδυασμένων κόμβων είναι υπολογιστικά πολυπλοκότερη** διότι απαιτεί πιο **σύνθετο αλγόριθμο για την τοποθέτηση των δεικτών στιβαρότητας των στοιχείων στις αντίστοιχες θέσεις του ολικού μητρώου στιβαρότητας** του φορέα. Μια πρόσθετη επιβάρυνση στον αλγόριθμο διαχείρισης του μητρώου στιβαρότητας στην περίπτωση αυτή είναι οι διαφορετικοί βαθμοί ελευθερίας που προκύπτουν κατά τη θεώρηση των συνδυασμένων κόμβων. **Με τα τροποποιημένα μητρώα δίνεται η δυνατότητα απαλοιφής των κατάλληλων βαθμών ελευθερίας έτσι ώστε οι τελικοί ενεργοί βαθμοί ελευθερίας ανά κόμβο να παραμένουν σταθεροί.**

ΔΡΑΣΕΙΣ ΠΑΓΙΩΣΗΣ – ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ

ΔΡΑΣΕΙΣ ΠΑΓΙΩΣΗΣ – ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ

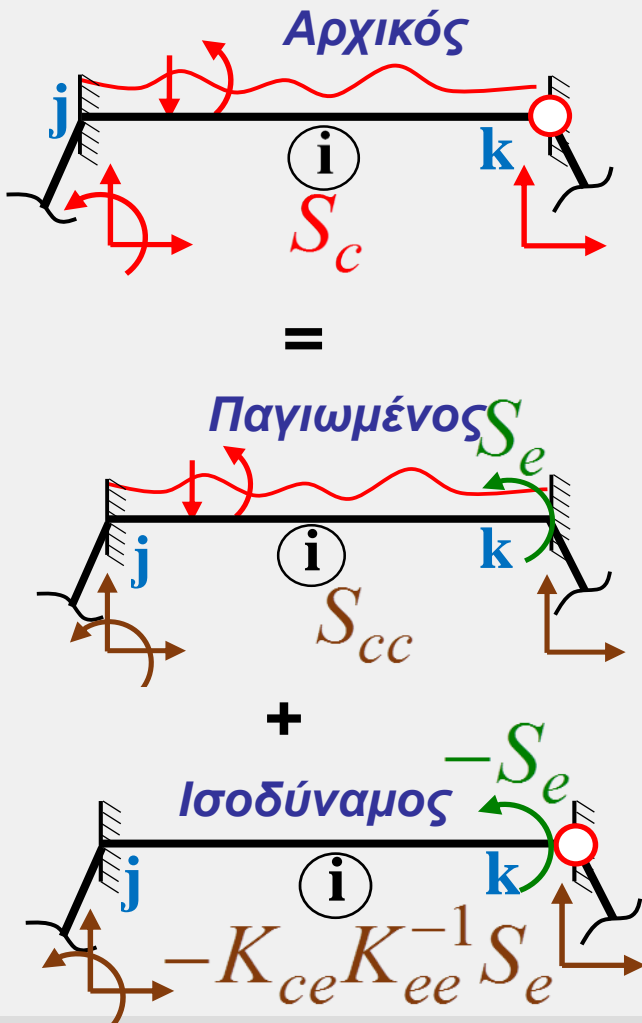


Υπολογισμός **δράσεων παγίωσης τροποποιημένων στοιχείων** (α) τροποποίηση της **στροφής του άκρου k** του στοιχείου (i), (β) τροποποίηση της **στροφής του άκρου j** του στοιχείου (m), (γ) τροποποίηση της **στροφής των άκρων k, j** των στοιχείων (i), (m).

ΔΡΑΣΕΙΣ ΠΑΓΙΩΣΗΣ – ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ

Βασική αρχή στη **θεώρηση των τροποποιημένων μητρώων στιβαρότητας** είναι ότι **στον παγιωμένο φορέα δεσμεύονται μόνο οι ενεργοί επικόμβιοι βαθμοί ελευθερίας και όχι οι εσωτερικοί βαθμοί ελευθερίας των άκρων των στοιχείων που αντιστοιχούν σε ελευθέρωση**. Έτσι, το στοιχείο (i) θεωρείται τροποποιημένο ως προς τη στροφή στο άκρο k και κατά συνέπεια **η στροφή στο άκρο αυτό δεν δεσμεύεται κατά τη θεώρηση του παγιωμένου φορέα**. Αντίστοιχη είναι και η περίπτωση (β), όπου η τροποποίηση έχει γίνει στο άκρο j του στοιχείου (m). Τέλος, στην περίπτωση (γ) **θεωρείται ότι και τα δύο στοιχεία έχουν υποστεί τροποποίηση των αντίστοιχων στροφικών βαθμών ελευθερίας, με αποτέλεσμα να δεσμεύονται μόνο οι μεταφορικοί βαθμοί ελευθερίας του κόμβου (n)**.

ΔΡΑΣΕΙΣ ΠΑΓΙΩΣΗΣ – ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ

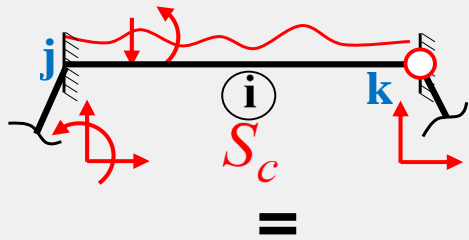


Δράσεις Παγίωσης – Ισοδύναμες Δράσεις λόγω ενδιάμεσης φόρτισης τροποποιημένου στοιχείου

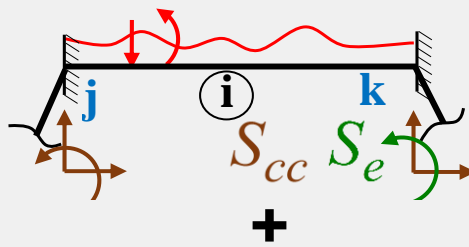
Η τροποποίηση μητρώου στιβαρότητας για την αντιμετώπιση εσωτερικών ελευθερώσεων δυσχεραίνει τον υπολογισμό των δράσεων παγίωσης λόγω ενδιάμεσης φόρτισης. Για λόγους συστηματοποίησης (υπολογιστικοί λόγοι) είναι προτιμότερο, **αντί να επιλύεται ως φορέας το τροποποιημένο στοιχείο, οι δράσεις παγίωσης να προκύπτουν από τις δράσεις παγίωσης του αρχικού μη τροποποιημένου στοιχείου με την ίδια ενδιάμεση φόρτιση.** Επιδιώκεται ο υπολογισμός των δράσεων παγίωσης S_c της δοκού (i), υποβαλλόμενης σε τυχούσα ενδιάμεση φόρτιση, η οποία έχει μια στροφική ελευθέρωση στο άκρο k . Για τον υπολογισμό των δράσεων παγίωσης θεωρείται η παγιωμένη δοκός ως φορέας-στοιχείο με έναν ενεργό βαθμό ελευθερίας (τη στροφή στο άκρο k).

ΔΡΑΣΕΙΣ ΠΑΓΙΩΣΗΣ – ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ

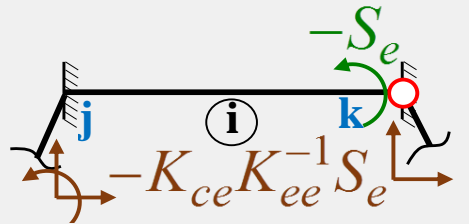
Αρχικός



Παγιωμένος



Ισοδύναμος



Δράσεις Παγίωσης – Ισοδύναμες Δράσεις λόγω ενδιάμεσης φόρτισης τροποποιημένου στοιχείου

Επιδιώκεται ο υπολογισμός των (5) δράσεων παγίωσης S_c της δοκού (i), υποβαλλόμενης σε τυχούσα ενδιάμεση φόρτιση, η οποία έχει μια στροφική ελευθέρωση στο άκρο k

Επίλυση παγιωμένου φορέα-στοιχείου

→ S_{cc} 5 αντιδρ.
→ S_e 1 αντιδρ.

Επίλυση ισοδύναμου φορέα-στοιχείου

έχει 1 ελεύθερο (f) και 5 δεσμευμένους (s) β.ε.
υποβάλλεται αποκλειστικά στην επικόμβια φόρτιση $-S_e$

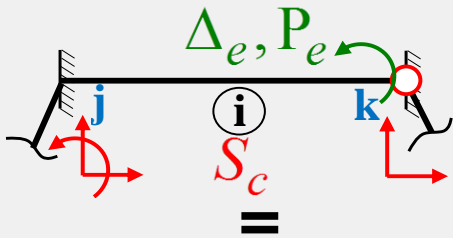
$$\begin{bmatrix} \{P_e = -S_e\} \\ \{P_{cc}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ee}] & [K_{ec}] \\ [K_{ce}] & [K_{cc}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Delta_e\} \\ \{\Delta_c = 0\} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{επίλυση ι.φ.}}$$

επίλυση ι.φ. **1 ελεύθερη στροφή ι.φ.** $\{\Delta_e\} = -[K_{ee}]^{-1} \{S_e\}$ **5 αντιδράσεις ι.φ.** $\{P_{cc}\} = -[K_{ce}] [K_{ee}]^{-1} \{S_e\}$

επαλληλία π.φ.+ι.φ. → **δράσεις παγίωσης S_c** $\{S_c\} = \{S_{cc}\} - [K_{ce}] [K_{ee}]^{-1} \{S_e\}$

ΔΡΑΣΕΙΣ ΠΑΓΙΩΣΗΣ – ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ

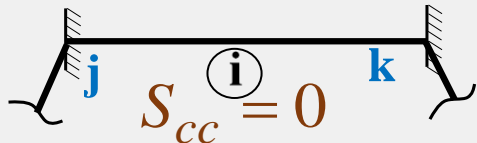
Αρχικός



Δράσεις Παγίωσης – Ισοδύναμες Δράσεις λόγω φόρτισης σε εσωτερική ελευθέρωση

Επιδιώκεται ο υπολογισμός των (5) δράσεων παγίωσης S_c της δοκού (i), υποβαλλόμενης σε φόρτιση σε εσωτερική (στροφική) ελευθέρωση στο άκρο k

Παγιωμένος



Επίλυση παγιωμένου φορέα-στοιχείου

$$\begin{aligned} S_{cc} &= 0 && 5 \text{ αντιδρ.} \\ S_e &= 0 && 1 \text{ αντιδρ.} \end{aligned}$$

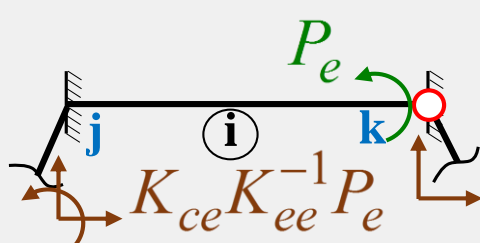
Επίλυση ισοδύναμου φορέα-στοιχείου

έχει 1 ελεύθερο (f) και 5 δεσμευμένους (s) β.ε.

υποβάλλεται αποκλειστικά στην επικόμβια φόρτιση P_e

+

Ισοδύναμος



$$\begin{bmatrix} \{P_e\} \\ \{P_{cc}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ee}] & [K_{ec}] \\ [K_{ce}] & [K_{cc}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Delta_e\} \\ \{\Delta_c = 0\} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{επίλυση ι.φ.}}$$

1 ελεύθερη στροφή ι.φ.

$$\{\Delta_e\} = [K_{ee}]^{-1} \{P_e\}$$

5 αντιδράσεις ι.φ.

$$\{P_{cc}\} = [K_{ce}] [K_{ee}]^{-1} \{P_e\}$$

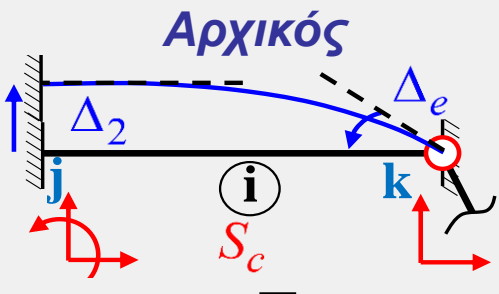
επαλληλία π.φ.+ι.φ.

\longrightarrow

δράσεις παγίωσης S_c

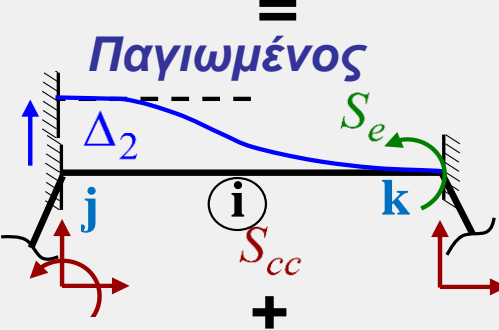
$$\{S_c\} = [K_{ce}] [K_{ee}]^{-1} \{P_e\}$$

ΔΡΑΣΕΙΣ ΠΑΓΙΩΣΗΣ – ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ



Δράσεις Παγίωσης – Ισοδύναμες Δράσεις λόγω μετακίνησης στήριξης τροποποιημένου στοιχείου

Επιδιώκεται ο υπολογισμός των (5) δράσεων παγίωσης S_c της δοκού (i), η οποία έχει μια στροφική ελευθέρωση στο άκρο k, υποβαλλόμενης σε μετακίνηση στήριξης.



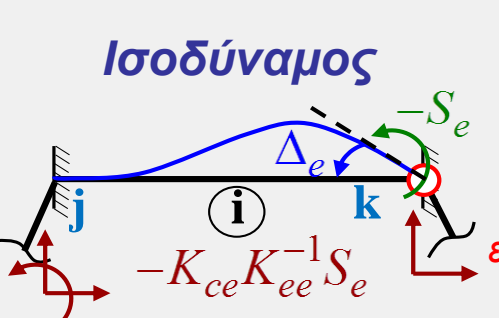
Επίλυση παγιωμένου φορέα-στοιχείου

S_{cc} 5 αντιδρ.
 S_e 1 αντιδρ.

Επίλυση ισοδύναμου φορέα-στοιχείου

έχει 1 ελεύθερο (f) και 5 δεσμευμένους (s) β.ε.

υποβάλλεται αποκλειστικά στην επικόμβια φόρτιση $-S_e$



$$\begin{bmatrix} \{P_e = -S_e\} \\ \{P_{cc}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ee}] & [K_{ec}] \\ [K_{ce}] & [K_{cc}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Delta_e\} \\ \{\Delta_c = 0\} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{επίλυση ι.φ.}}$$

1 ελεύθερη στροφή ι.φ.

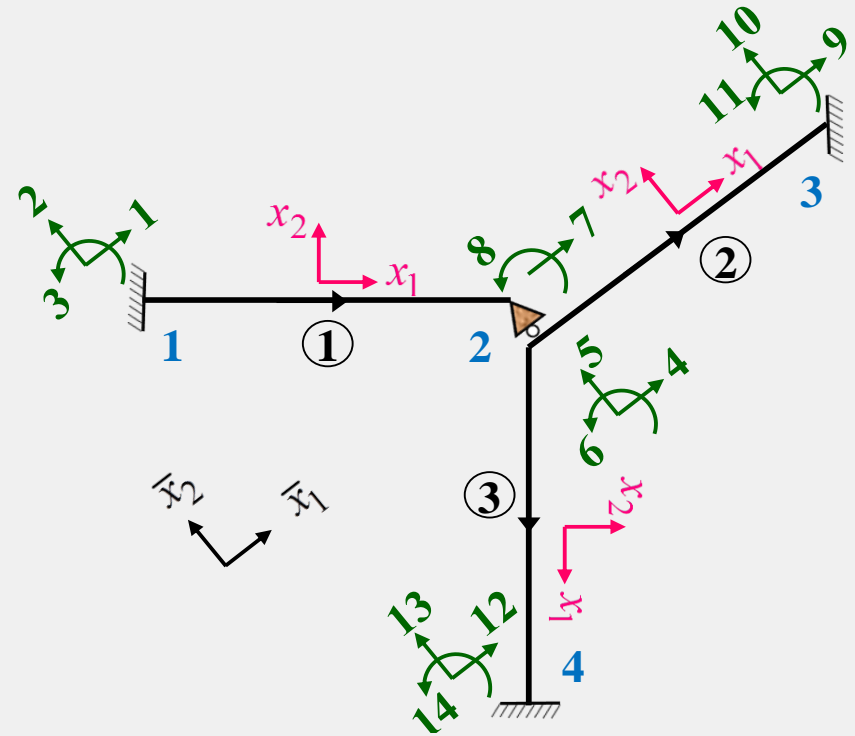
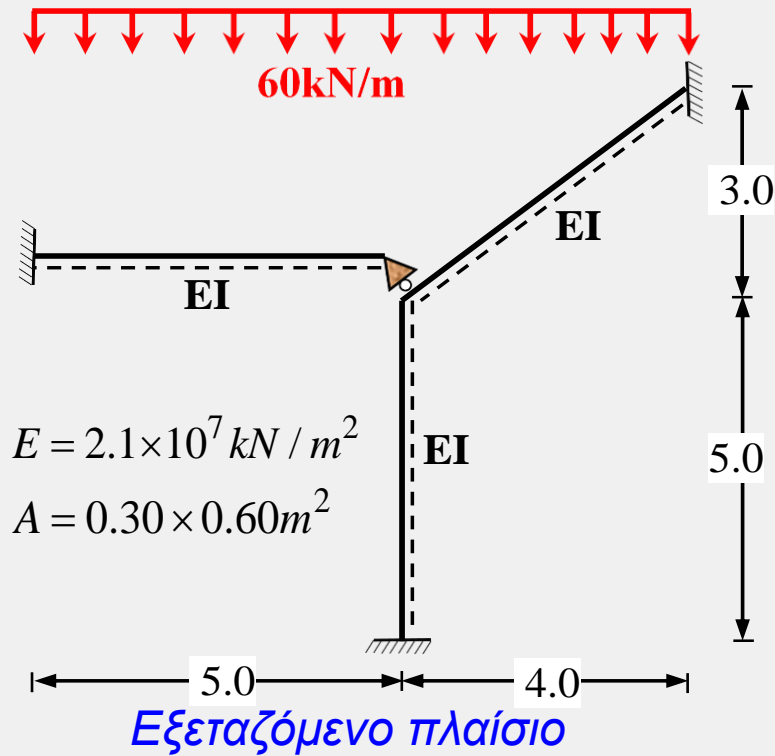
5 αντιδράσεις ι.φ.

$$\xrightarrow{\text{επίλυση ι.φ.}} \{\Delta_e\} = -[K_{ee}]^{-1} \{S_e\} \quad \{P_{cc}\} = -[K_{ce}] [K_{ee}]^{-1} \{S_e\}$$

επαλληλία π.φ.+ι.φ. \longrightarrow **δράσεις παγίωσης S_c** $\{S_c\} = \{S_{cc}\} - [K_{ce}] [K_{ee}]^{-1} \{S_e\}$

*ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ
ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΩΝ
ΜΗΤΡΩΩΝ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ*

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΩΝ ΜΗΤΡΩΩΝ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ

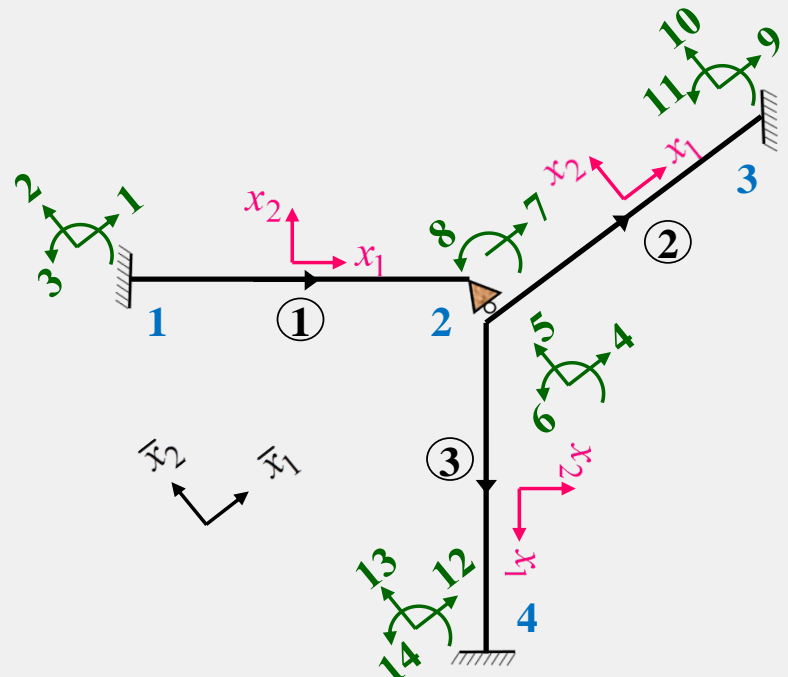


Στοιχεία γεωμετρίας και υλικού μελών

- Μέλος(1): $E^1 = 2.1 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$, $A^1 = 0.18 \text{ m}^2$, $I^1 = 0.0054 \text{ m}^4$, $L^1 = 5.0 \text{ m}$
- Μέλος(2): $E^2 = 2.1 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$, $A^2 = 0.18 \text{ m}^2$, $I^2 = 0.0054 \text{ m}^4$, $L^2 = 5.0 \text{ m}$
- Μέλος(3): $E^3 = 2.1 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$, $A^3 = 0.18 \text{ m}^2$, $I^3 = 0.0054 \text{ m}^4$, $L^3 = 5.0 \text{ m}$

Αρίθμηση κόμβων, μελών, καθολικό και τοπικά συστήματα αξόνων, βαθμοί ελευθερίας

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΩΝ ΜΗΤΡΩΝ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ



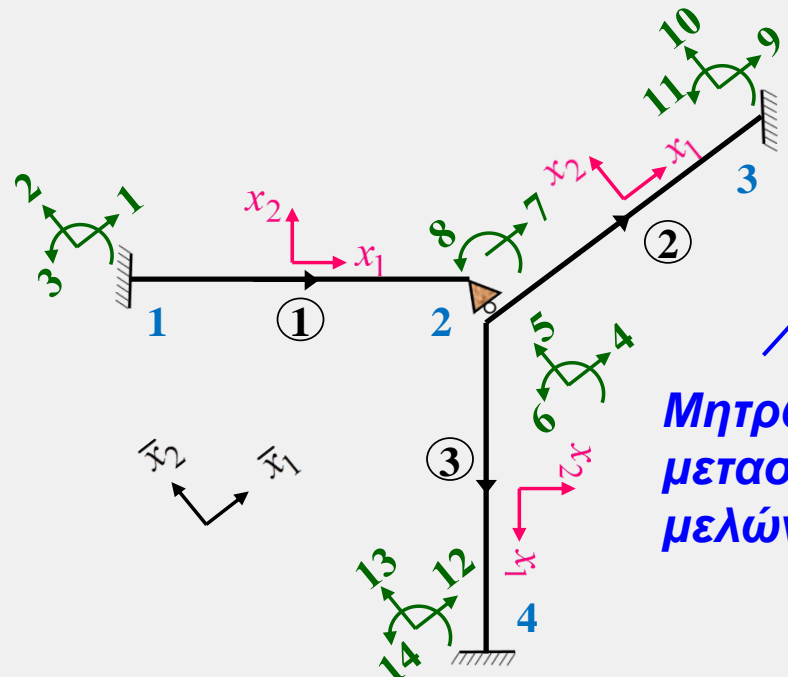
$$[k^1] = EI \begin{bmatrix} 6.667 & 0 & 0 & -6.667 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.240 & 0 & -0.096 & 0.240 \\ 0 & 0.240 & 0.800 & 0 & -0.240 & 0.400 \\ -6.667 & 0 & 0 & 6.667 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & -0.240 & 0 & 0.096 & -0.240 \\ 0 & 0.240 & 0.400 & 0 & -0.240 & 0.800 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 5 \\ 8 \end{matrix}$$

$$[k^2] = EI \begin{bmatrix} 6.667 & 0 & 0 & -6.667 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.240 & 0 & -0.096 & 0.240 \\ 0 & 0.240 & 0.800 & 0 & -0.240 & 0.400 \\ -6.667 & 0 & 0 & 6.667 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & -0.240 & 0 & 0.096 & -0.240 \\ 0 & 0.240 & 0.400 & 0 & -0.240 & 0.800 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{matrix}$$

$$[k^3] = EI \begin{bmatrix} 6.667 & 0 & 0 & -6.667 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.240 & 0 & -0.096 & 0.240 \\ 0 & 0.240 & 0.800 & 0 & -0.240 & 0.400 \\ -6.667 & 0 & 0 & 6.667 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & -0.240 & 0 & 0.096 & -0.240 \\ 0 & 0.240 & 0.400 & 0 & -0.240 & 0.800 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{matrix}$$

Τοπικά μητρώα στιβαρότητας μελών

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΩΝ ΜΗΤΡΩΝ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ



$$\theta^{1j} = \theta^{1k} = 323,13^\circ \quad \theta^{2j} = \theta^{2k} = 0^\circ$$

$$\theta^{3j} = \theta^{3k} = 233,13^\circ$$

$$\left[\Lambda_{PF}^i \right]$$

Μητρώα μετασχηματισμού μελών

$$[\bar{k}^1] = EI$$

1	2	3	7	5	8
4.301	-3.154	0.144	-4.301	3.154	0.144
-3.154	2.461	0.192	3.154	-2.461	0.192
0.144	0.192	0.800	-0.144	-0.192	0.4
-4.301	3.154	-0.144	4.301	-3.154	-0.144
3.154	-2.461	-0.192	-3.154	2.461	-0.192
0.144	0.192	0.4	-0.144	-0.192	0.8

$$[\bar{k}^2] = EI$$

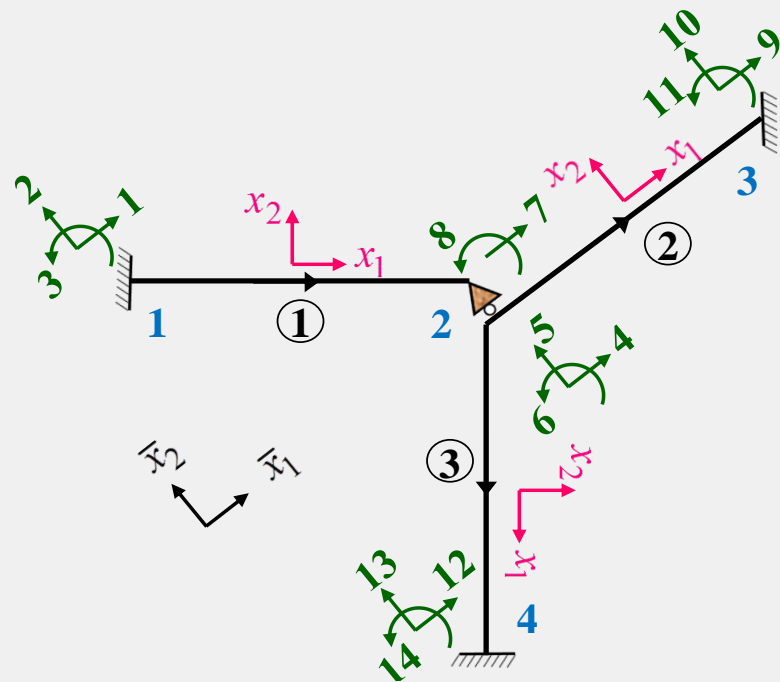
4	5	6	9	10	11
6.667	0	0	-6.667	0	0
0	0.096	0.240	0	-0.096	0.240
0	0.240	0.800	0	-0.240	0.400
-6.667	0	0	6.667	0	0
0	-0.096	-0.24	0	0.096	-0.240
0	0.240	0.40	0	-0.240	0.800

Καθολικά μητρώα στιβαρότητας μελών

$$[\bar{k}^3] = EI$$

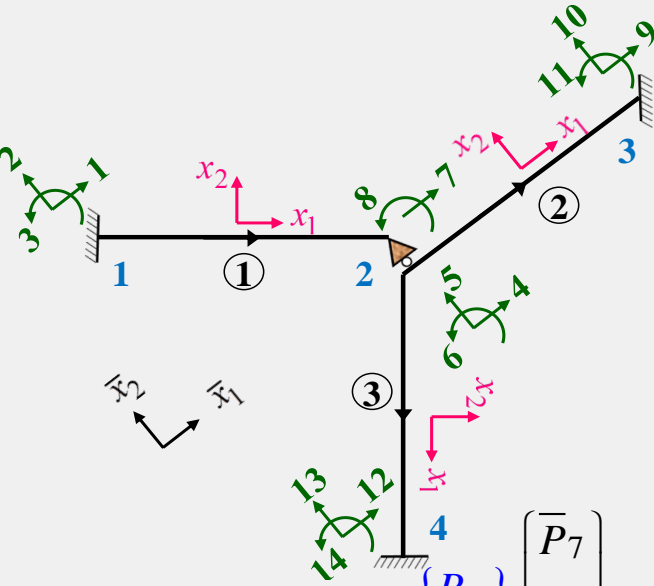
4	5	6	12	13	14
2.461	3.154	0.192	-2.461	-3.154	0.192
3.154	4.301	-0.144	-3.154	-4.301	-0.144
0.192	-0.144	0.8	-0.192	0.144	0.4
-2.461	-3.154	-0.192	2.461	3.154	-0.192
-3.154	-4.301	0.144	3.154	4.301	0.144
0.192	-0.144	0.4	-0.192	0.144	0.8

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΩΝ ΜΗΤΡΩΩΝ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ



Η αντιμετώπιση της εσωτερικής κύλισης θα γίνει με απαλοιφή των καθολικών βαθμών ελευθερίας 7 (μετατόπιση), 8 (στροφή), έτσι ώστε οι ενεργοί βαθμοί ελευθερίας του κόμβου (2) να περιοριστούν στους 3, δηλαδή τους 4 (μετατόπιση), 5 (μετατόπιση) και 6 (στροφή). Προκειμένου να επιτευχθεί η απαλοιφή των ακραίων βαθμών ελευθερίας 7, 8 του στοιχείου 1 από την εξίσωση ισορροπίας του στο καθολικό σύστημα αξόνων προηγείται η αναδιάταξη της εξίσωσης αυτής έτσι ώστε να προηγούνται οι μετακινήσεις προς απαλοιφή $\{\Delta_e\}$ και να έπονται οι παραμένουσες μετακινήσεις $\{\Delta_c\}$. Έτσι, η αναδιατεταγμένη εξίσωση ισορροπίας του μέλους 1 στο καθολικό σύστημα αξόνων γράφεται ως

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΩΝ ΜΗΤΡΩΝ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ



Αναδιατεταγμένη εξίσωση ισορροπίας του μέλους 1 στο καθολικό σύστημα αξόνων

$$\begin{Bmatrix} \bar{P}_7 \\ \bar{P}_8 \\ \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_3 \\ \bar{P}_5 \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} [K_{ee}] & [K_{ec}] \\ [K_{ce}] & [K_{cc}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_5 \end{Bmatrix}$$

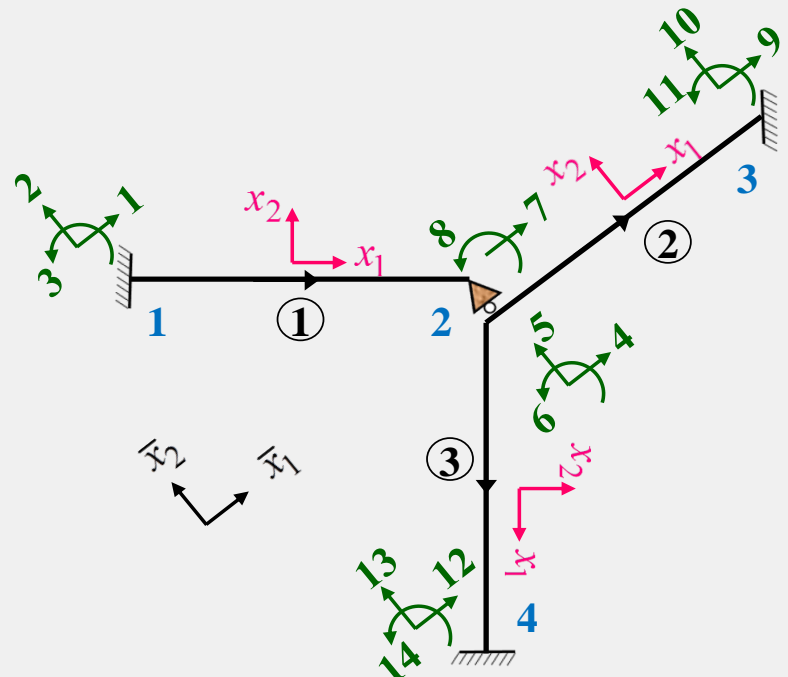
$[K_{ee}]$
 $[K_{ec}]$

7
8
1
2
3
5

7
8
1
2
3
5

$[K_{ce}]$
 $[K_{cc}]$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΩΝ ΜΗΤΡΩΩΝ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ



Υπολογισμός τροποποιημένου μητρώου στιβαρότητας μέλους 1, λόγω απαλοιφής των καθολικών βαθμών ελευθερίας 7, 8

Αντικαθιστώντας τα υπομητρώα της προηγούμενης σχέσης στη σχέση

$$[K_c] = [K_{cc}] - [K_{ce}] [K_{ee}]^{-1} [K_{ec}]$$

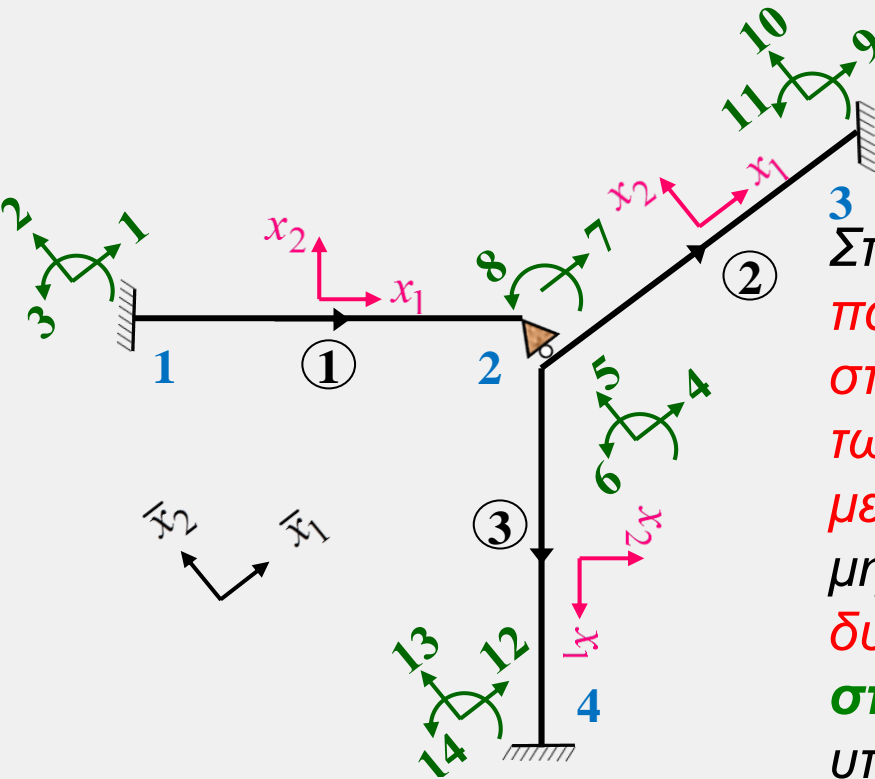
το τροποποιημένο μητρώο στιβαρότητας του μέλους 1 προκύπτει ως

$$\begin{bmatrix} -1 \\ k_c \end{bmatrix} = EI$$

1	2	3	5	
0	0	0	0	1
0	0.036739	0.149701	-0.036740	2
0	0.149701	0.598787	-0.149700	3
0	-0.036740	-0.149700	0.036739	5

(παρατηρούνται τα μηδενικά στοιχεία της πρώτης γραμμής και στήλης, τα οποία αντιστοιχούν σε κίνηση στερεού σώματος)

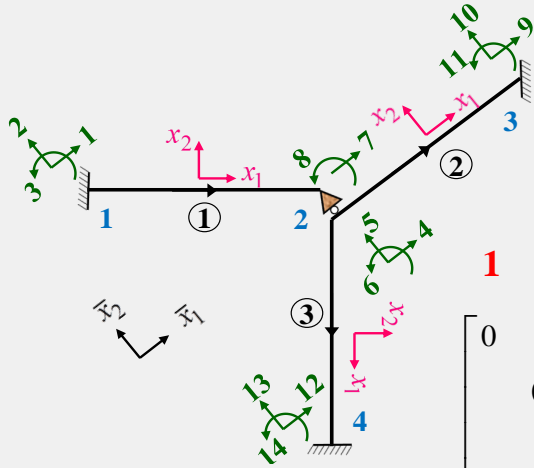
ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΩΝ ΜΗΤΡΩΩΝ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ



Μόρφωση καθολικού μητρώου στιβαρότητας πλαισίου

Στο εξεταζόμενο πλαίσιο, λόγω της παρουσίας της εσωτερικής ελευθέρωσης στον κόμβο 2, η σύνθεση των υπομητρώων των καθολικών μητρώων στιβαρότητας των μελών για τον προσδιορισμό του καθολικού μητρώου στιβαρότητας του φορέα **καθίσταται δυσχερής** και η **σύνθεση αυτή θα γίνει στοιχείο – στοιχείο**. Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη τους καθολικούς βαθμούς ελευθερίας στους οποίους αντιστοιχούν τα στοιχεία των καθολικών μητρώων στιβαρότητας των μελών, το καθολικό μητρώο στιβαρότητας του πλαισίου προκύπτει ως

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΩΝ ΜΗΤΡΩΩΝ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ



Μόρφωση καθολικού μητρώου στιβαρότητας πλαισίου

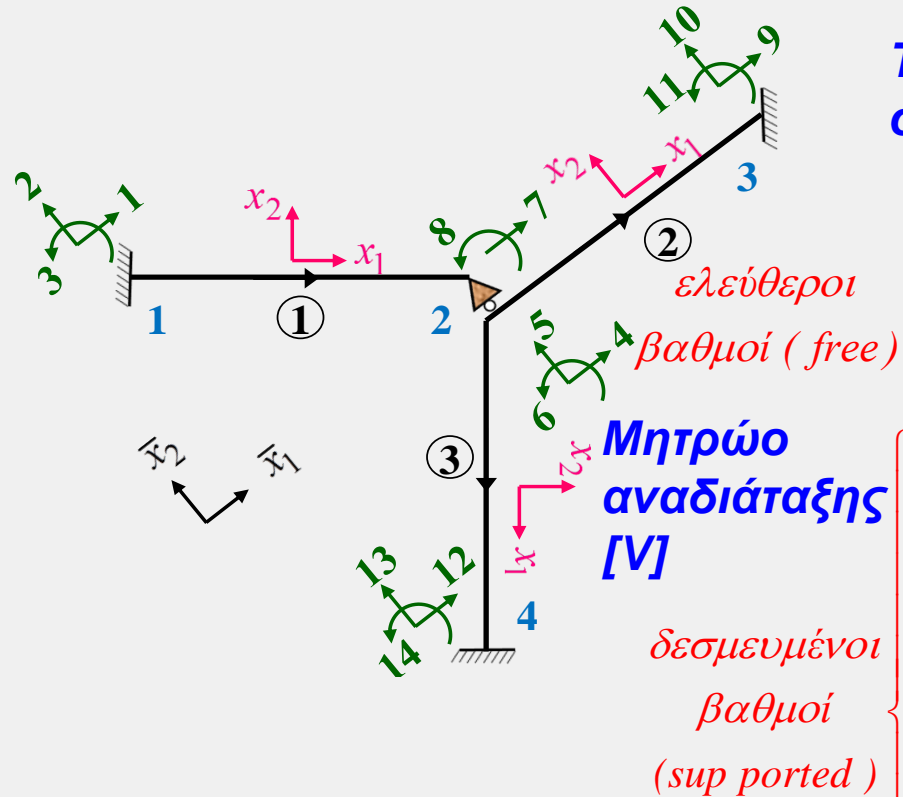
$[K] = EI$

	#1			#2			#3			#4			
	1	2	3	4	5	6	9	10	11	12	13	14	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0.037	0.150	0	-0.037	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
0.599	0	-0.150	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
9.128	3.154	0.192	-6.667	0	0	0	-2.461	-3.154	0.192	4			
4.434	0.096	0	-0.096	0.240	-3.154	-4.301	-0.144	5					
1.600	0	-0.240	0.400	-0.192	0.144	0.4	6						
6.667	0	0	0	0	0	0	9						
0.096	-0.240	0	0	0	0	0	10						
0.800	0	0	0	0	0	0	11						
2.461	3.154	-0.192	12										
4.301	0.144	13											
0.8	14												

Καθολικό μητρώο στιβαρότητας πλαισίου

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΩΝ ΜΗΤΡΩΝ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ

Τροποποίηση καθολικού μητρώου στιβαρότητας πλαισίου λόγω αναδιάταξης

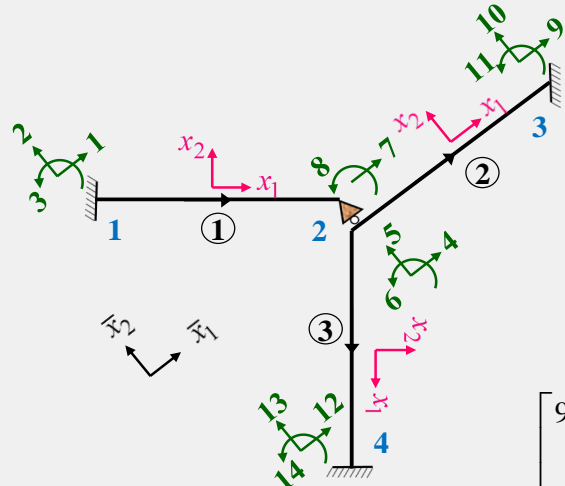


$$\begin{matrix}
 \left. \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix} \right\} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{matrix}
 \end{matrix}$$

$$\left[\bar{K}_m \right] = [V] \left[\bar{K} \right] [V]^T = \begin{bmatrix}
 \left[\bar{K}_{ff} \right] & \left[\bar{K}_{fs} \right] \\
 \left[\bar{K}_{sf} \right] & \left[\bar{K}_{ss} \right]
 \end{bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΩΝ ΜΗΤΡΩΝ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ

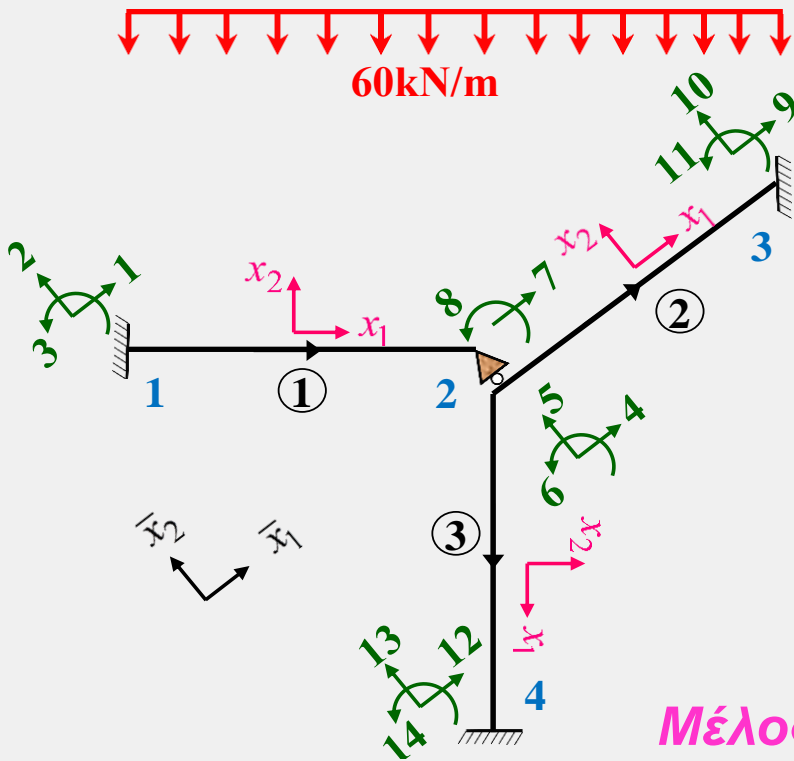
Αναδιατεταγμένο καθολικό μητρώο στιβαρότητας πλαισίου (1^η τροποποίηση)



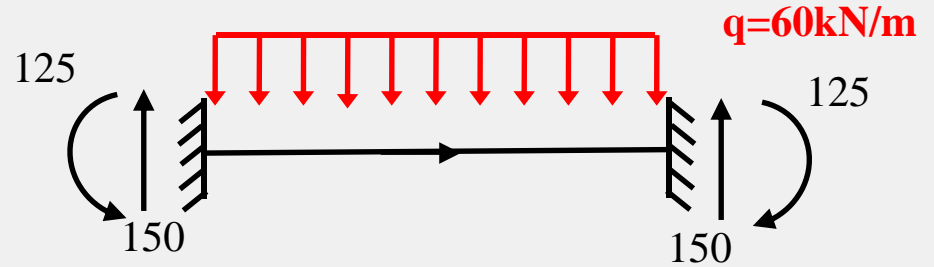
$$[\bar{K}_m] = [V][\bar{K}][V]^T = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{ff}] & [\bar{K}_{fs}] \\ [\bar{K}_{sf}] & [\bar{K}_{ss}] \end{bmatrix} =$$

	4	5	6	1	2	3	9	10	11	12	13	14		
$= EI$	9.128	3.154	0.192	0	0	0	-6.667	0	0	-2.461	-3.154	0.192	4	
		4.434	0.096	0	-0.037	-0.150	0	-0.096	0.240	-3.154	-4.301	-0.144	5	
			1.600	0	0	0	0	-0.240	0.400	-0.192	0.144	0.4	6	
				0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
					0.037	0.150	0	0	0	0	0	0	0	2
						0.599	0	0	0	0	0	0	0	3
							6.667	0	0	0	0	0	0	9
								0.096	-0.240	0	0	0	0	10
									0.800	0	0	0	0	11
										2.461	3.154	-0.192	0	12
											4.301	0.144	0	13
													0.8	14

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΩΝ ΜΗΤΡΩΝ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ



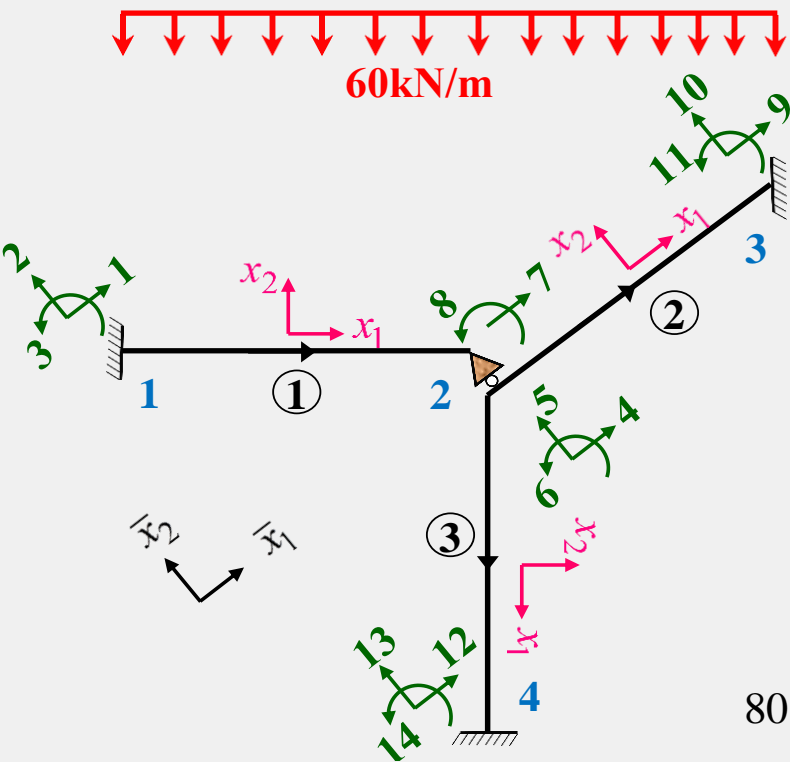
Ανάλυση παγιωμένου φορέα – Τοπικές ακραίες δράσεις μελών



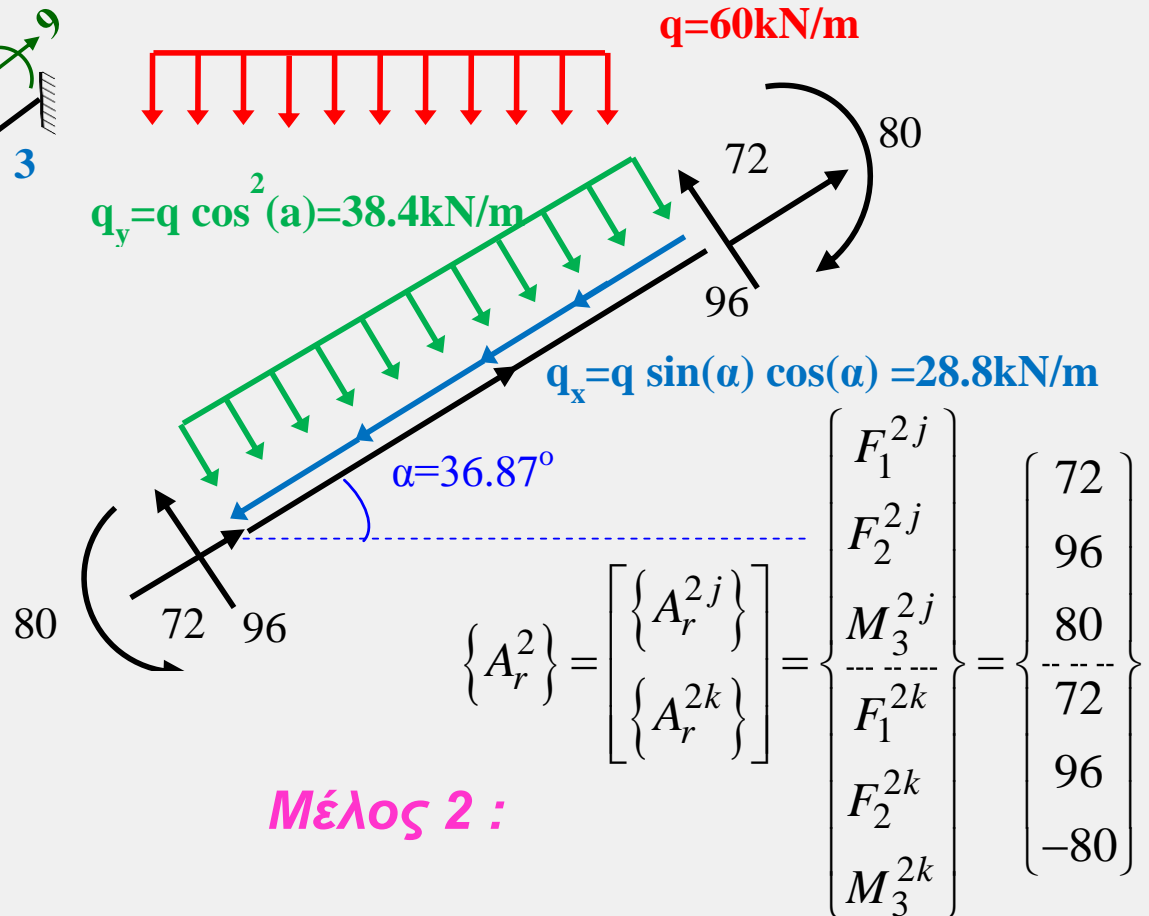
Μέλος 1 :

$$\{A_r^1\} = \begin{bmatrix} \{A_r^{1j}\} \\ \{A_r^{1k}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^{1j} \\ F_2^{1j} \\ M_3^{1j} \\ \hline F_1^{1k} \\ F_2^{1k} \\ M_3^{1k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 150 \\ 125 \\ \hline 0 \\ 150 \\ -125 \end{bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΩΝ ΜΗΤΡΩΩΝ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ

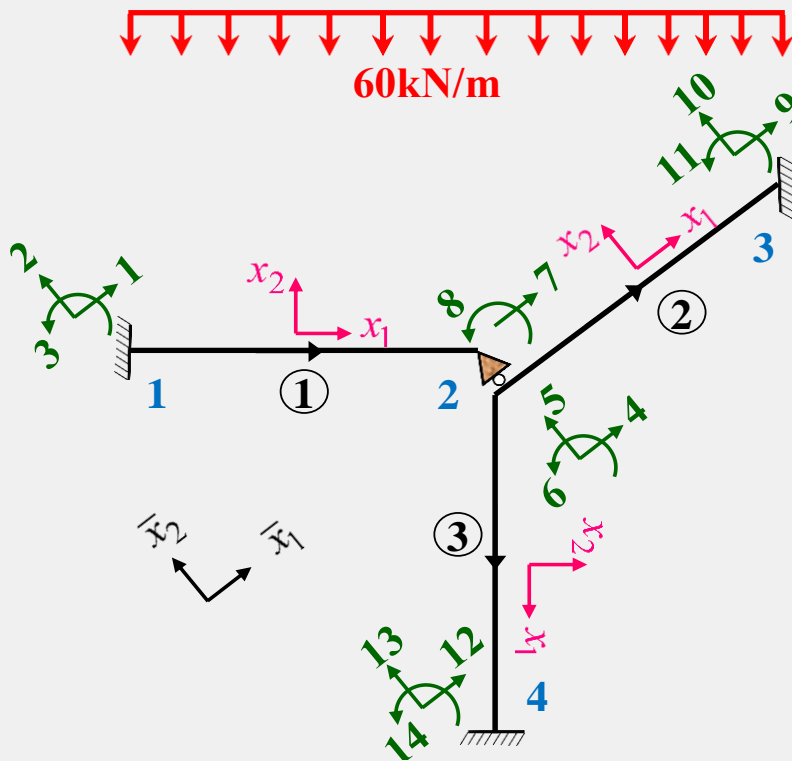


Ανάλυση παγιωμένου φορέα –
Τοπικές ακραίες δράσεις μελών



Μέλος 2 :

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΩΝ ΜΗΤΡΩΝ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ



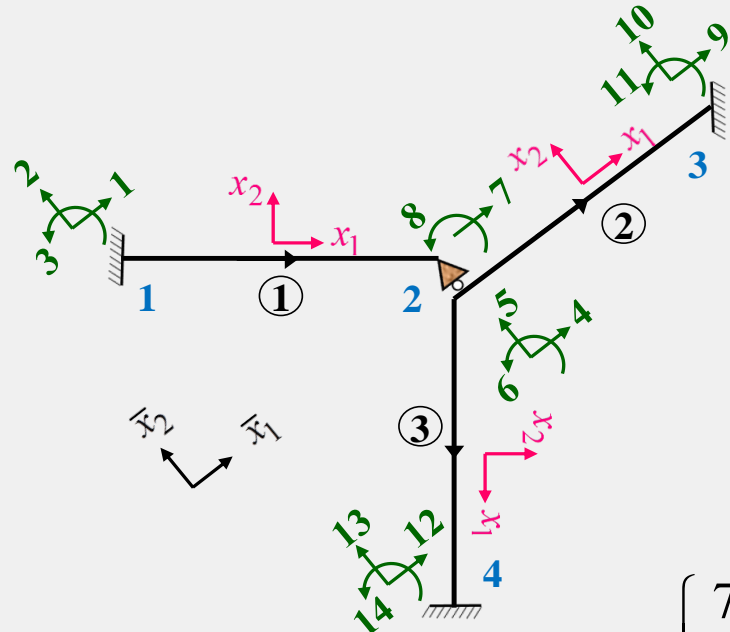
Ανάλυση παγιωμένου φορέα –
Τοπικές ακραίες δράσεις μελών

$$\{A_r^3\} = \begin{bmatrix} \{A_r^{3j}\} \\ \{A_r^{3k}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^{3j} \\ F_2^{3j} \\ M_3^{3j} \\ \hline F_1^{3k} \\ F_2^{3k} \\ M_3^{3k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Μέλος 3 : αφόρτιστο

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΩΝ ΜΗΤΡΩΝ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ

Ανάλυση παγιωμένου φορέα – Καθολικές ακραίες δράσεις μελών



Μέλος 1 :

$$\left\{ \bar{A}_r^1 \right\} = \left[\Lambda_{PF}^1 \right]^T \left\{ A_r^1 \right\} = \begin{Bmatrix} 90 \\ 120 \\ 125 \\ \dots \\ 90 \\ 120 \\ -125 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \dots \\ \mathbf{7} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{8} \end{matrix}$$

Μέλος 2 :

$$\left\{ \bar{A}_r^2 \right\} = \left[\Lambda_{PF}^1 \right]^T \left\{ A_r^2 \right\} = \begin{Bmatrix} 72 \\ 96 \\ 80 \\ \dots \\ 72 \\ 96 \\ -80 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{6} \\ \dots \\ \mathbf{9} \\ \mathbf{10} \\ \mathbf{11} \end{matrix}$$

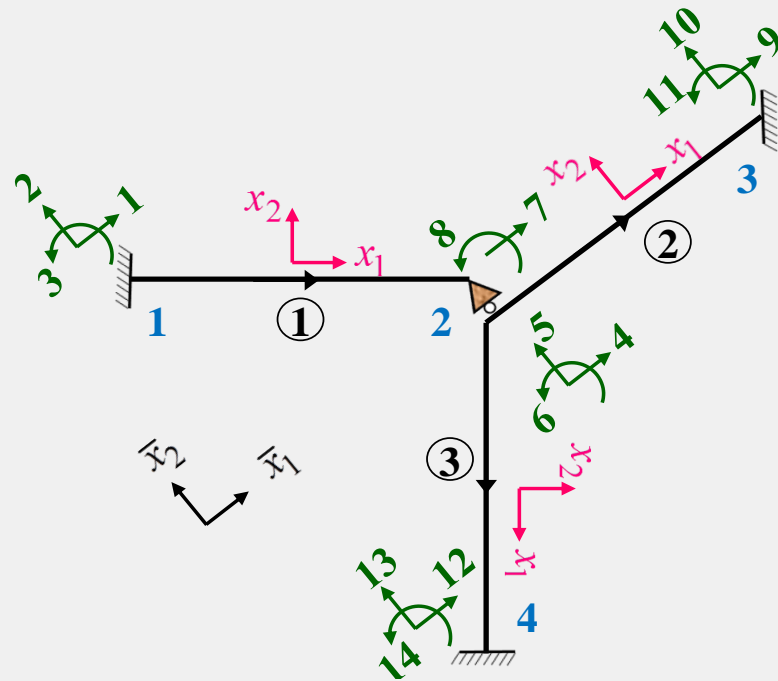
Μέλος 3 : αφόρτιστο

$$\left\{ \bar{A}_r^3 \right\} = \left[\Lambda_{PF}^1 \right]^T \left\{ A_r^3 \right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{6} \\ \dots \\ \mathbf{12} \\ \mathbf{13} \\ \mathbf{14} \end{matrix}$$

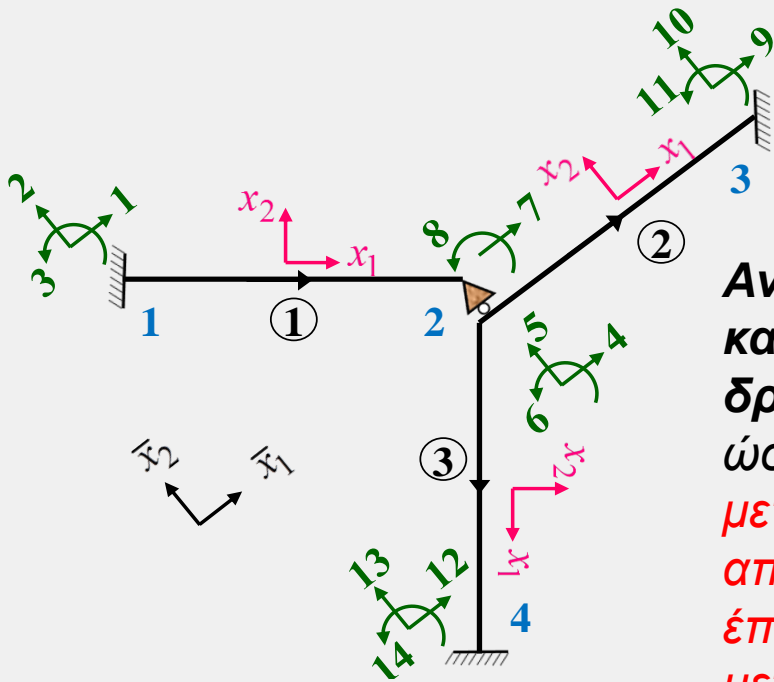
ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΩΝ ΜΗΤΡΩΩΝ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ

Υπολογισμός τροποποιημένου μητρώου καθολικών ακραίων δράσεων μέλους 1, λόγω απαλοιφής των καθολικών βαθμών ελευθερίας 7, 8

Η προαναφερθείσα απαλοιφή των καθολικών βαθμών ελευθερίας 7,8, όπως είναι φυσικό επηρεάζει το καθολικό μητρώο των ακραίων δράσεων του μέλους 1 του πλαισίου. Έτσι, προκειμένου να επιτευχθεί η απαλοιφή των ακραίων βαθμών ελευθερίας 7, 8 του στοιχείου 1 από την εξίσωση ισορροπίας του στο καθολικό σύστημα αξόνων προηγείται η **αναδιάταξη** της εξίσωσης αυτής έτσι ώστε να προηγούνται οι μετακινήσεις προς απαλοιφή $\{\Delta_e\}$ και να έπονται οι παραμένουσες μετακινήσεις $\{\Delta_s\}$.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΩΝ ΜΗΤΡΩΩΝ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ



Υπολογισμός τροποποιημένου μητρώου καθολικών ακραίων δράσεων μέλους 1, λόγω απαλοιφής των καθολικών βαθμών ελευθερίας 7, 8

Αναδιατεταγμένο μητρώο καθολικών ακραίων δράσεων μέλους 1 έτσι ώστε να προηγούνται οι μετακινήσεις προς απαλοιφή $\{\Delta_e\}$ και να έπονται οι παραμένουσες μετακινήσεις $\{\Delta_c\}$.

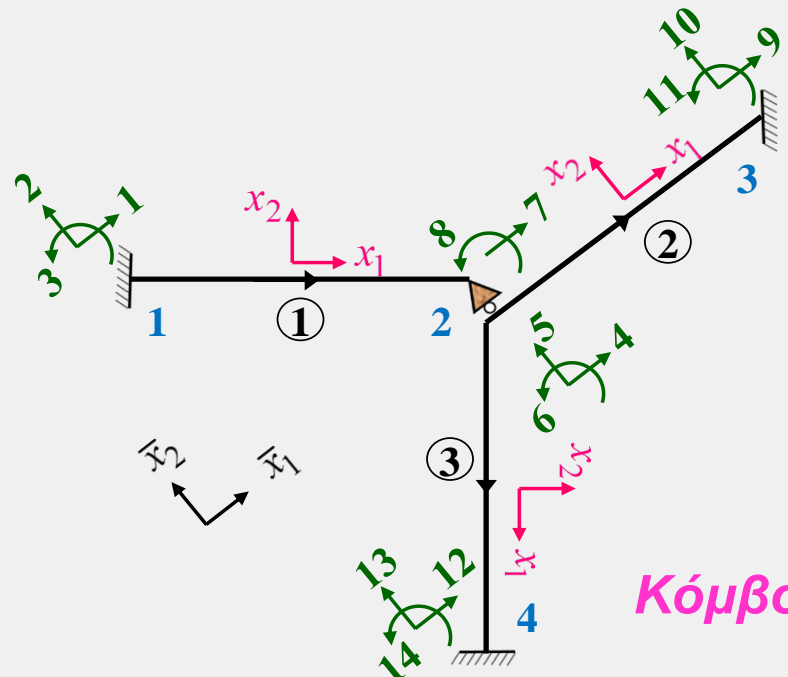
$$\left\{ \left(\bar{A}_r^{-1} \right)_m \right\} = \begin{Bmatrix} 90.0 & \mathbf{7} \\ -125.0 & \mathbf{8} \\ \hline 90.0 & \mathbf{1} \\ 120.0 & \mathbf{2} \\ 125.0 & \mathbf{3} \\ 120.0 & \mathbf{5} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P_e\} \\ \{P_{cc}\} \end{Bmatrix}$$

Τροποποιημένο μητρώο καθολικών ακραίων δράσεων μέλους 1, λόγω απαλοιφής των καθολικών βαθμών ελευθερίας 7, 8

$$\{P_c\} = \{P_{cc}\} - [K_{ce}][K_{ee}]^{-1}\{P_e\}$$

$$\left\{ \left(\bar{A}_r^{-1} \right)_c \right\} = \begin{Bmatrix} \left\{ \left(\bar{A}_r^{-1j} \right)_c \right\} \\ \hline \left\{ \left(\bar{A}_r^{-1k} \right)_c \right\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 180.00 & \mathbf{1} \\ 99.655 & \mathbf{2} \\ 188.637 & \mathbf{3} \\ \hline 140.345 & \mathbf{5} \end{Bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΩΝ ΜΗΤΡΩΝ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ



Ανάλυση παγιωμένου φορέα – Υπολογισμός δράσεων παγίωσης

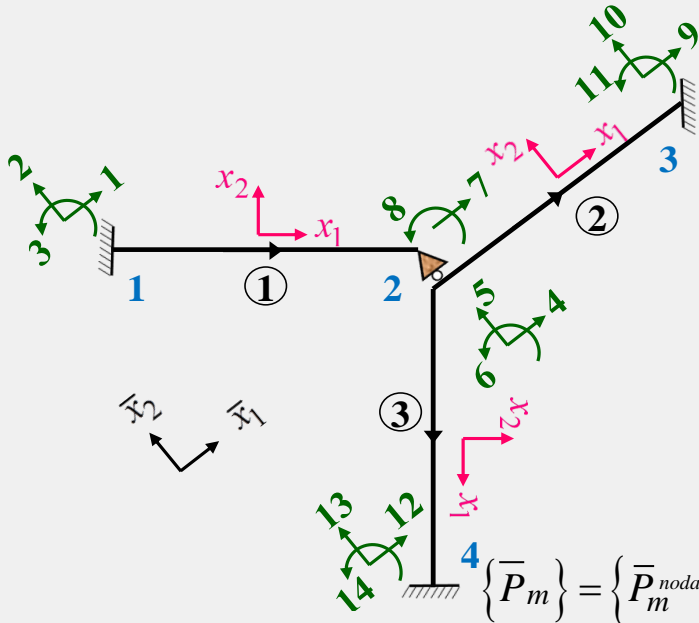
Κόμβος 1 : $\left\{ \bar{S}^{(1)} \right\} = \left\{ \bar{A}_r^{1j} \right\} = \begin{Bmatrix} 180.00 \\ 99.655 \\ 188.637 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{matrix}$

Κόμβος 2 : $\left\{ \bar{S}^{(2)} \right\} = \left\{ \left(\bar{A}_r^{1k} \right)_c \right\} + \left\{ \bar{A}_r^{2j} \right\} + \left\{ \bar{A}_r^{3j} \right\} = \begin{Bmatrix} 72.00 \\ 236.345 \\ 80.00 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{6} \end{matrix}$

Κόμβος 3 : $\left\{ \bar{S}^{(3)} \right\} = \left\{ \bar{A}_r^{2k} \right\} = \begin{Bmatrix} 72 \\ 96 \\ -80 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{9} \\ \mathbf{10} \\ \mathbf{11} \end{matrix}$

Κόμβος 4 : $\left\{ \bar{S}^{(4)} \right\} = \left\{ \bar{A}_r^{3k} \right\} = \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{12} \\ \mathbf{13} \\ \mathbf{14} \end{matrix}$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΩΝ ΜΗΤΡΩΝ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ

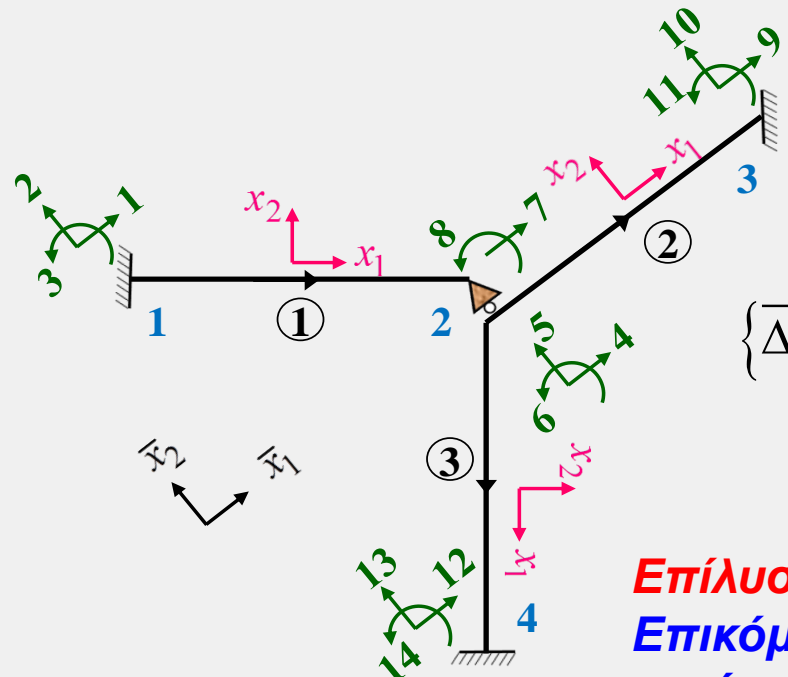


Αναδιατεταγμένα μητρώα επικόμβιων δράσεων και μετακινήσεων πλαισίου

$$\{\bar{P}_m\} = \{\bar{P}_m^{nodal} - \bar{S}_m\} = \begin{bmatrix} \{\bar{P}_f\} \\ \{\bar{P}_s\} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -72.00 & \mathbf{4} \\ -236.345 & \mathbf{5} \\ -80.00 & \mathbf{6} \\ \hline \bar{R}_1^{(1)} - 180 & \mathbf{1} \\ \bar{R}_2^{(1)} - 99.655 & \mathbf{2} \\ \bar{R}_3^{(1)} - 188.637 & \mathbf{3} \\ \hline \bar{R}_1^{(3)} - 72.00 & \mathbf{9} \\ \bar{R}_2^{(3)} - 96.00 & \mathbf{10} \\ \bar{R}_3^{(3)} + 80.00 & \mathbf{11} \\ \hline \bar{R}_1^{(4)} & \mathbf{12} \\ \bar{R}_2^{(4)} & \mathbf{13} \\ \bar{R}_3^{(4)} & \mathbf{14} \end{bmatrix} \quad \{\bar{\Delta}_m\} = \begin{bmatrix} \{\bar{\Delta}_f\} \\ \{\bar{\Delta}_s\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_4 & \mathbf{4} \\ \bar{\Delta}_5 & \mathbf{5} \\ \bar{\Delta}_6 & \mathbf{6} \\ \hline 0 & \mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{2} \\ 0 & \mathbf{3} \\ 0 & \mathbf{9} \\ 0 & \mathbf{10} \\ 0 & \mathbf{11} \\ 0 & \mathbf{12} \\ 0 & \mathbf{13} \\ 0 & \mathbf{14} \end{bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΩΝ ΜΗΤΡΩΝ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ



$$\{\bar{\Delta}_f\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.307 \\ -5.539 \\ -4.234 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

Επίλυση –
Επικόμβιες μετακινήσεις
κατά τους ελεύθερους και
επικόμβιες δράσεις
(αντιδράσεις) κατά τους
δεσμευμένους β.ε.

$$\{\bar{P}_s\} = \begin{Bmatrix} \bar{R}_1^{(1)} \\ \bar{R}_2^{(1)} \\ \bar{R}_3^{(1)} \\ \bar{R}_1^{(3)} \\ \bar{R}_2^{(3)} \\ \bar{R}_3^{(3)} \\ \bar{R}_1^{(4)} \\ \bar{R}_1^{(4)} \\ \bar{R}_1^{(4)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 180.00 \\ 101.99 \\ 198.05 \\ -26.83 \\ 113.55 \\ -114.28 \\ 170.83 \\ 216.47 \\ -7.32 \end{Bmatrix}$$

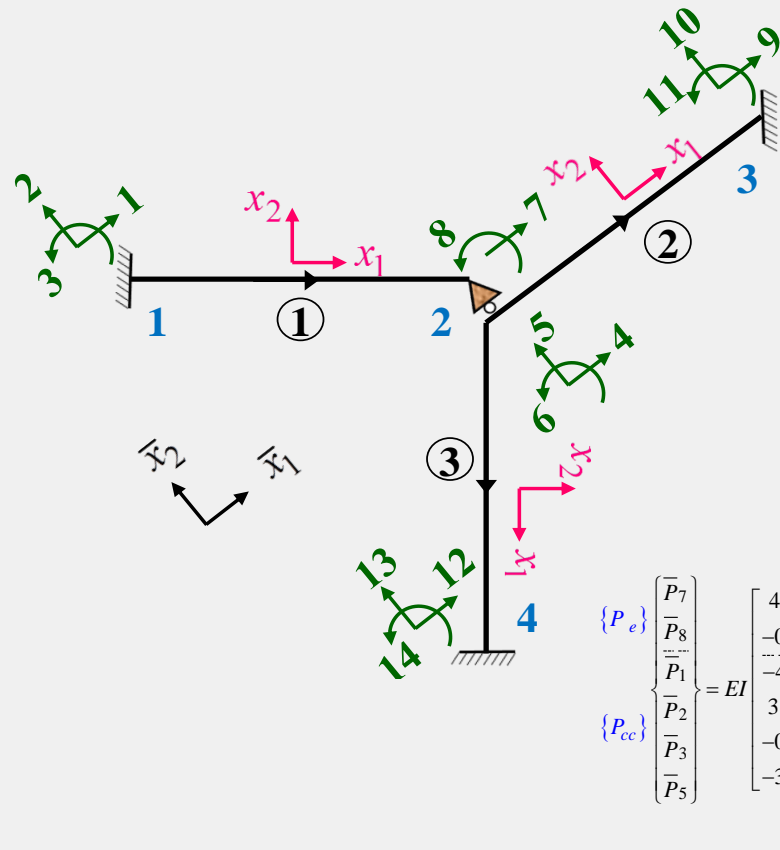
ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΩΝ ΜΗΤΡΩΩΝ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ

Υπολογισμός μετακινήσεων κατά τους καθολικούς βαθμούς ελευθερίας 7,8 που απαλείφθηκαν σε προηγούμενο βήμα

Με τη βοήθεια της σχέσης

$$\{\Delta_e\} = [K_{ee}]^{-1} (\{P_e\} - [K_{ec}]\{\Delta_c\})$$

της μετακίνησης κατά τον β.ε. 5 που υπολογίστηκε προηγουμένως και των υπομητρώων των σχέσεων που αναφέρθηκαν σε προηγούμενο βήμα



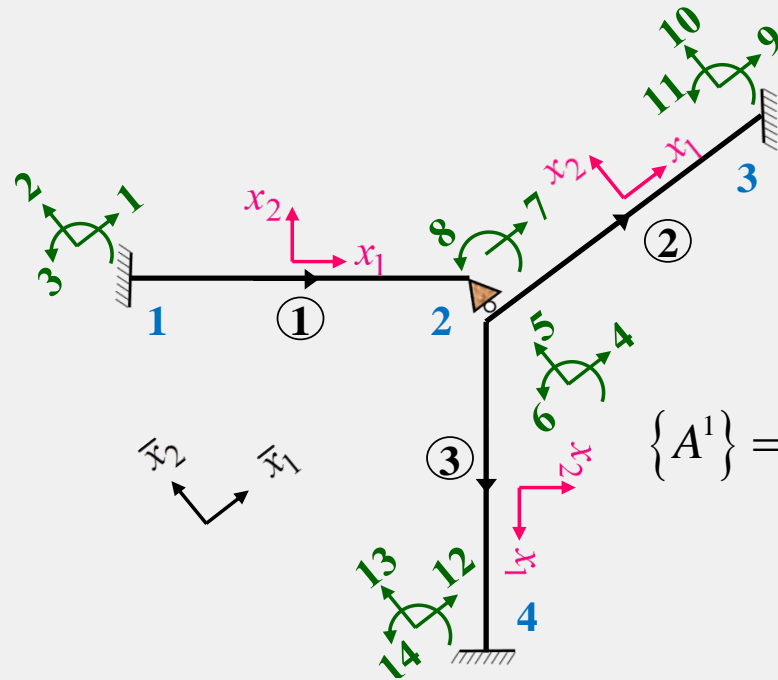
$$\begin{matrix} \{P_e\} \\ \{P_{cc}\} \end{matrix} = EI \begin{matrix} [K_{ee}] & [K_{ec}] \\ [K_{ce}] & [K_{cc}] \end{matrix} \begin{matrix} \{\Delta_e\} \\ \{\Delta_c\} \end{matrix}$$

$$\left\{ \left(\bar{A}_r^{-1} \right)_m \right\} = \begin{Bmatrix} 90.0 & 7 \\ -125.0 & 8 \\ \dots & \dots \\ 90.0 & 1 \\ 120.0 & 2 \\ 125.0 & 3 \\ 120.0 & 5 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{P}_7 \\ \bar{P}_8 \\ \dots \\ \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_3 \\ \bar{P}_5 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \{P_e\} \\ \{P_{cc}\} \end{matrix}$$

προκύπτουν οι μετακινήσεις κατά τους καθολικούς βαθμούς ελευθερίας 7,8 ως

$$\{\Delta_e\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5.522 \\ -11.456 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΩΝ ΜΗΤΡΩΝ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ



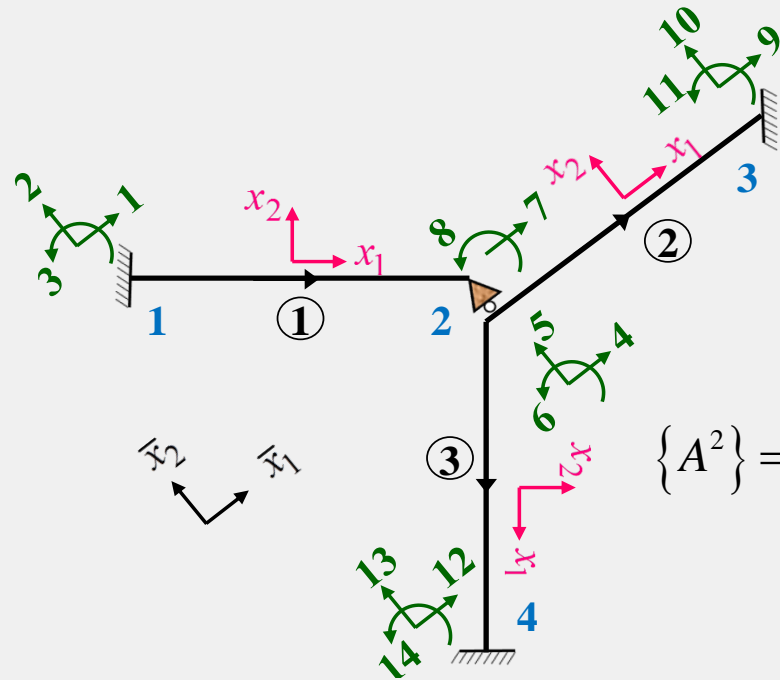
Εσωτερικά εντατικά μεγέθη μελών πλαισίου

Μέλος 1 :

$$\{A^1\} = \{A_r^1\} + [k^1][\Lambda_{PF}^1]\{\bar{D}^1\} =$$

$$= \begin{Bmatrix} F_1^{1j} \\ F_2^{1j} \\ M_3^{1j} \\ F_1^{1k} \\ F_2^{1k} \\ M_3^{1k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 150 \\ 125 \\ 0 \\ 150 \\ -125 \end{Bmatrix} + [k^1][I] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5.52 \\ -5.54 \\ 11.46 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4} = \begin{Bmatrix} 82.79 \\ 189.61 \\ 198.04 \\ -82.79 \\ 110.39 \\ 0.00 \end{Bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΩΝ ΜΗΤΡΩΝ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ



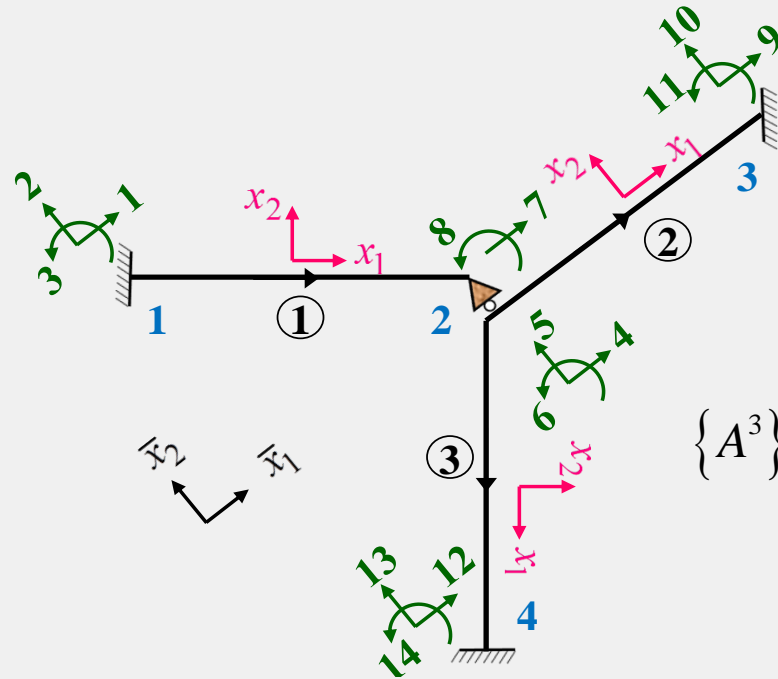
Εσωτερικά εντατικά μεγέθη μελών πλαισίου

Μέλος 2 :

$$\{A^2\} = \{A_r^2\} + [k^2][\Lambda_{PF}^2]\{\bar{D}^2\} =$$

$$= \begin{Bmatrix} F_1^{2j} \\ F_2^{2j} \\ M_3^{2j} \\ F_1^{2k} \\ F_2^{2k} \\ M_3^{2k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 72 \\ 96 \\ 80 \\ 72 \\ 96 \\ -80 \end{Bmatrix} + [k^2][I] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.307 \\ -5.537 \\ -4.234 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4} = \begin{Bmatrix} 170.79 \\ 78.45 \\ 26.52 \\ -26.79 \\ 113.55 \\ -114.27 \end{Bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΩΝ ΜΗΤΡΩΝ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ



Εσωτερικά εντατικά μεγέθη μελών πλαισίου

Μέλος 3 :

$$\{A^3\} = \{A_r^3\} + [k^3][\Lambda_{PF}^3]\{\bar{D}^3\} =$$

$$= \begin{Bmatrix} F_1^{3j} \\ F_2^{3j} \\ M_3^{3j} \\ F_1^{3k} \\ F_2^{3k} \\ M_3^{3k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + [k^3][I] \begin{Bmatrix} 1.307 \\ -5.537 \\ -4.234 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4} = \begin{Bmatrix} 275.63 \\ -6.77 \\ -26.52 \\ -275.63 \\ 6.77 \\ -7.32 \end{Bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΩΝ ΜΗΤΡΩΝ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ

Διαγράμματα
εσωτερικών
εντατικών μεγεθών
μελών πλαισίου

