



ΕΣΩΤΕΡΙΚΕΣ ΕΛΕΥΘΕΡΩΣΕΙΣ – ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΩΝ ΚΟΜΒΩΝ

Ε.Ι. Σαπουντζάκης
Καθηγητής ΕΜΠ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΡΑΒΔΩΤΩΝ ΦΟΡΕΩΝ ΜΕ
ΜΗΤΡΩΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή
2. Βαθμοί ελευθερίας συνδυασμένων κόμβων
3. Μόρφωση ολικού μητρώου στιβαρότητας με συνδυασμένους κόμβους
4. Μόρφωση δράσεων παγίωσης – ισοδύναμων δράσεων με συνδυασμένους κόμβους
5. Ελαστικός κόμβος
6. Εφαρμογή – Ανάλυση επίπεδου πλαισίου με τη μέθοδο συνδυασμένων κόμβων

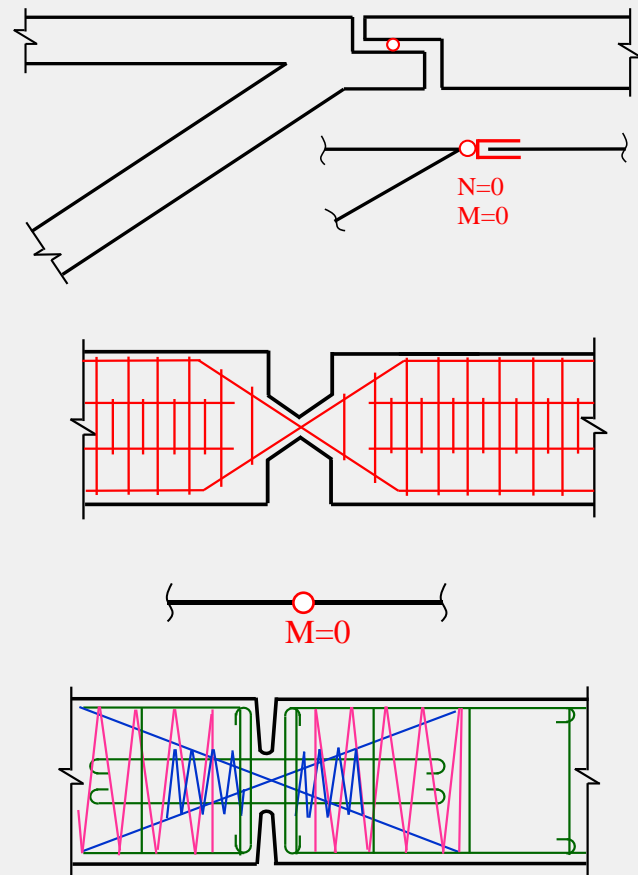
ΕΙΣΑΓΩΓΗ

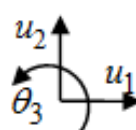
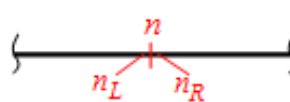
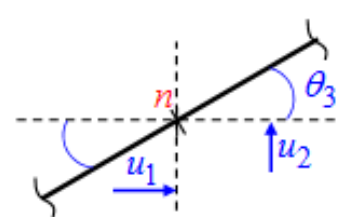
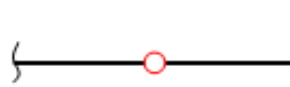
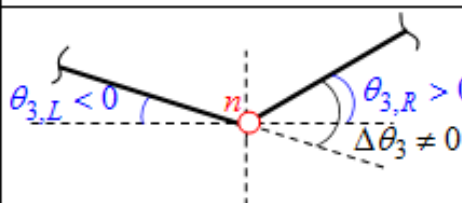
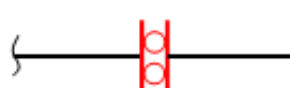
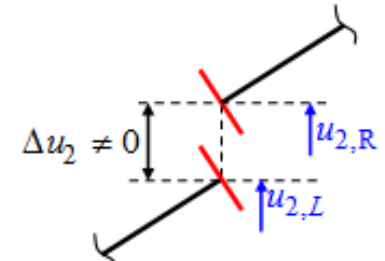
ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα σημεία σύνδεσης δύο γραμμικών στοιχείων είναι οι γνωστοί **κόμβοι** του φορέα. Στην περίπτωση κατά την οποία η σύνδεση γίνεται με **μονολιθικό τρόπο** (πλήρης σύνδεση), τότε μεταφέρονται όλα τα αναπτυσσόμενα εντατικά μεγέθη. Αν για κάποιο λόγο (κατασκευαστικό, λειτουργικό ή στατικό) δεν είναι επιθυμητή ή δυνατή η μεταφορά συγκεκριμένων εντατικών μεγεθών διατομής, τότε η σύνδεση των στοιχείων παρουσιάζει **εσωτερική ελευθέρωση**. Ειδικότερα, η αδυναμία μεταφοράς **αξονικών δυνάμεων** ή **τεμνουσών δυνάμεων** ή **καμπτικών ροπών** ή **στρεπτικών ροπών** σημαίνει ότι τα στοιχεία συνδέονται με **αξονική** ή **διατμητική** ή **καμπτική** ή **στρεπτική ελευθέρωση**, αντίστοιχα. Η σύνδεση δύο γραμμικών στοιχείων μπορεί να γίνει με τρόπο που να αποκλείεται η μεταφορά όχι μόνο ενός, αλλά περισσότερων εντατικών μεγεθών (**πολλαπλή εσωτερική ελευθέρωση**).

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Χαρακτηριστικές εσωτερικές ελευθερώσεις

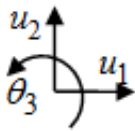

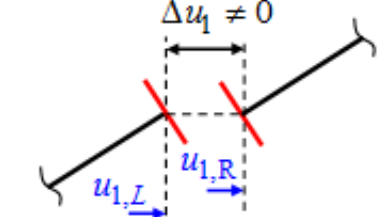

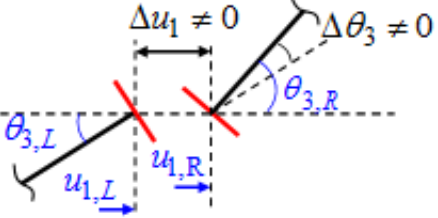
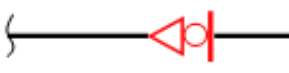
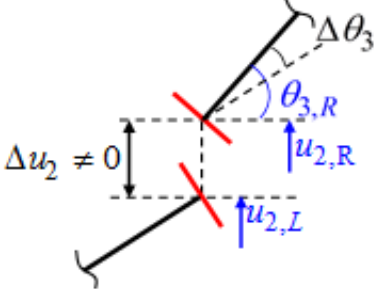


	Συμβολισμός	Άγνωστα μεγέθη στον κόμβο n	Παραμορφωμένη κατάσταση
Μονολιθική Σύνδεση $\Delta u_1 = u_{1,R} - u_{1,L} = 0$ $\Delta u_2 = u_{2,R} - u_{2,L} = 0$ $\Delta \theta_3 = \theta_{3,R} - \theta_{3,L} = 0$		M, Q, N u_1, u_2, θ_3	
Καμπτική ελευθέρωση M = 0 $\Delta u_1 = \Delta u_2 = 0$		Q, N u_1, u_2 $\Delta \theta_3$	
Διατμητική ελευθέρωση Q = 0 $\Delta u_1 = \Delta \theta_3 = 0$		M, N u_1, θ_3 Δu_2	

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Χαρακτηριστικές εσωτερικές ελευθεώσεις

Η εισαγωγή εσωτερικής ελευθέρωσης σε σημείο φορέα έχει άμεση επίπτωση στα κινηματικά μεγέθη που αναπτύσσονται εκατέρωθεν του σημείου αυτού. Η μονολιθική σύνδεση των άκρων των δύο συνδεόμενων στοιχείων δεν υφίσταται πλέον και τα δύο αυτά άκρα μπορούν να εμφανίσουν διαφορετικές μετακινήσεις (μετατοπίσεις ή/και στροφές). Αυτό σημαίνει ότι στην **καμπτική ελευθέρωση** ($M=0$) εμφανίζεται **γόνατο** $\Delta\theta_3 \neq 0$, στη **διατμητική ελευθέρωση** ($Q=0$) **άλμα** $\Delta u_2 \neq 0$ και στην **αξονική ελευθέρωση** ($N=0$) **χάσμα** $\Delta u_1 \neq 0$.

	Συμβολισμός	Άγνωστα μεγέθη στον κόμβο n	Παραμορφωμένη κατάσταση
<p>Αξονική ελευθέρωση $N=0$ $\Delta u_2 = \Delta \theta_3 = 0$</p>		M, Q u_2, θ_3 Δu_1	
<p>Κατακόρυφη Σύνδεση $M=N=0$ $\Delta u_2 = 0$</p>		Q u_2 $\Delta u_1, \Delta \theta_3$	
<p>Οριζόντια Σύνδεση $M=Q=0$ $\Delta u_1 = 0$</p>		N u_1 $\Delta u_2, \Delta \theta_3$	

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

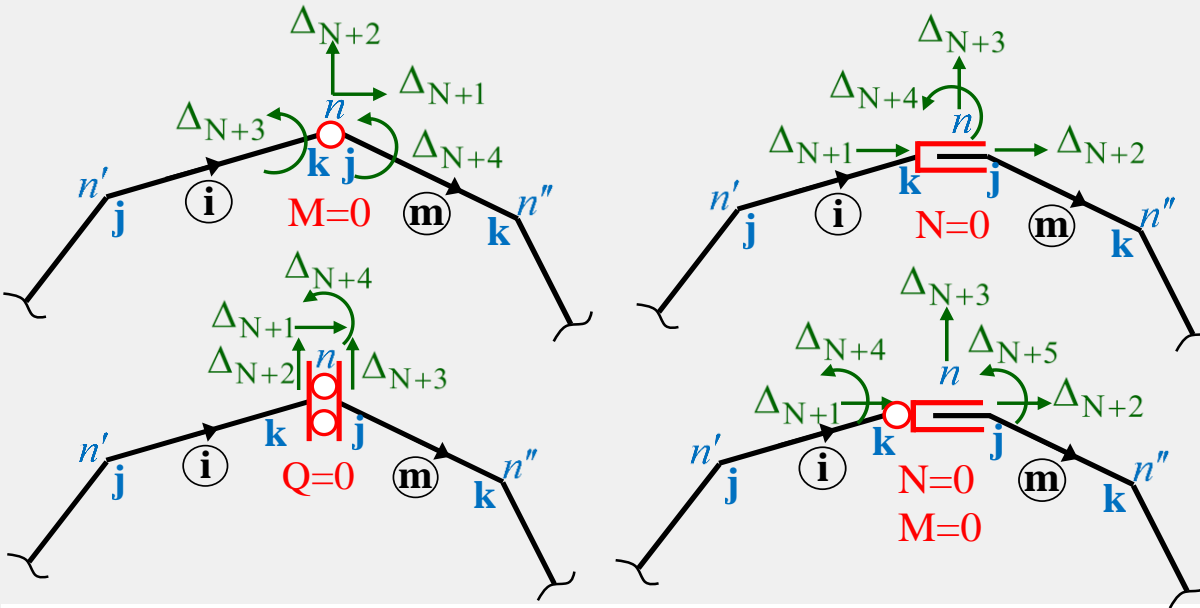
Πλήρεις, μονόπλευρες και ελαστικές ελευθερώσεις

Πλήρης Αρθρωση	Μονόπλευρες Αρθρώσεις				
Ελαστικοί κόμβοι					

Σε περίπτωση κόμβου φορέα στον οποίο συνδέονται τρία ή περισσότερα μέλη, η εσωτερική ελευθέρωση (π.χ. άρθρωση) μπορεί να είναι **μονόπλευρη**. Επίσης, μπορεί να θεωρηθεί ότι ναι μεν δεν επιτυγχάνεται μονολιθική σύνδεση, εντούτοις όμως μπορεί να μεταφερθεί ικανό ποσοστό ροπής. Στις περιπτώσεις αυτές ο κόμβος σύνδεσης ονομάζεται **ελαστικός κόμβος**, η σύνδεση θεωρείται ημιάκαμπτη ή αλλιώς ενδόσιμη.

ΒΑΘΜΟΙ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΩΝ ΚΟΜΒΩΝ

ΒΑΘΜΟΙ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΩΝ ΚΟΜΒΩΝ

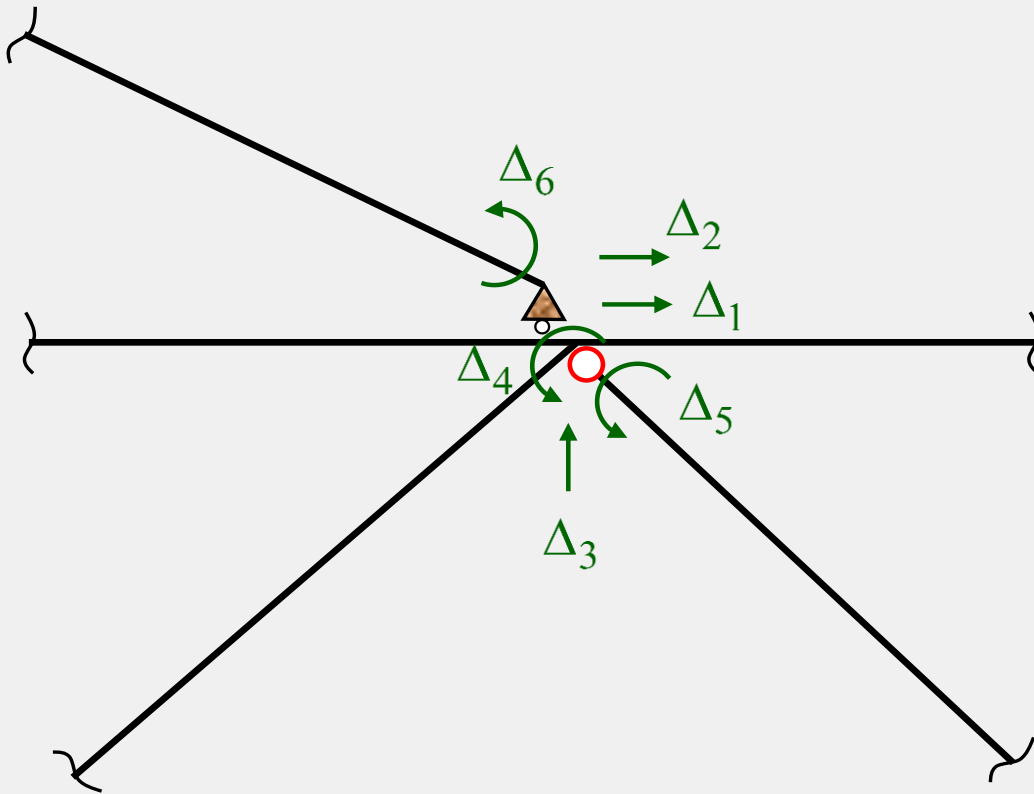


Περίπτωση	Κοινές	Μη κοινές	Σύνολο μετακινήσεων
(α)	$\Delta_{N+1}, \Delta_{N+2}$	$\Delta_{N+3}, \Delta_{N+4}$	4
(β)	$\Delta_{N+3}, \Delta_{N+4}$	$\Delta_{N+1}, \Delta_{N+2}$	4
(γ)	$\Delta_{N+1}, \Delta_{N+4}$	$\Delta_{N+2}, \Delta_{N+3}$	4
(δ)	Δ_{N+3}	$\Delta_{N+1}, \Delta_{N+2}, \Delta_{N+4}, \Delta_{N+5}$	5

Για την αντιμετώπιση των εσωτερικών ελευθερώσεων με τη μέθοδο των συνδυασμένων κόμβων θεωρείται ότι τα στοιχεία τα οποία συντρέχουν στον κόμβο με την ελευθέρωση διατηρούν τους βαθμούς ελευθερίας των αντίστοιχων άκρων, οι οποίοι λογίζονται ως ενεργοί βαθμοί ελευθερίας των αντίστοιχων κόμβων. Η ύπαρξη της ελευθέρωσης διακόπτει τη συνέχεια του φορέα με αποτέλεσμα να μην ισχύει το συμβιβαστό των μετακινήσεων.

ΒΑΘΜΟΙ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΩΝ ΚΟΜΒΩΝ

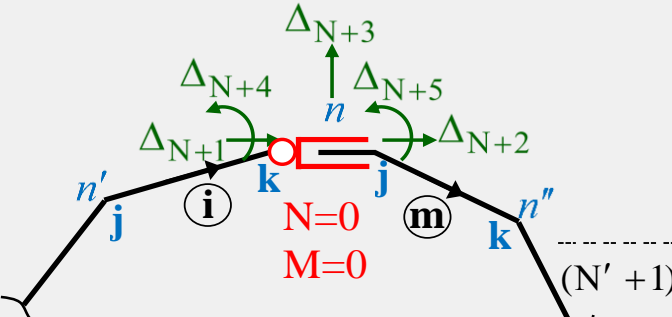
Εσωτερικές ελευθερώσεις σε κόμβο ολόσωμου φορέα



Η άρση του συμβιβαστού των μετακινήσεων ισχύει μόνο για τις μετακινήσεις εκείνες οι οποίες επηρεάζονται από την ελευθέρωση. Στη συνέχεια, οι μη κοινές ακραίες μετακινήσεις μεταφέρονται στον κόμβο και συνυπολογίζονται με τις μετακινήσεις του κόμβου που είναι κοινές για όλα τα μέλη που συντρέχουν σε αυτόν. Με την ίδια πρακτική μπορεί να αντιμετωπισθούν και πιο περίπλοκες περιπτώσεις συνδυασμένων κόμβων, όπως αυτή στο σχήμα, στην οποία όπως φαίνεται η μόνη κοινή μετακίνηση όλων των μελών που συντρέχουν στον κόμβο είναι η κατακόρυφη μετατόπιση Δ_3 .

ΜΟΡΦΩΣΗ ΟΛΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΟΥΣ ΚΟΜΒΟΥΣ

ΜΟΡΦΩΣΗ ΟΛΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΟΥΣ ΚΟΜΒΟΥΣ



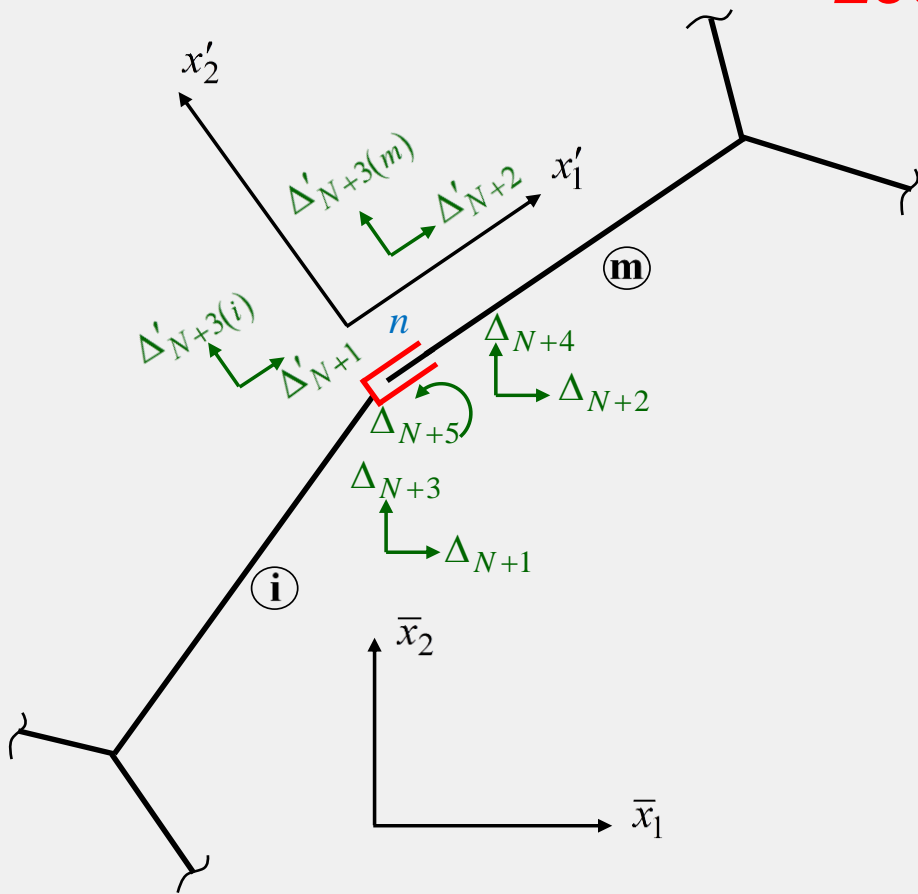
Εσωτερική ελευθέρωση κατά καθολικό άξονα

Κατά τη μόρφωση του ολικού μητρώου στιβαρότητας του φορέα πρέπει να ληφθεί υπόψη και η ύπαρξη των μη κοινών μετακινήσεων στους κόμβους.

$(N' + 1)$				$k_{14}^{(i)}$	0	$k_{15}^{(i)}$	$k_{16}^{(i)}$	0			
$(N' + 2)$	$[k_{jj}^{(i)}]$			$k_{24}^{(i)}$	0	$k_{25}^{(i)}$	$k_{26}^{(i)}$	0		$[0]$	
$(N' + 3)$				$k_{34}^{(i)}$	0	$k_{35}^{(i)}$	$k_{36}^{(i)}$	0			
$(N + 1)$	$k_{41}^{(i)}$	$k_{42}^{(i)}$	k_{43}^i	$k_{44}^{(i)}$	0	$k_{45}^{(i)}$	$k_{46}^{(i)}$	0	0	0	0
$(N + 2)$	0	0	0	0	$k_{11}^{(m)}$	$k_{12}^{(m)}$	0	$k_{13}^{(m)}$	$k_{14}^{(m)}$	$k_{15}^{(m)}$	$k_{16}^{(m)}$
$(N + 3)$	$k_{51}^{(i)}$	$k_{52}^{(i)}$	k_{53}^i	$k_{54}^{(i)}$	$k_{21}^{(m)}$	$k_{55}^{(i)} + k_{22}^{(m)}$	$k_{56}^{(i)}$	$k_{23}^{(m)}$	$k_{24}^{(m)}$	$k_{25}^{(m)}$	$k_{26}^{(m)}$
$(N + 4)$	$k_{61}^{(i)}$	$k_{62}^{(i)}$	k_{63}^i	$k_{64}^{(i)}$	0	$k_{65}^{(i)}$	$k_{66}^{(i)}$	0	0	0	0
$(N + 5)$	0	0	0	0	$k_{31}^{(m)}$	$k_{32}^{(m)}$	0	$k_{33}^{(m)}$	$k_{34}^{(m)}$	$k_{35}^{(m)}$	$k_{36}^{(m)}$
$(N'' + 1)$				0	$k_{41}^{(m)}$	$k_{42}^{(m)}$	0	$k_{43}^{(m)}$			
$(N'' + 2)$	$[0]$			0	$k_{51}^{(m)}$	$k_{52}^{(m)}$	0	$k_{53}^{(m)}$		$[k_{kk}^{(m)}]$	
$(N'' + 3)$				0	$k_{61}^{(m)}$	$k_{62}^{(m)}$	0	$k_{63}^{(m)}$			

ΜΟΡΦΩΣΗ ΟΛΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΟΥΣ ΚΟΜΒΟΥΣ

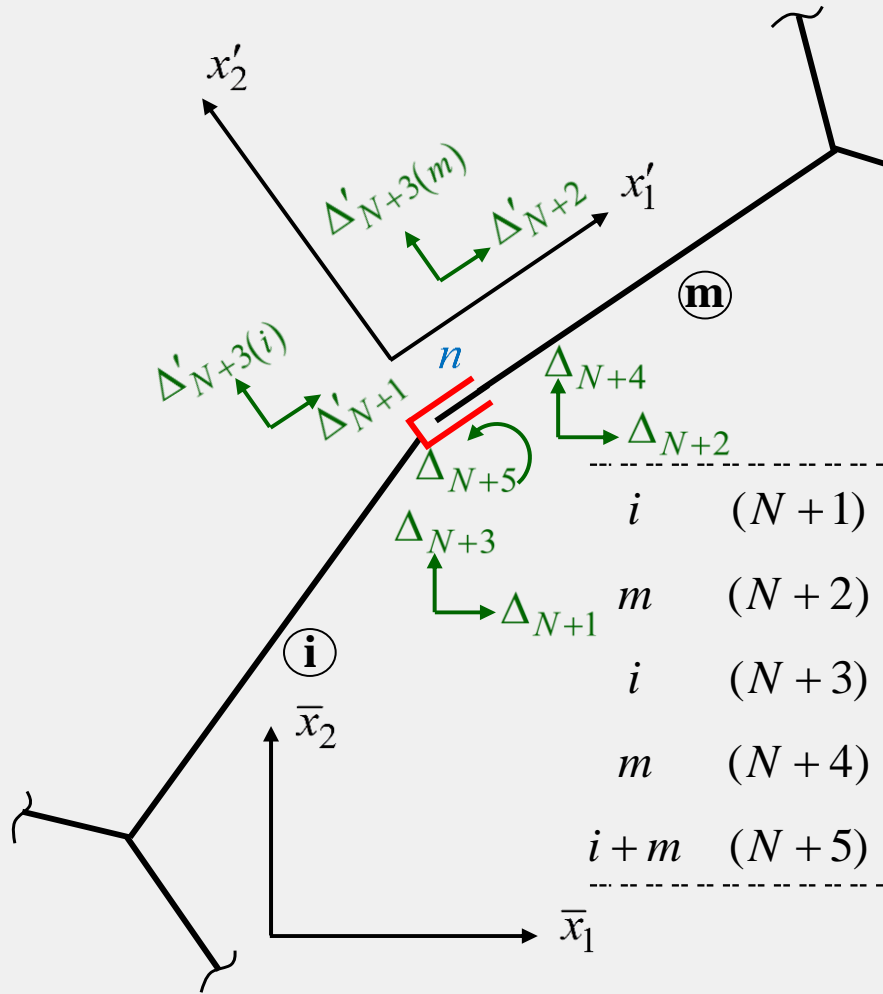
Εσωτερική ελευθέρωση κατά μη καθολικό άξονα



Στην περίπτωση κατά την οποία η ελευθέρωση δεν συντελείται κατά τη διεύθυνση καθολικού άξονα τότε είναι απαραίτητος ο μετασχηματισμός από το καθολικό σύστημα αξόνων στο σύστημα της ελευθέρωσης. Η αξονική ελευθέρωση του σχήματος πραγματοποιείται κατά τον τοπικό άξονα x_1 του στοιχείου (m) . Εάν θεωρηθεί ότι οι μετατοπίσεις $\Delta_{N+1} \div \Delta_{N+5}$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, τότε το υπομητρώο που αντιστοιχεί στον κόμβο (n) θα είναι

ΜΟΡΦΩΣΗ ΟΛΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΟΥΣ ΚΟΜΒΟΥΣ

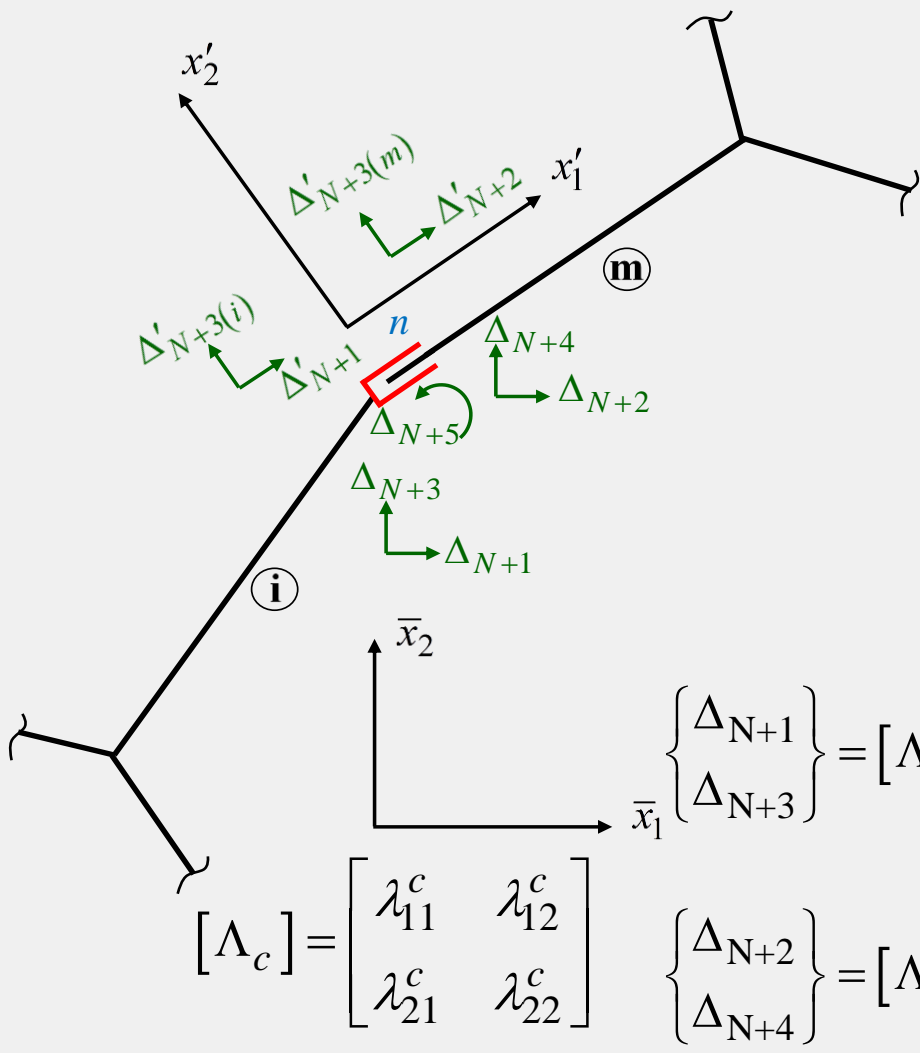
**Εσωτερική ελευθέρωση κατά μη
καθολικό άξονα**



	i	m	i	m	$i+m$
	$(N+1)$	$(N+2)$	$(N+3)$	$(N+4)$	$(N+5)$
i	$k_{44}^{(i)}$	0	$k_{45}^{(i)}$	0	$k_{46}^{(i)}$
m	0	$k_{11}^{(m)}$	0	$k_{12}^{(m)}$	$k_{13}^{(m)}$
i	$k_{54}^{(i)}$	0	$k_{55}^{(i)}$	0	$k_{56}^{(i)}$
m	0	$k_{21}^{(m)}$	0	$k_{22}^{(m)}$	$k_{23}^{(m)}$
$i+m$	$k_{64}^{(i)}$	$k_{31}^{(m)}$	$k_{65}^{(i)}$	$k_{32}^{(m)}$	$k_{66}^{(i)} + k_{33}^{(m)}$

**Μόρφωση μητρώου στιβαρότητας
κατά τους καθολικούς άξονες**

ΜΟΡΦΩΣΗ ΟΛΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΟΥΣ ΚΟΜΒΟΥΣ



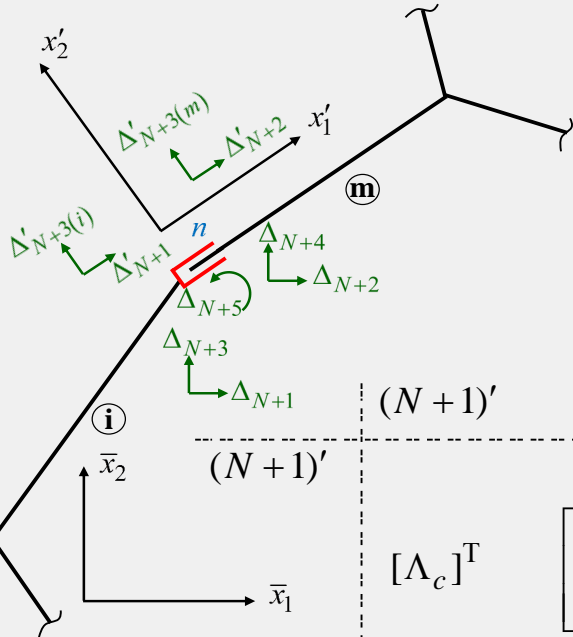
Στη μόρφωση του προηγούμενου μητρώου στιβαρότητας δεν λαμβάνεται υπ' όψη ότι

$$\Delta'_{(N+3)(i)} = \Delta'_{(N+3)(m)}$$

Έτσι **επιβάλλεται** μετασχηματισμός των βαθμών ελευθερίας του κόμβου (n) από το καθολικό σύστημα αξόνων στο τοπικό της ελευθέρωσης με τρόπο ανάλογο προς αυτόν των κεκλιμένων στηρίξεων. Έτσι, οι συνιστώσες των μετακινήσεων μετασχηματίζονται σύμφωνα με τις σχέσεις

όπου λ_{ij} είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης του καθολικού συστήματος ως προς το σύστημα της ελευθέρωσης, το οποίο στην περίπτωση αυτή συμπίπτει με το τοπικό σύστημα της ράβδου (m).

ΜΟΡΦΩΣΗ ΟΛΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΟΥΣ ΚΟΜΒΟΥΣ

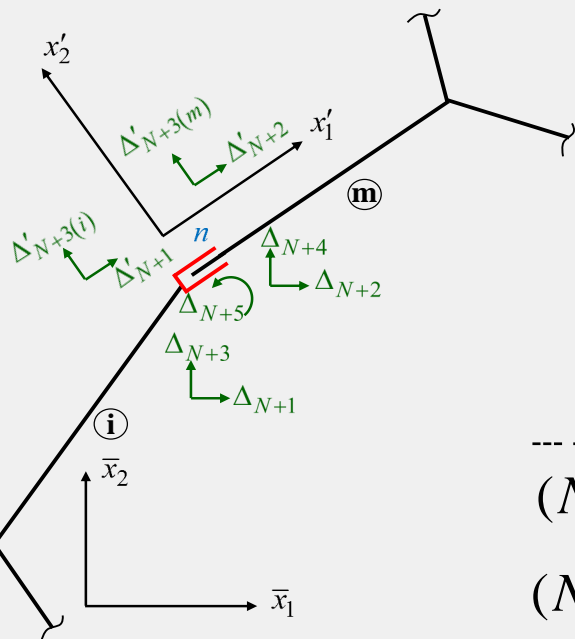


Τροποποίηση του ολικού μητρώου στιβαρότητας περί τον κόμβο (n) του επίπεδου φορέα πριν τη συνθήκη του συμβιβαστού των μετακινήσεων

$$\Delta'_{(N+3)_{(i)}} = \Delta'_{(N+3)_{(m)}}$$

	$(N+1)'$	$(N+3)'_{(i)}$	$(N+2)'$	$(N+3)'_{(m)}$	$(N+5)$
$(N+1)'$	$[\Lambda_c]^T \begin{bmatrix} k_{44}^{(i)} & k_{45}^{(i)} \\ k_{54}^{(i)} & k_{55}^{(i)} \end{bmatrix}$	$[\Lambda_c]$	0	0	$[\Lambda_c]^T \begin{bmatrix} k_{46}^{(i)} \\ k_{56}^{(i)} \end{bmatrix}$
$(N+3)'_{(i)}$	0	0	0	0	0
$(N+2)'$	0	0	$[\Lambda_c]^T \begin{bmatrix} k_{11}^{(m)} & k_{12}^{(m)} \\ k_{21}^{(m)} & k_{22}^{(m)} \end{bmatrix}$	$[\Lambda_c]$	$[\Lambda_c]^T \begin{bmatrix} k_{13}^{(m)} \\ k_{23}^{(m)} \end{bmatrix}$
$(N+3)'_m$	0	0	0	0	0
$(N+5)$	$\begin{bmatrix} k_{64}^{(i)} & k_{65}^{(i)} \end{bmatrix} [\Lambda_c]$	0	$\begin{bmatrix} k_{31}^{(m)} & k_{32}^{(m)} \end{bmatrix}$	0	$k_{66}^{(i)} + k_{33}^{(m)}$

ΜΟΡΦΩΣΗ ΟΛΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΟΥΣ ΚΟΜΒΟΥΣ



Τροποποίηση του ολικού μητρώου στιβαρότητας περί τον κόμβο (n) του επίπεδου φορέα μετά τη συνθήκη του συμβιβαστού των μετακινήσεων

$$\Delta'_{(N+3)(i)} = \Delta'_{(N+3)(m)}$$

	$(N+1)'$	$(N+2)'$	$(N+3)'$	$(N+5)$
$(N+1)'$	$\hat{k}_{44}^{(i)}$	0	$\hat{k}_{45}^{(i)}$	$*k_{46}^{(i)}$
$(N+2)'$	0	$\hat{k}_{11}^{(m)}$	$\hat{k}_{12}^{(m)}$	$*k_{13}^{(m)}$
$(N+3)'$	$\hat{k}_{54}^{(i)}$	$\hat{k}_{21}^{(m)}$	$\hat{k}_{65}^{(i)} + \hat{k}_{11}^{(m)}$	$*k_{56}^{(i)} + *k_{23}^{(m)}$
$(N+5)$	$k_{64}^{*(i)}$	$k_{31}^{*(m)}$	$k_{65}^{*(i)} + k_{32}^{*(m)}$	$k_{66}^{(i)} + k_{33}^{(m)}$

Όπου

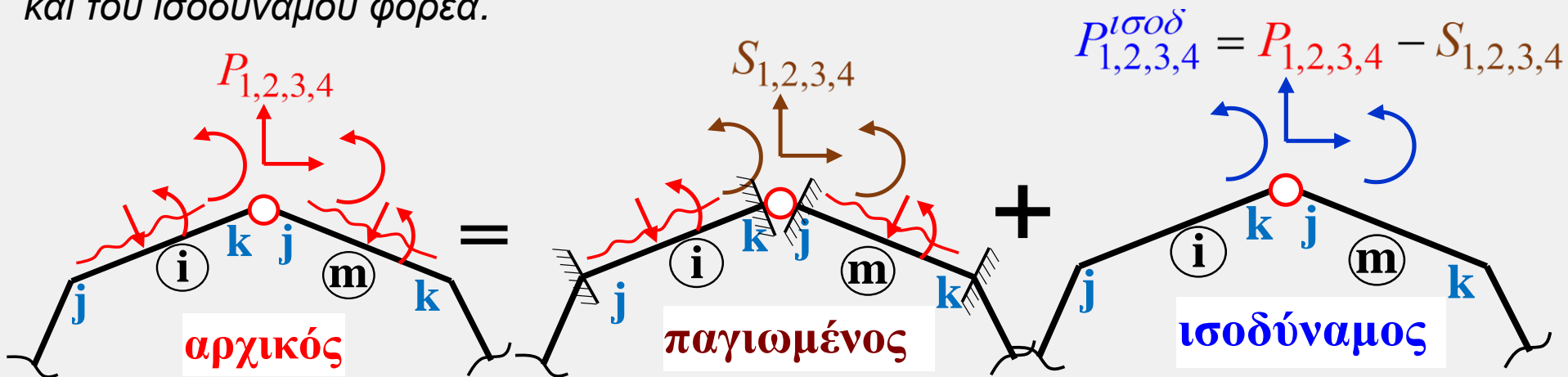
$$[\hat{k}] = [\Lambda_c]^T [k] [\Lambda_c]$$

$$[*k] = [\Lambda_c]^T [k] \quad [k^*] = [k] [\Lambda_c]$$

*ΜΟΡΦΩΣΗ ΔΡΑΣΕΩΝ ΠΑΓΙΩΣΗΣ –
ΙΣΟΔΥΝΑΜΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ ΜΕ
ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΟΥΣ ΚΟΜΒΟΥΣ*

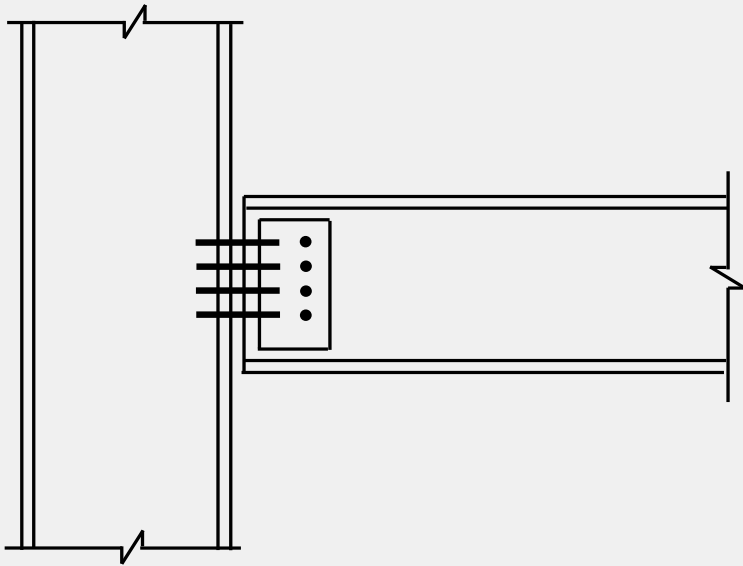
ΜΟΡΦΩΣΗ ΔΡΑΣΕΩΝ ΠΑΓΙΩΣΗΣ – ΙΣΟΔΥΝΑΜΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ ΜΕ ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΟΥΣ ΚΟΜΒΟΥΣ

Η ύπαρξη φορτίων κατά μήκος του τοπικού άξονα των στοιχείων καθώς και θερμοκρασιακών μεταβολών ή αυτεντατικών καταστάσεων (ενδιάμεσα φορτία), δημιουργούν ένταση στις ράβδους, η οποία δεν εξαρτάται μόνο από τις ακραίες μετακινήσεις των στοιχείων λόγω των επικόμβιων δράσεων. Έτσι, για την αντιμετώπιση αυτών των ενδιάμεσων φορτίσεων αναζητείται η επίλυση ενός φορέα ισοδύναμου με τον αρχικό με επικόμβια μόνο φορτία. Η ισοδυναμία αφορά στις επικόμβιες μετακινήσεις των δύο φορέων. Αυτό επιτυγχάνεται με τη θεώρηση της αρχής της επαλληλίας μεταξύ του αρχικού φορέα και του αθροίσματος του παγιωμένου και του ισοδύναμου φορέα.



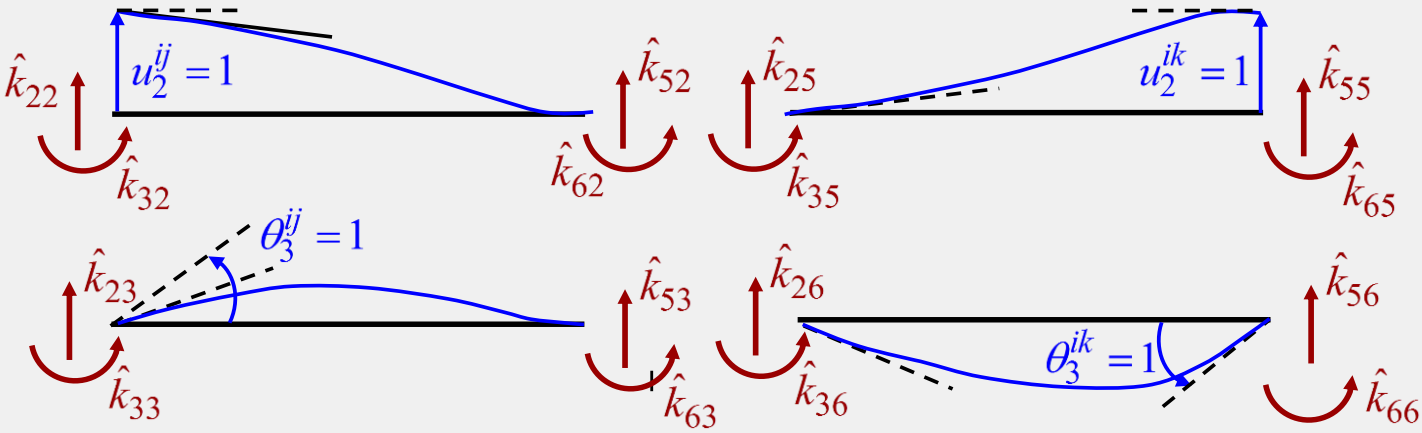
ΕΛΑΣΤΙΚΟΣ ΚΟΜΒΟΣ

ΕΛΑΣΤΙΚΟΣ ΚΟΜΒΟΣ



Η ύπαρξη **μη στερεών κόμβων** είναι σύνηθες φαινόμενο ιδιαίτερα στις μεταλλικές κατασκευές. Η παρουσία κομβοελασμάτων, αλλά και οι γενικότερες συνθήκες στηρίξεως των μελών μεταλλικών κατασκευών, δεν εξασφαλίζουν τις συνθήκες στερεού κόμβου. Για την περίπτωση επίπεδου ολόσωμου φορέα, ο **ελαστικός κόμβος** αντιμετωπίζεται κατά περίπτωση με ένα **στροφικό ελατήριο** ή με ένα **μεταφορικό ελατήριο** ή και με τα δύο ελατήρια ταυτόχρονα. Οι **σταθερές των ελατηρίων** προσομοιώνουν τη συμπεριφορά του ελαστικού κόμβου και προσδιορίζονται κυρίως από πειραματικές μετρήσεις και σπανιότερα από αριθμητική προσομοίωση.

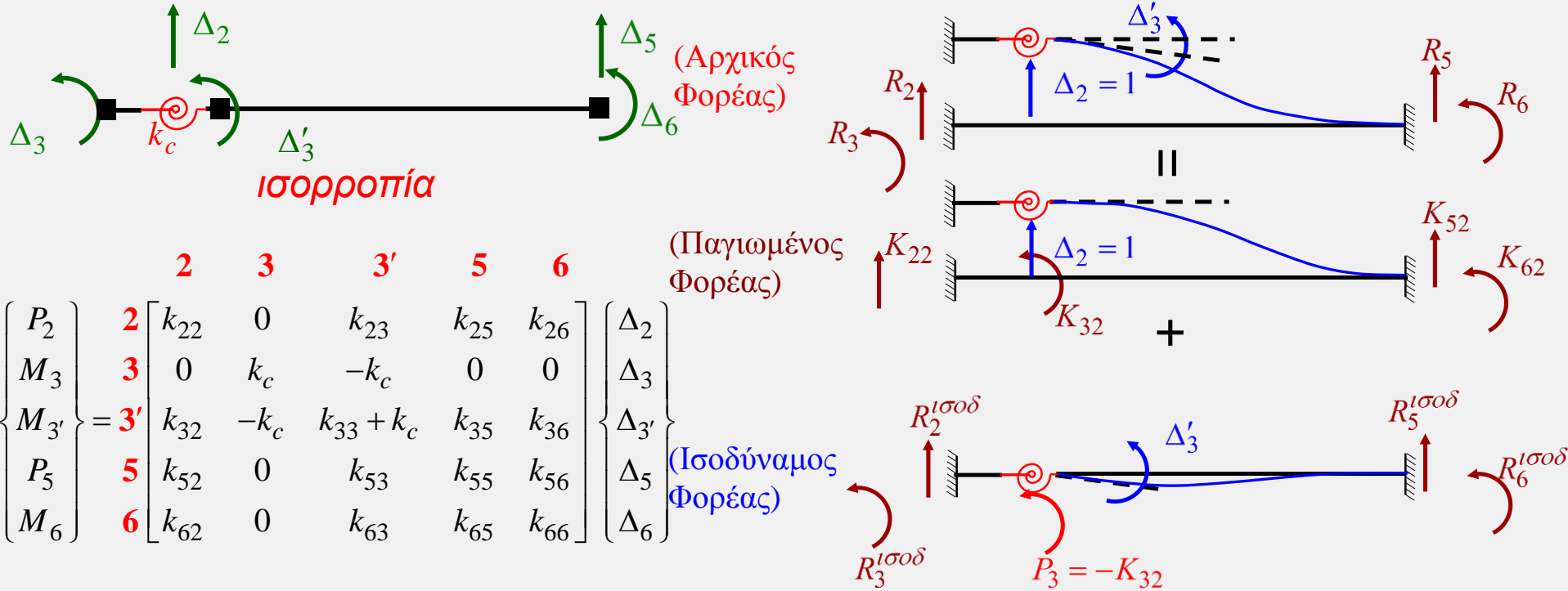
ΕΛΑΣΤΙΚΟΣ ΚΟΜΒΟΣ



Προσοχή στη γωνία στροφής του μέλους στη θέση του ελαστικού κόμβου

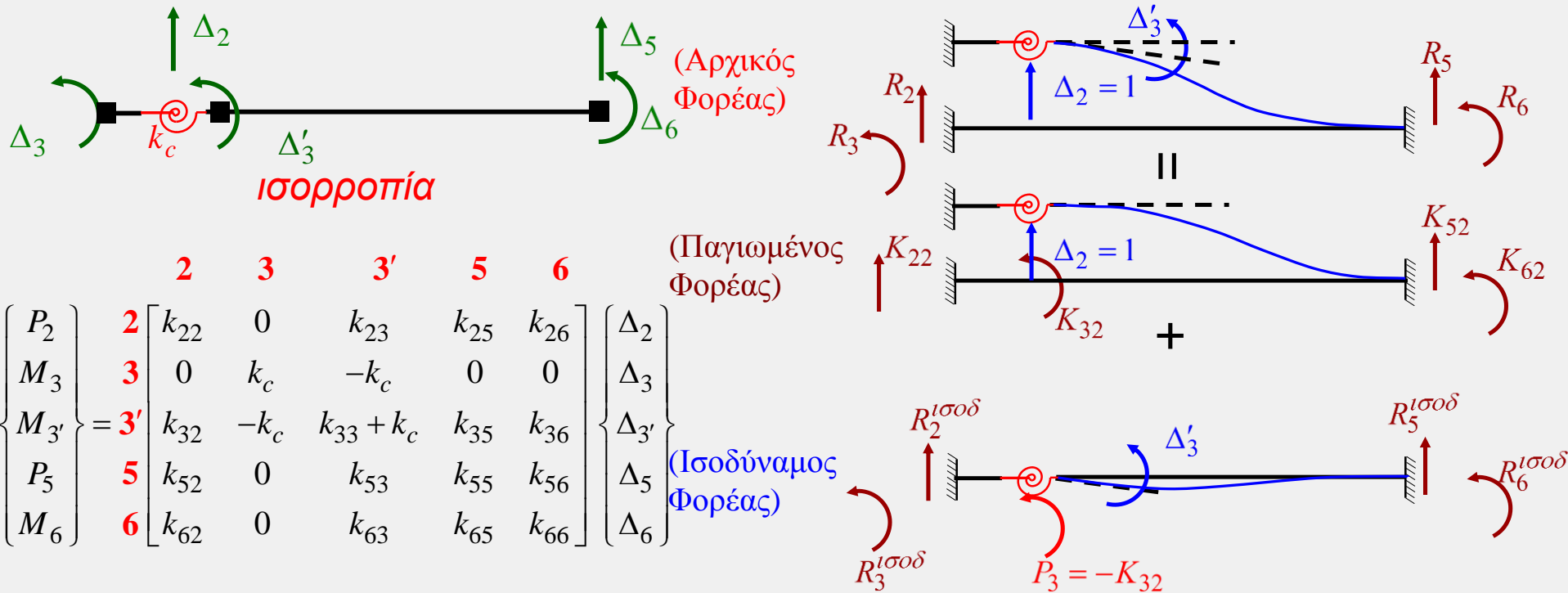
Δείκτες στιβαρότητας στοιχείου με ένα στροφικό ελατήριο στο άκρο j και οι ελαστικές γραμμές των καμπτοδιατμητικών βαθμών ελευθερίας για τις μοναδιαίες επιβαλλόμενες ακραίες μετακινήσεις. Οι δείκτες στιβαρότητας που αντιστοιχούν στους αξονικούς βαθμούς ελευθερίας δεν επηρεάζονται από την ύπαρξη του στροφικού ελατηρίου και γι' αυτό έχουν παραληφθεί. Για τον προσδιορισμό των προαναφερθέντων δεικτών στιβαρότητας χρησιμοποιείται η αρχή του παγιωμένου και του ισοδύναμου φορέα.

ΕΛΑΣΤΙΚΟΣ ΚΟΜΒΟΣ



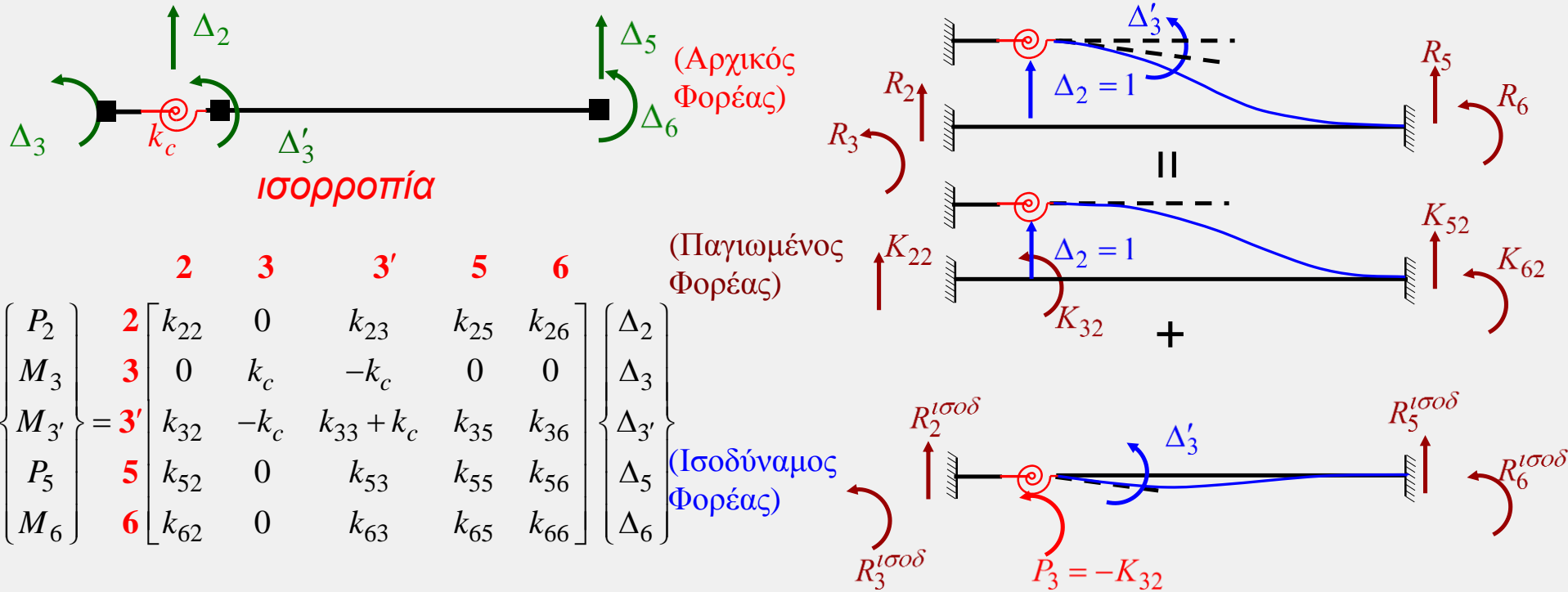
Παρουσιάζεται η διαδικασία υπολογισμού των αντιδράσεων του φορέα-στοιχείου για **μοναδιαία εγκάρσια μετακίνηση του άκρου j** , οι οποίες αντιστοιχούν με τους δείκτες στιβαρότητας $\hat{k}_{i2}, i = 2, 3, 5, 6$. Οι αντιδράσεις αυτές ισούνται με το άθροισμα των αντιδράσεων του παγιωμένου και του ισοδύναμου φορέα.

ΕΛΑΣΤΙΚΟΣ ΚΟΜΒΟΣ



Οι αντιδράσεις του παγιωμένου φορέα ισούνται με τους τυπικούς δείκτες στιβαρότητας του στοιχείου (σύμφωνα με τον ορισμό τους), ενώ στον παγιωμένο βαθμό ελευθερίας $\Delta_{3'}$ η δράση παγίωσης ισούται με τον τυπικό δείκτη στιβαρότητας k_{32} . Οι αντιδράσεις του ισοδύναμου φορέα υπολογίζονται από τη ισορροπία αφού πρώτα υπολογιστεί η στροφή $\Delta_{3'}$ του φορέα-στοιχείου με τις συνοριακές συνθήκες $\Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_5 = \Delta_6 = 0$ και φόρτιση $M_{3'} = -k_{32}$.

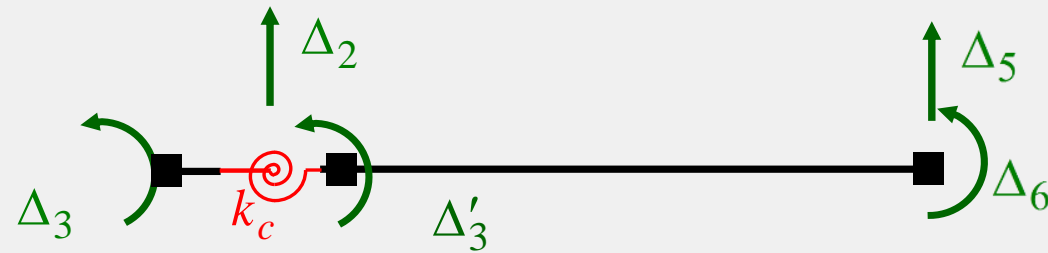
ΕΛΑΣΤΙΚΟΣ ΚΟΜΒΟΣ



Έτσι, από την τρίτη εξίσωση της πιο πάνω μητρικής σχέσης, η στρόφη Δ_3' του φορέα-στοιχείου με τις συνοριακές συνθήκες $\Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_5 = \Delta_6 = 0$ και φόρτιση $M_{3'} = -k_{32}$ προκύπτει

$$\Delta_3' = -\frac{k_{32}}{(k_{33} + k_c)} \quad \text{οπότε από τη 2}^{\text{η}} \text{ εξίσωση} \quad R_3^{\text{ισοδ}} = \frac{k_c k_{32}}{(k_{33} + k_c)} \quad \text{και} \quad R_3 = \hat{k}_{32} = \frac{k_c k_{32}}{(k_{33} + k_c)}$$

ΕΛΑΣΤΙΚΟΣ ΚΟΜΒΟΣ



Η προηγούμενη διαδικασία μπορεί επίσης να προκύψει από την παρουσιαζόμενη μητρική σχέση με την επιβολή των κατάλληλων συνοριακών συνθηκών. Έτσι, για $\Delta_2 = 1$, $\Delta_3 = \Delta_5 = \Delta_6 = 0$ και $M_{3'} = 0$, επιλύοντας λαμβάνεται

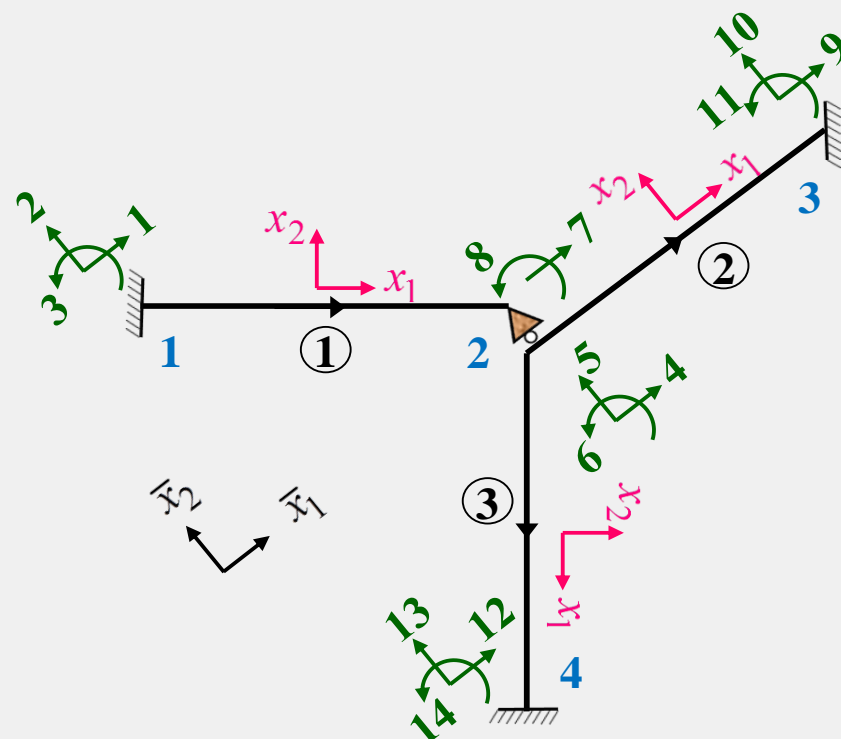
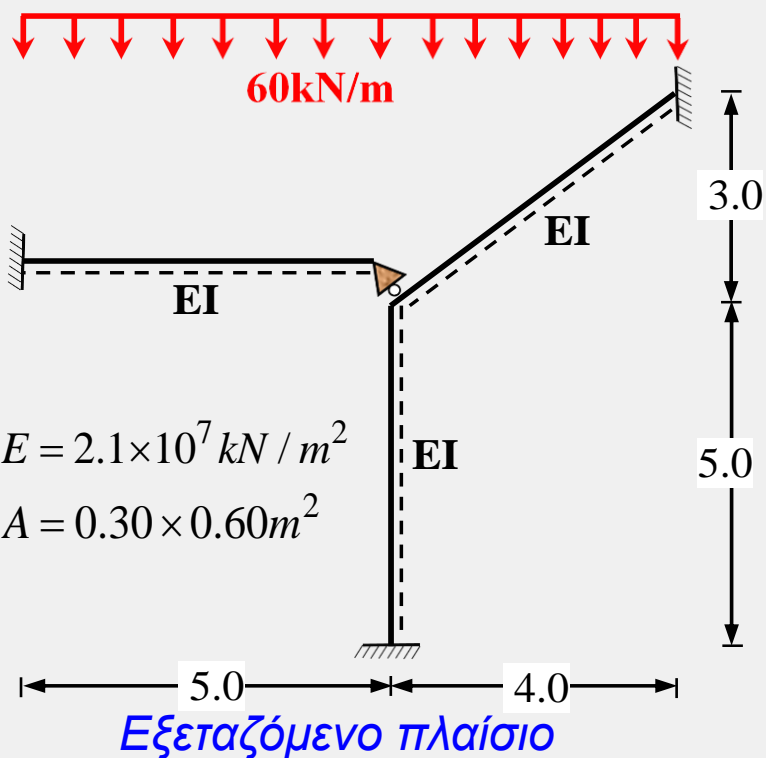
$$\begin{Bmatrix} P_2 \\ M_3 \\ M_{3'} \\ P_5 \\ M_6 \end{Bmatrix} = \begin{matrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{3'} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{6} \end{matrix} \begin{bmatrix} k_{22} & 0 & k_{23} & k_{25} & k_{26} \\ 0 & k_c & -k_c & 0 & 0 \\ k_{32} & -k_c & k_{33} + k_c & k_{35} & k_{36} \\ k_{52} & 0 & k_{53} & k_{55} & k_{56} \\ k_{62} & 0 & k_{63} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_{3'} \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta_{3'} = -\frac{k_{32}}{(k_{33} + k_c)}$$

$$R_3 = \hat{k}_{32} = \frac{k_c k_{32}}{(k_{33} + k_c)}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΩΝ ΚΟΜΒΩΝ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΩΝ ΚΟΜΒΩΝ

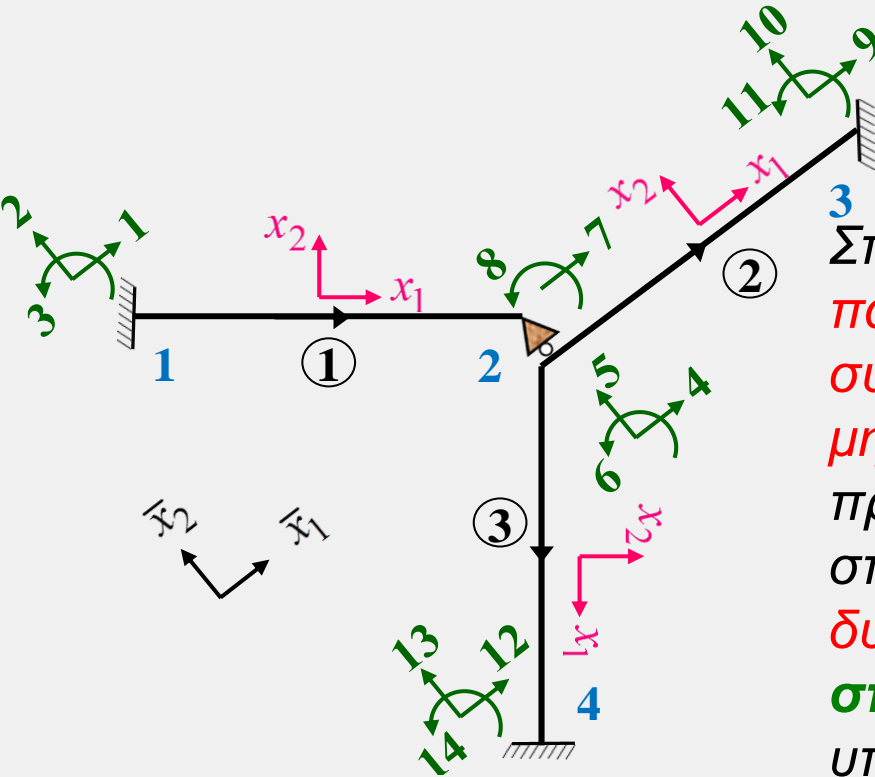


Αρίθμηση κόμβων, μελών, καθολικό και τοπικά συστήματα αξόνων, βαθμοί ελευθερίας

Στοιχεία γεωμετρίας και υλικού μελών

- Μέλος(1): $E^1 = 2.1 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$, $A^1 = 0.18 \text{ m}^2$, $I^1 = 0.0054 \text{ m}^4$, $L^1 = 5.0 \text{ m}$
- Μέλος(2): $E^2 = 2.1 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$, $A^2 = 0.18 \text{ m}^2$, $I^2 = 0.0054 \text{ m}^4$, $L^2 = 5.0 \text{ m}$
- Μέλος(3): $E^3 = 2.1 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$, $A^3 = 0.18 \text{ m}^2$, $I^3 = 0.0054 \text{ m}^4$, $L^3 = 5.0 \text{ m}$

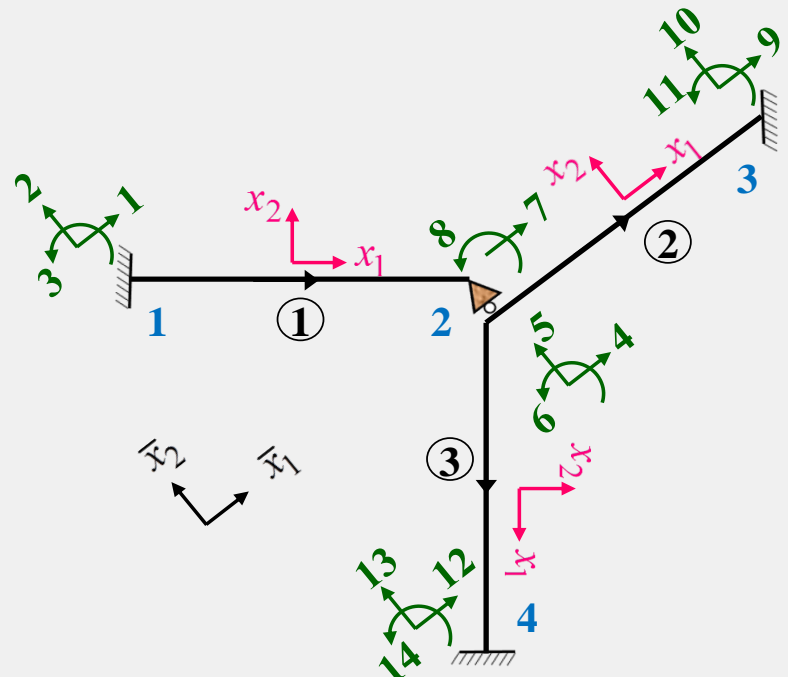
ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΩΝ ΚΟΜΒΩΝ



Μόρφωση καθολικού μητρώου στιβαρότητας πλαισίου

Στο εξεταζόμενο πλαίσιο, λόγω της παρουσίας του συνδυασμένου κόμβου, η σύνθεση των υπομητρώων των καθολικών μητρώων στιβαρότητας των μελών για τον προσδιορισμό του καθολικού μητρώου στιβαρότητας του φορέα **καθίσταται δυσχερής** και η **σύνθεση αυτή θα γίνει στοιχείο – στοιχείο**. Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη τους καθολικούς βαθμούς ελευθερίας στους οποίους αντιστοιχούν τα στοιχεία των καθολικών μητρώων στιβαρότητας των μελών, το καθολικό μητρώο στιβαρότητας του πλαισίου προκύπτει ως

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΩΝ ΚΟΜΒΩΝ



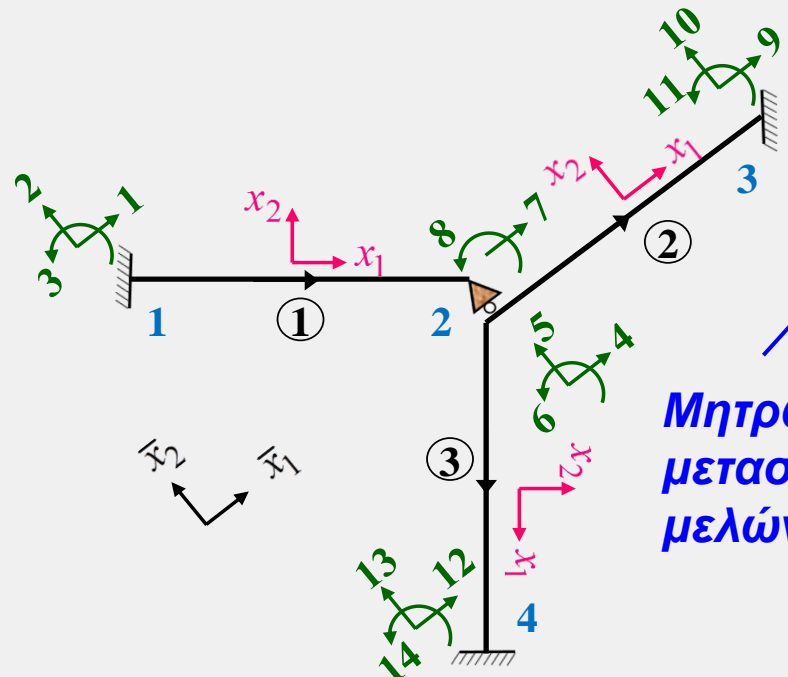
$$[k^1] = EI \begin{bmatrix} 6.667 & 0 & 0 & -6.667 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.240 & 0 & -0.096 & 0.240 \\ 0 & 0.240 & 0.800 & 0 & -0.240 & 0.400 \\ -6.667 & 0 & 0 & 6.667 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & -0.240 & 0 & 0.096 & -0.240 \\ 0 & 0.240 & 0.400 & 0 & -0.240 & 0.800 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 5 \\ 8 \end{matrix}$$

$$[k^2] = EI \begin{bmatrix} 6.667 & 0 & 0 & -6.667 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.240 & 0 & -0.096 & 0.240 \\ 0 & 0.240 & 0.800 & 0 & -0.240 & 0.400 \\ -6.667 & 0 & 0 & 6.667 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & -0.240 & 0 & 0.096 & -0.240 \\ 0 & 0.240 & 0.400 & 0 & -0.240 & 0.800 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{matrix}$$

$$[k^3] = EI \begin{bmatrix} 6.667 & 0 & 0 & -6.667 & 0 & 0 \\ 0 & 0.096 & 0.240 & 0 & -0.096 & 0.240 \\ 0 & 0.240 & 0.800 & 0 & -0.240 & 0.400 \\ -6.667 & 0 & 0 & 6.667 & 0 & 0 \\ 0 & -0.096 & -0.240 & 0 & 0.096 & -0.240 \\ 0 & 0.240 & 0.400 & 0 & -0.240 & 0.800 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{matrix}$$

Τοπικά μητρώα στιβαρότητας μελών

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΩΝ ΚΟΜΒΩΝ



$$\theta^{1j} = \theta^{1k} = 323,13^\circ \quad \theta^{2j} = \theta^{2k} = 0^\circ$$

$$\theta^{3j} = \theta^{3k} = 233,13^\circ$$

$$\left[\Lambda_{PF}^i \right]$$

Μητρώα μετασχηματισμού μελών

$$[\bar{k}^1] = EI$$

1	2	3	7	5	8
4.301	-3.154	0.144	-4.301	3.154	0.144
-3.154	2.461	0.192	3.154	-2.461	0.192
0.144	0.192	0.800	-0.144	-0.192	0.4
-4.301	3.154	-0.144	4.301	-3.154	-0.144
3.154	-2.461	-0.192	-3.154	2.461	-0.192
0.144	0.192	0.4	-0.144	-0.192	0.8

$$[\bar{k}^2] = EI$$

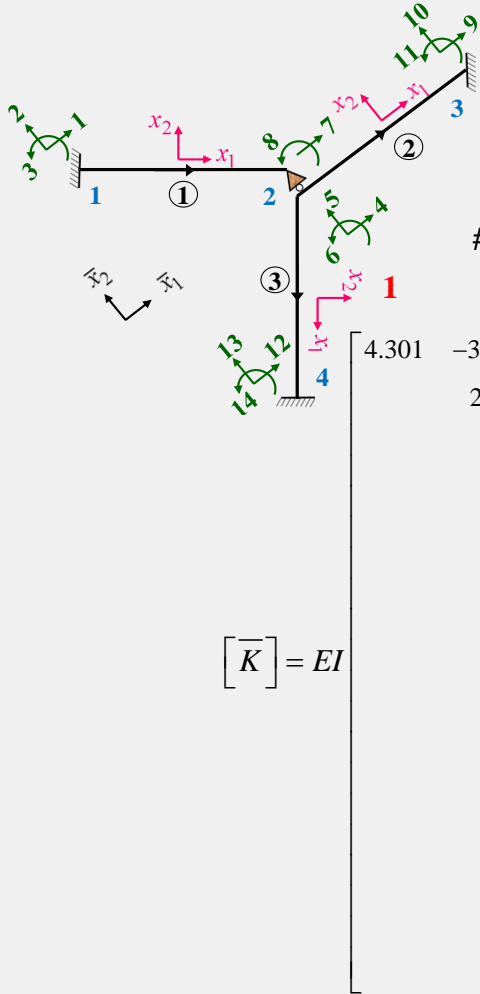
4	5	6	9	10	11
6.667	0	0	-6.667	0	0
0	0.096	0.240	0	-0.096	0.240
0	0.240	0.800	0	-0.240	0.400
-6.667	0	0	6.667	0	0
0	-0.096	-0.24	0	0.096	-0.240
0	0.240	0.40	0	-0.240	0.800

Καθολικά μητρώα σιβαρότητας μελών

$$[\bar{k}^3] = EI$$

4	5	6	12	13	14
2.461	3.154	0.192	-2.461	-3.154	0.192
3.154	4.301	-0.144	-3.154	-4.301	-0.144
0.192	-0.144	0.8	-0.192	0.144	0.4
-2.461	-3.154	-0.192	2.461	3.154	-0.192
-3.154	-4.301	0.144	3.154	4.301	0.144
0.192	-0.144	0.4	-0.192	0.144	0.8

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΩΝ ΚΟΜΒΩΝ



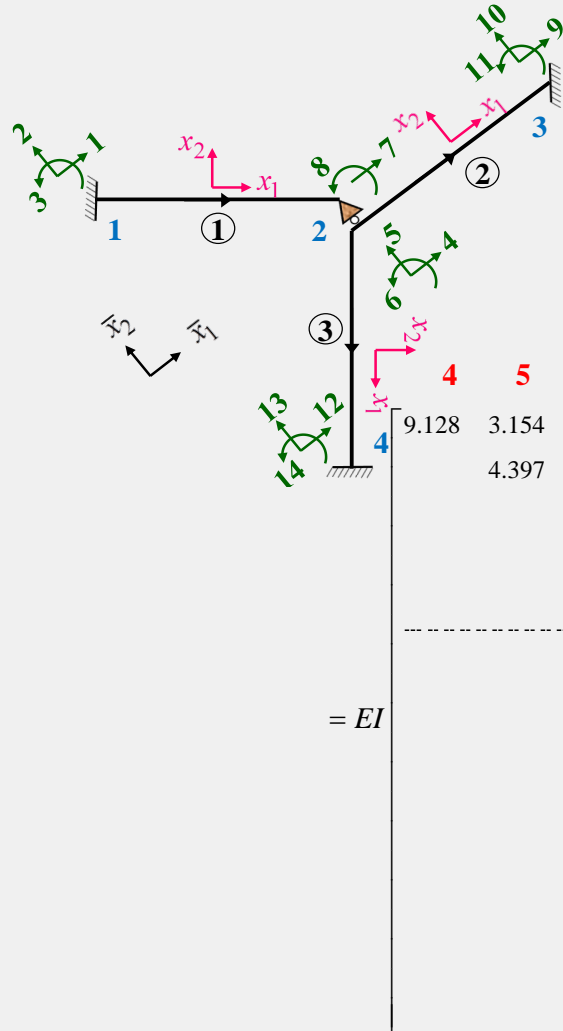
Μόρφωση καθολικού μητρώου στιβαρότητας πλαισίου

	#1				#2				#3			#4			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
$[K] = EI$	4.301	-3.154	0.144	0	3.154	0	-4.301	0.144	0	0	0	0	0	0	1
		2.461	0.192	0	-2.461	0	3.154	0.192	0	0	0	0	0	0	2
			0.8	0	-0.192	0	-0.144	0.400	0	0	0	0	0	0	3
				9.128	-3.154	0.192	0	0	-6.667	0	0	-2.461	-3.154	0.192	4
					6.859	0.096	-3.154	-0.192	0	-0.096	0.24	-3.154	-4.301	-0.144	5
						1.60	0	0	0	-0.24	0.4	-0.192	0.144	0.40	6
							4.301	-0.144	0	0	0	0	0	0	7
								0.8	0	0	0	0	0	0	8
									6.667	0	0	0	0	0	9
										0.096	-0.24	0	0	0	10
											0.8	0	0	0	11
												2.461	3.154	-0.192	12
													4.301	0.144	13
														0.8	14

Καθολικό μητρώο στιβαρότητας πλαισίου

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΩΝ ΚΟΜΒΩΝ

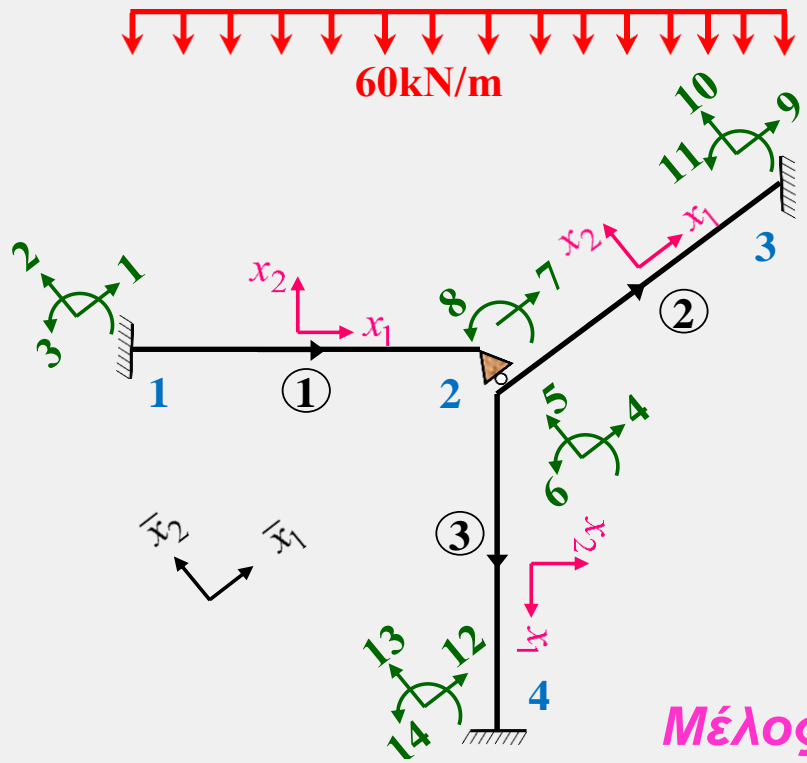
Αναδιατεταγμένο καθολικό μητρώο στιβαρότητας πλαισίου (1^η τροποποίηση)



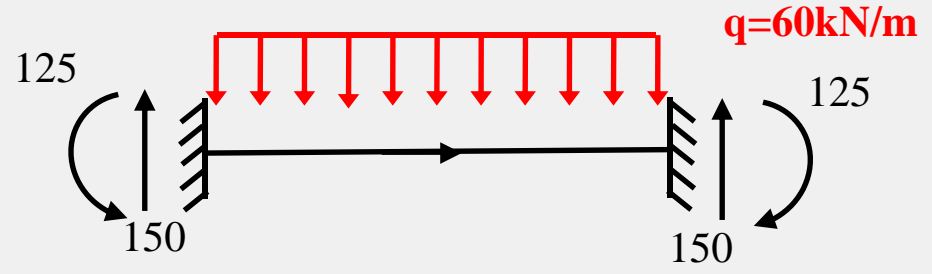
$$[\bar{K}_m] = [V][\bar{K}][V]^T = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{ff}] & [\bar{K}_{fs}] \\ [\bar{K}_{sf}] & [\bar{K}_{ss}] \end{bmatrix} =$$

	4	5	6	7	8	1	2	3	9	10	11	12	13	14
4	9.128	3.154	-0.192	0	0	0	0	0	-6.667	0	0	-2.461	-3.154	-0.192
5		4.397	-0.096	-3.154	0.192	3.154	-2.461	0.192	0	-0.096	-0.24	-3.154	-4.301	0.144
6			1.6	0	0	0	0	0	0	0.240	0.4	0.192	-0.144	0.4
7				4.301	0.144	-4.301	3.154	0.144	0	0	0	0	0	0
8					0.8	-0.144	-0.192	0.4	0	0	0	0	0	0
1						4.301	-3.154	-0.144	0	0	0	0	0	0
2							2.461	-0.192	0	0	0	0	0	0
3								0.8	0	0	0	0	0	0
9									6.667	0	0	0	0	0
10										0.096	0.24	0	0	0
11											0.8	0	0	0
12												2.461	3.154	0.192
13													4.301	-0.144
14														0.8

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΩΝ ΚΟΜΒΩΝ



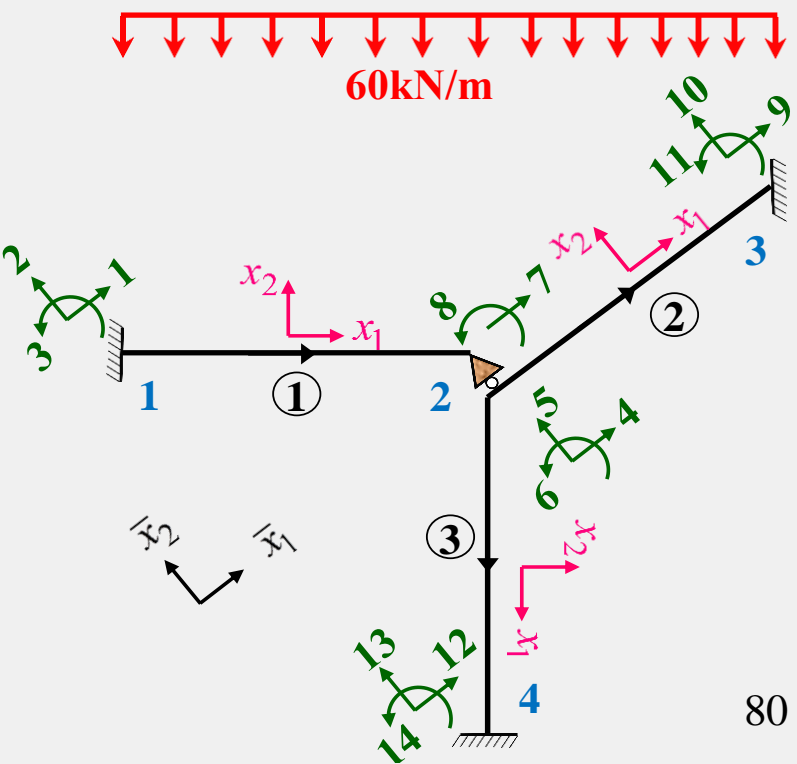
Ανάλυση παγιωμένου φορέα – Τοπικές ακραίες δράσεις μελών



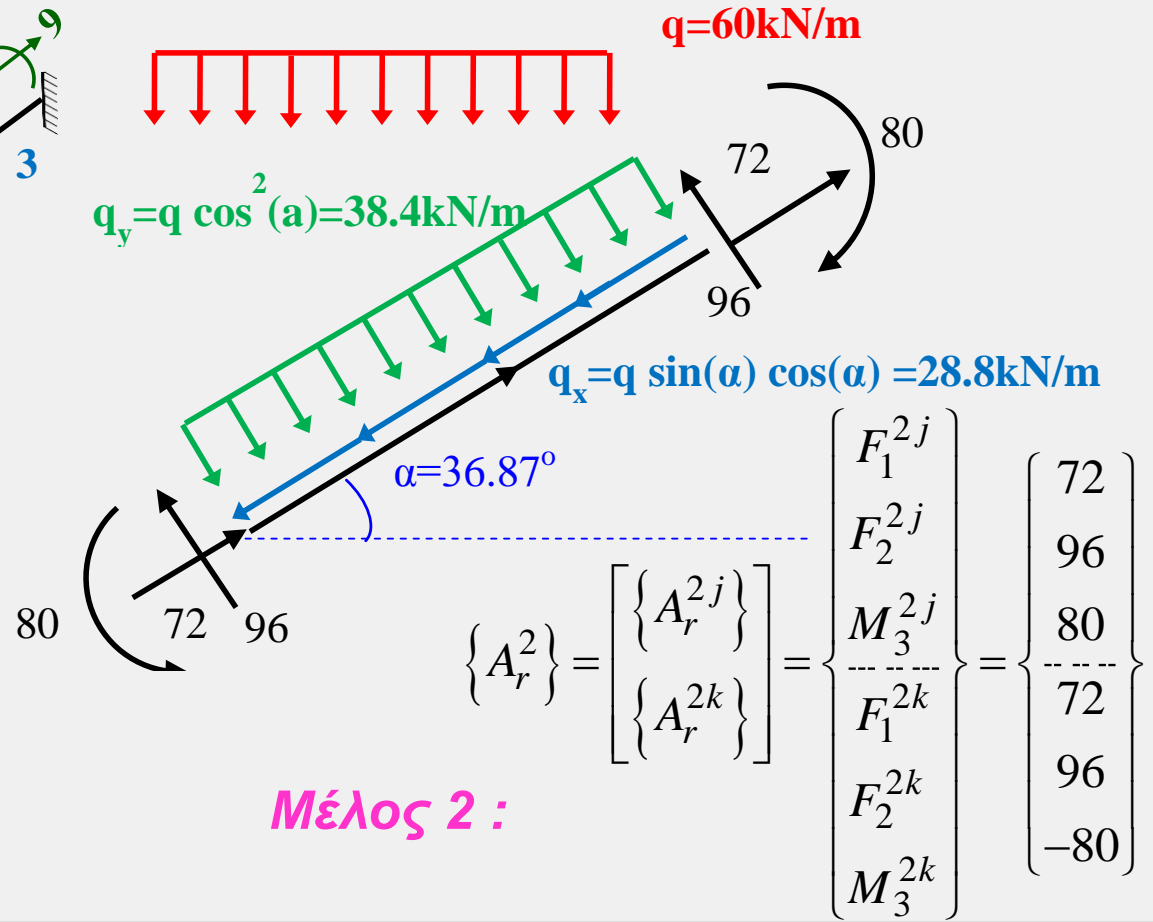
Μέλος 1 :

$$\{A_r^1\} = \begin{bmatrix} \{A_r^{1j}\} \\ \{A_r^{1k}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^{1j} \\ F_2^{1j} \\ M_3^{1j} \\ \hline F_1^{1k} \\ F_2^{1k} \\ M_3^{1k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 150 \\ 125 \\ \hline 0 \\ 150 \\ -125 \end{bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΩΝ ΚΟΜΒΩΝ

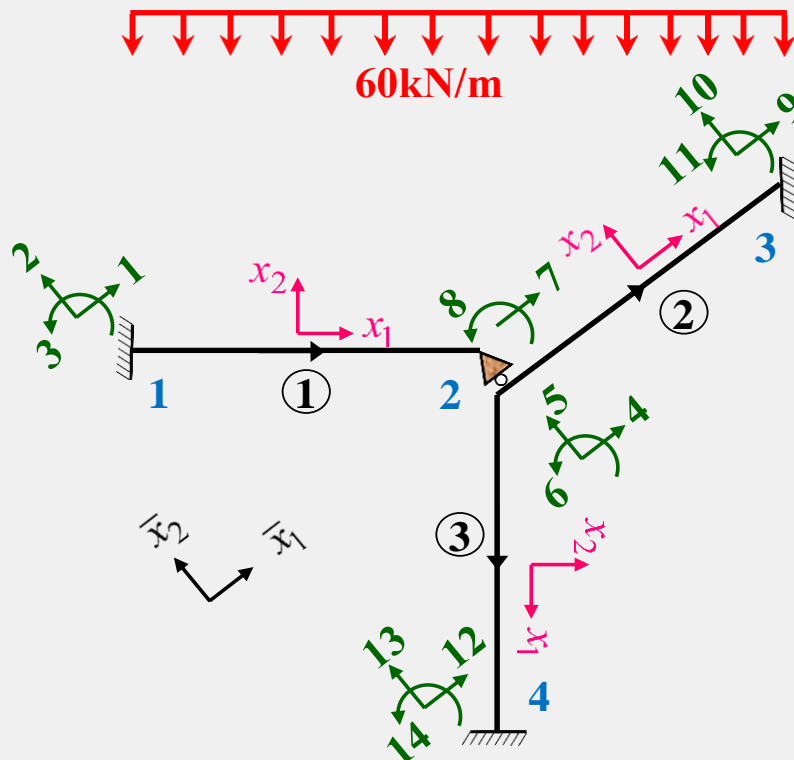


Ανάλυση παγιωμένου φορέα –
Τοπικές ακραίες δράσεις μελών



Μέλος 2 :

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΩΝ ΚΟΜΒΩΝ



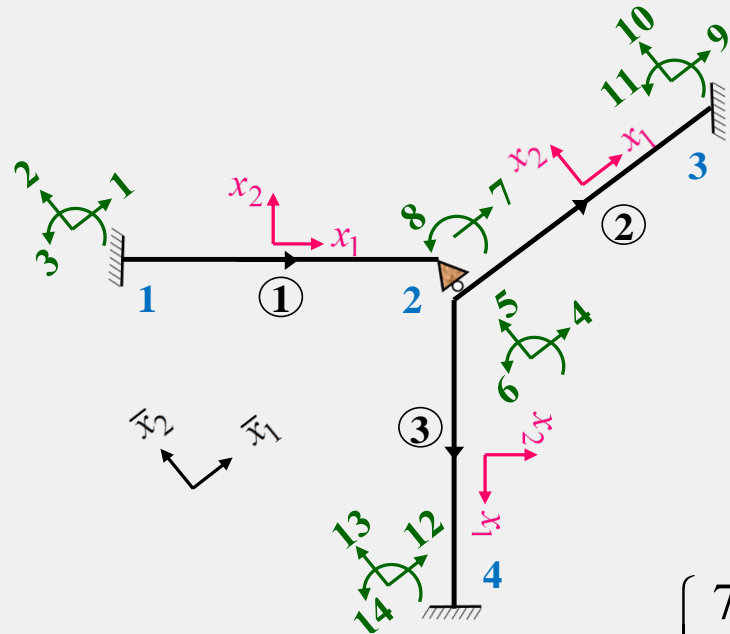
Ανάλυση παγιωμένου φορέα –
Τοπικές ακραίες δράσεις μελών

$$\{A_r^3\} = \begin{bmatrix} \{A_r^{3j}\} \\ \{A_r^{3k}\} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{3j} \\ F_2^{3j} \\ M_3^{3j} \\ \hline F_1^{3k} \\ F_2^{3k} \\ M_3^{3k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Μέλος 3 : αφόρτιστο

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΩΝ ΚΟΜΒΩΝ

Ανάλυση παγιωμένου φορέα – Καθολικές ακραίες δράσεις μελών



Μέλος 1 :

$$\left\{ \bar{A}_r^1 \right\} = \left[\Lambda_{PF}^1 \right]^T \left\{ A_r^1 \right\} = \begin{Bmatrix} 90 \\ 120 \\ 125 \\ \dots \\ 90 \\ 120 \\ -125 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \dots \\ \mathbf{7} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{8} \end{matrix}$$

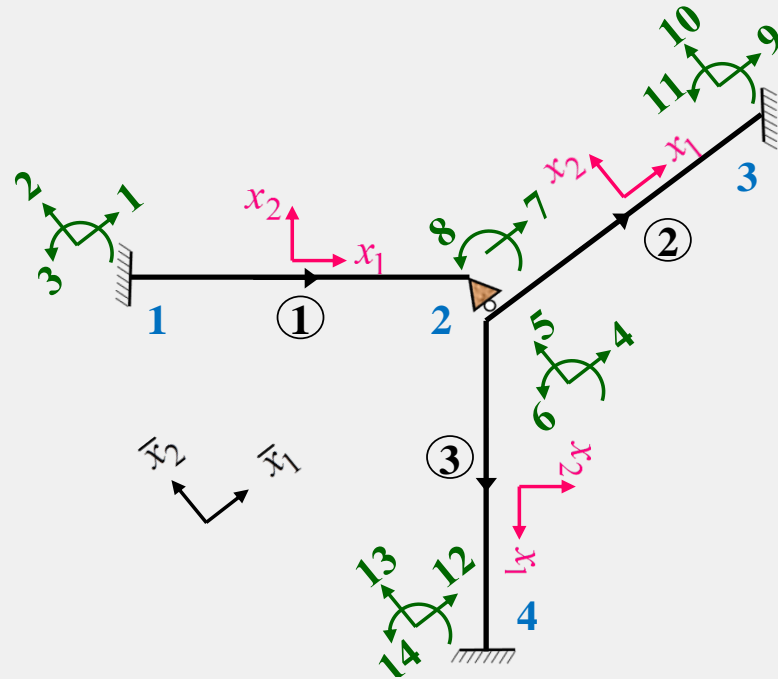
Μέλος 2 :

$$\left\{ \bar{A}_r^2 \right\} = \left[\Lambda_{PF}^1 \right]^T \left\{ A_r^2 \right\} = \begin{Bmatrix} 72 \\ 96 \\ 80 \\ \dots \\ 72 \\ 96 \\ -80 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{6} \\ \dots \\ \mathbf{9} \\ \mathbf{10} \\ \mathbf{11} \end{matrix}$$

Μέλος 3 : αφόρτιστο

$$\left\{ \bar{A}_r^3 \right\} = \left[\Lambda_{PF}^1 \right]^T \left\{ A_r^3 \right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{6} \\ \dots \\ \mathbf{12} \\ \mathbf{13} \\ \mathbf{14} \end{matrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΩΝ ΚΟΜΒΩΝ



Ανάλυση παγιωμένου φορέα – Υπολογισμός δράσεων παγίωσης

Κόμβος 1 :

$$\left\{ \bar{S}^{(1)} \right\} = \left\{ \bar{A}_r^{1j} \right\} = \begin{Bmatrix} 90 \\ 120 \\ 125 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{matrix}$$

Κόμβος 2 :

$$\left\{ \bar{S}^{(2)} \right\} = \left\{ \bar{A}_r^{1k} \right\} + \left\{ \bar{A}_r^{2j} \right\} + \left\{ \bar{A}_r^{3j} \right\} = \begin{Bmatrix} 72 \\ 216 \\ 80 \\ 90 \\ -125 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{6} \\ \mathbf{7} \\ \mathbf{8} \end{matrix}$$

Κόμβος 3 :

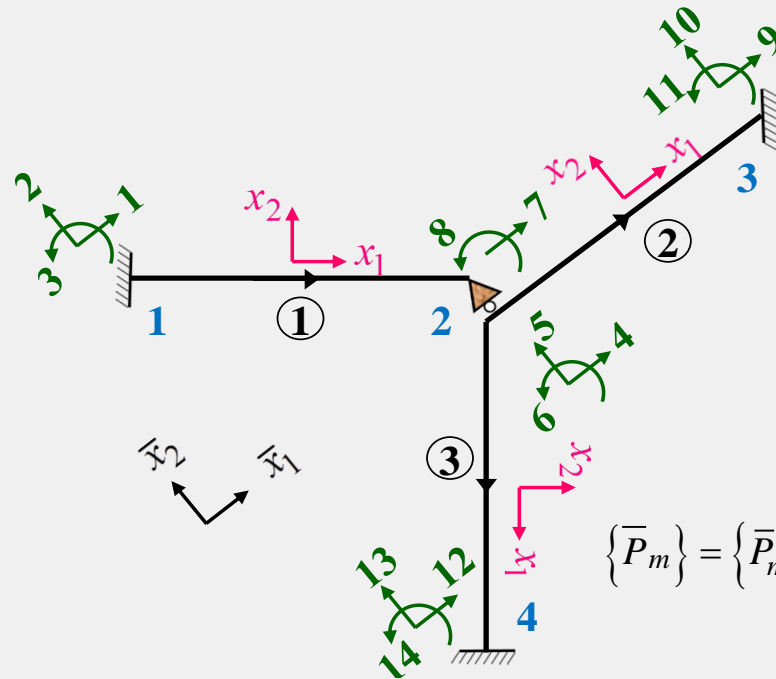
$$\left\{ \bar{S}^{(3)} \right\} = \left\{ \bar{A}_r^{2k} \right\} = \begin{Bmatrix} 72 \\ 96 \\ -80 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{9} \\ \mathbf{10} \\ \mathbf{11} \end{matrix}$$

Κόμβος 4 :

$$\left\{ \bar{S}^{(4)} \right\} = \left\{ \bar{A}_r^{3k} \right\} = \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{12} \\ \mathbf{13} \\ \mathbf{14} \end{matrix}$$

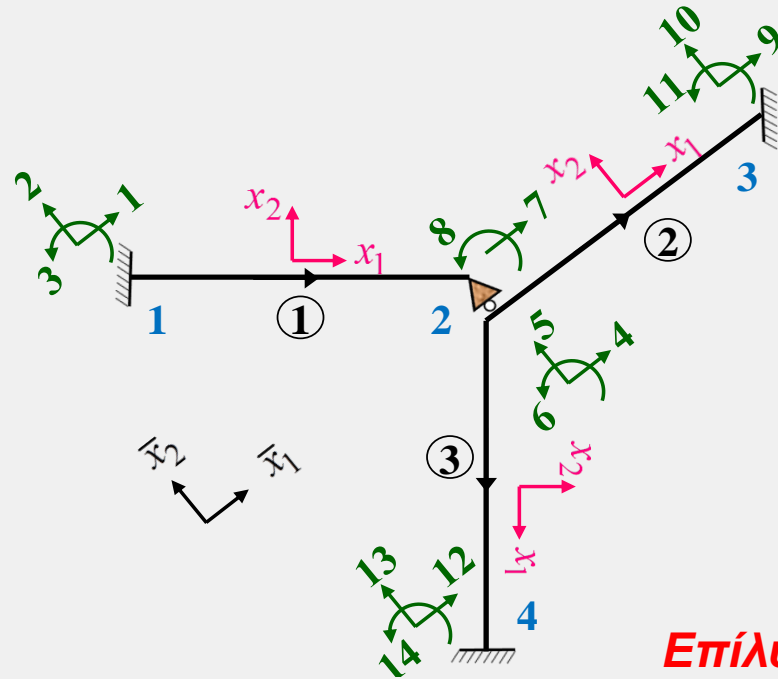
ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΩΝ ΚΟΜΒΩΝ

Αναδιατεταγμένα μητρώα επικόμβιων δράσεων και μετακινήσεων πλαισίου



$$\{\bar{P}_m\} = \{\bar{P}_m^{nodal} - \bar{S}_m\} = \begin{bmatrix} \{\bar{P}_f\} \\ \{\bar{P}_s\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -72 & 4 \\ -216 & 5 \\ -80 & 6 \\ -90 & 7 \\ 125 & 8 \\ \hline \bar{R}_1^{(1)} - 90 & 1 \\ \bar{R}_2^{(1)} - 120 & 2 \\ \bar{R}_3^{(1)} - 125 & 3 \\ \bar{R}_1^{(3)} - 72 & 9 \\ \bar{R}_2^{(3)} - 96 & 10 \\ \bar{R}_3^{(3)} + 80 & 11 \\ \bar{R}_1^{(4)} & 12 \\ \bar{R}_2^{(4)} & 13 \\ \bar{R}_3^{(4)} & 14 \end{bmatrix} \quad \{\bar{\Delta}_m\} = \begin{bmatrix} \{\bar{\Delta}_f\} \\ \{\bar{\Delta}_s\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_4 & 4 \\ \bar{\Delta}_5 & 5 \\ \bar{\Delta}_6 & 6 \\ \bar{\Delta}_7 & 7 \\ \bar{\Delta}_8 & 8 \\ \hline 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 9 \\ 0 & 10 \\ 0 & 11 \\ 0 & 12 \\ 0 & 13 \\ 0 & 14 \end{bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΩΝ ΚΟΜΒΩΝ

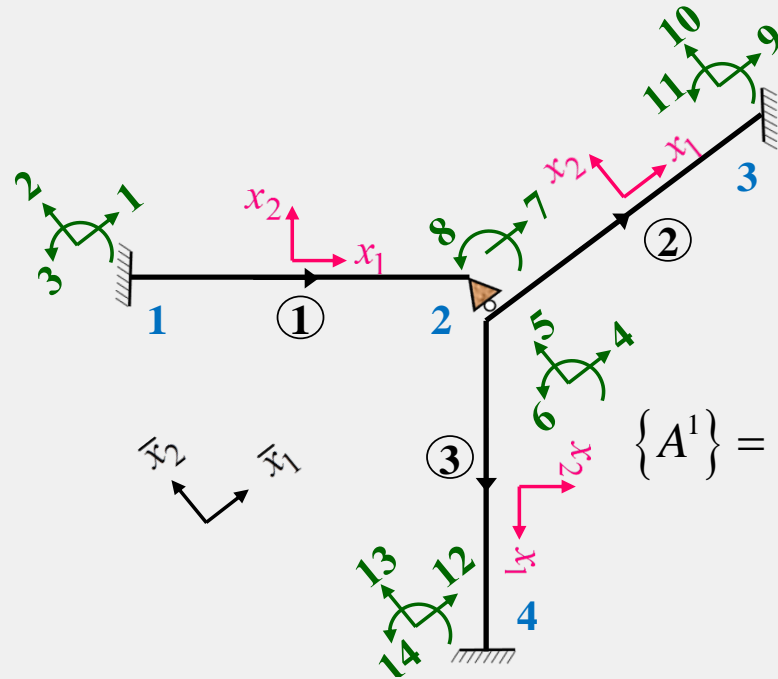


$$[\bar{\Delta}_f] = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.307 \\ -5.537 \\ -4.234 \\ -5.522 \\ 11.456 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

$$\{\bar{P}_s\} = \begin{Bmatrix} \bar{R}_1^{(1)} \\ \bar{R}_2^{(1)} \\ \bar{R}_3^{(1)} \\ \bar{R}_1^{(3)} \\ \bar{R}_2^{(3)} \\ \bar{R}_3^{(3)} \\ \bar{R}_1^{(4)} \\ \bar{R}_2^{(4)} \\ \bar{R}_3^{(4)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 180.00 \\ 102.01 \\ 198.04 \\ -26.79 \\ 113.55 \\ -114.27 \\ 170.79 \\ 216.44 \\ -7.32 \end{Bmatrix}$$

Επίλυση –
Επικόμβιες μετακινήσεις
κατά τους ελεύθερους και
επικόμβιες δράσεις
(αντιδράσεις) κατά τους
δεσμευμένους β.ε.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΩΝ ΚΟΜΒΩΝ



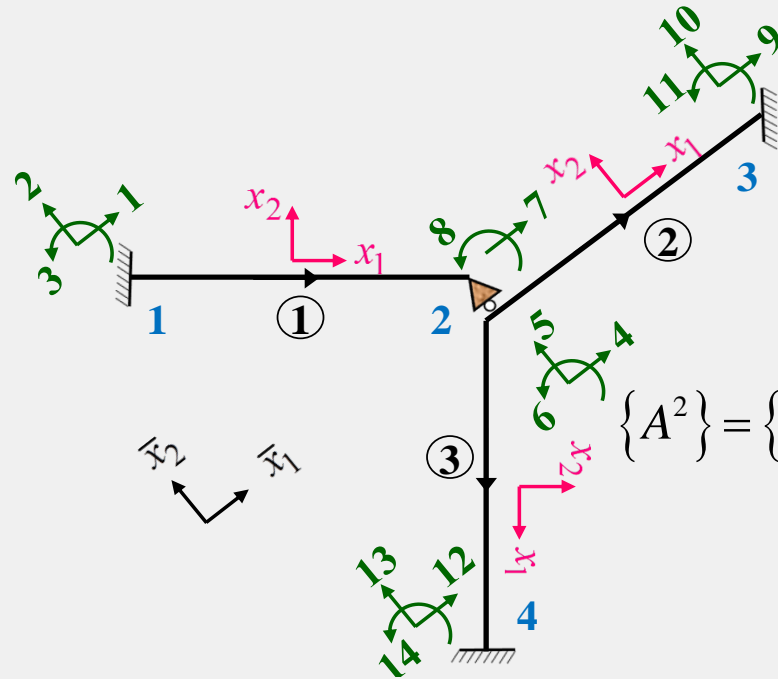
Εσωτερικά εντατικά μεγέθη μελών πλαισίου

Μέλος 1 :

$$\{A^1\} = \{A_r^1\} + [k^1][\Lambda_{PF}^1]\{\bar{D}^1\} =$$

$$= \begin{Bmatrix} F_1^{1j} \\ F_2^{1j} \\ M_3^{1j} \\ F_1^{1k} \\ F_2^{1k} \\ M_3^{1k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 150 \\ 125 \\ 0 \\ 150 \\ -125 \end{Bmatrix} + [k^1][I] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5.52 \\ -5.54 \\ 11.46 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4} = \begin{Bmatrix} 82.79 \\ 189.61 \\ 198.04 \\ -82.79 \\ 110.39 \\ 0.00 \end{Bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΩΝ ΚΟΜΒΩΝ



Εσωτερικά εντατικά μεγέθη μελών πλαισίου

Μέλος 2 :

$$\{A^2\} = \{A_r^2\} + [k^2][\Lambda_{PF}^2]\{\bar{D}^2\} =$$

$$= \begin{Bmatrix} F_1^{2j} \\ F_2^{2j} \\ M_3^{2j} \\ F_1^{2k} \\ F_2^{2k} \\ M_3^{2k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 72 \\ 96 \\ 80 \\ 72 \\ 96 \\ -80 \end{Bmatrix} + [k^2][I] \begin{Bmatrix} 1.307 \\ -5.537 \\ -4.234 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4} = \begin{Bmatrix} 170.79 \\ 78.45 \\ 26.52 \\ -26.79 \\ 113.55 \\ -114.27 \end{Bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΩΝ ΚΟΜΒΩΝ

Εσωτερικά εντατικά μεγέθη μελών πλαισίου

Μέλος 3 :

$$\{A^3\} = \{A_r^3\} + [k^3][\Lambda_{PF}^3]\{\bar{D}^3\} =$$

$$= \begin{Bmatrix} F_1^{3j} \\ F_2^{3j} \\ M_3^{3j} \\ F_1^{3k} \\ F_2^{3k} \\ M_3^{3k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + [k^3][I] \begin{Bmatrix} 1.307 \\ -5.537 \\ -4.234 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4} = \begin{Bmatrix} 275.63 \\ -6.77 \\ -26.52 \\ -275.63 \\ 6.77 \\ -7.32 \end{Bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΩΝ ΚΟΜΒΩΝ

Διαγράμματα εσωτερικών εντατικών μεγεθών μελών πλαισίου

