ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ & ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

ΣΤΕΡΕΟΙ ΚΟΜΒΟΙ

Ε.Ι. Σαπουντζάκης
Καθηγητής ΕΜΠ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΡΑΒΔΩΤΩΝ ΦΟΡΕΩΝ ΜΕ ΜΗΤΡΩΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ

Περιεχόμενα

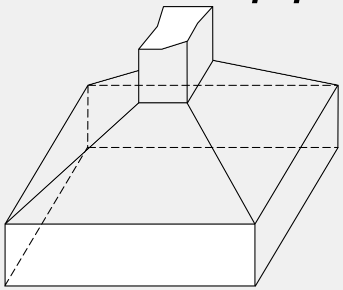
ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

*Ο φέρων οργανισμός (δομικός φορέας) των κατασκευών συντίθεται από επιμέρους φέροντα δομικά στοιχεία, κατάλληλα συνδεδεμένα μεταξύ τους. Ο πλέον συνήθης τρόπος σύνδεσης δύο ή περισσότερων δομικών στοιχείων μεταξύ τους είναι η **μονολιθική σύνδεση** μια και αποτελεί τον πλέον απλό και οικονομικό τρόπο. Ο τρόπος αυτός σύνδεσης δεν επιτρέπει καμία δυνατότητα σχετικών μετακινήσεων των συνδεόμενων στοιχείων με άμεσο αποτέλεσμα τη μεταφορά δυνάμεων και ροπών από το ένα μέλος στο άλλο.*

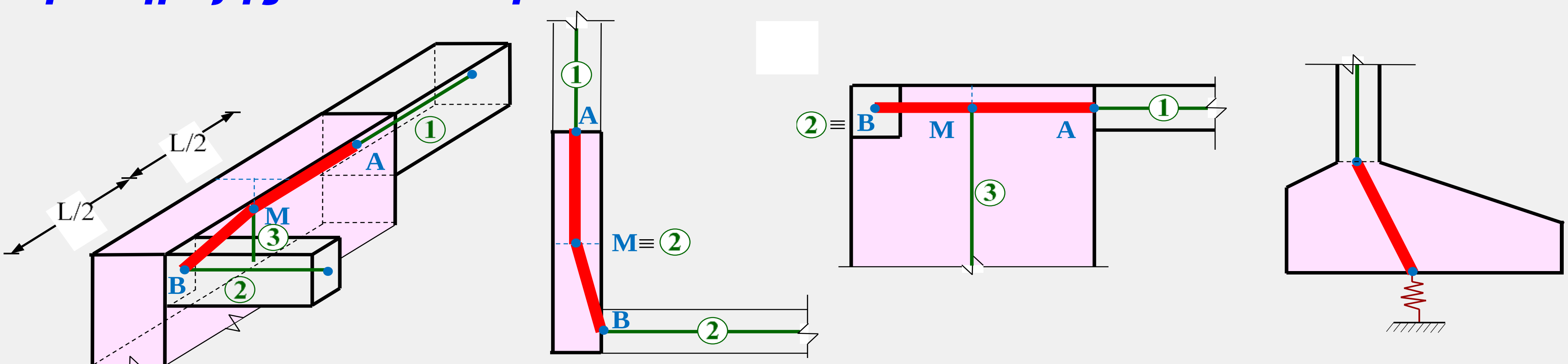
ΕΙΣΑΓΩΓΗ

*Επίσης, τα επιβαλλόμενα φορτία σε μια κατασκευή θα πρέπει να μπορεί ο φορέας της να τα μεταφέρει με ασφάλεια στο έδαφος θεμελίωσης. Προκειμένου να επιτευχθεί αυτό, τα φορτία αρχικά μεταφέρονται στους φορείς θεμελίωσης στις θέσεις στήριξης και ακολούθως μεταβιβάζονται στο έδαφος μέσω των αντιδράσεων στήριξης. Η πλέον συνήθης μορφή **επιφανειακής θεμελίωσης** κατασκευών αποτελείται από **στοιχεία όγκου** (πέδιλα υποστυλωμάτων, φρεάτια θεμελίωσης μεσοβάθρων), επί των οποίων στηρίζονται τα κατώτατα άκρα των κατακόρυφων φερόντων στοιχείων (υποστυλώματα κτιριακών έργων, μεσόβαθρα ή ακρόβαθρα γεφυρών).*



ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα γραμμικά ραβδωτά στοιχεία φορέα (π.χ. δοκοί, υποστυλώματα κλπ.) προσομοιώνονται μέσω ευθύγραμμων τμημάτων τα οποία αποτελούν τον ***κεντροβαρικό*** *άξονα του στοιχείου (ως κεντροβαρικός άξονας γραμμικού στοιχείου ορίζεται ο άξονας που ενώνει τα κέντρα βάρους των διατομών του). Παρ’ όλα αυτά, στις περιπτώσεις σύνδεσης στοιχείων μεταξύ τους ή σύνδεσης στοιχείου με τοιχείο ή στήριξης κατακόρυφου στοιχείου σε στοιχείο όγκου, τα* ***ακραία τμήματα των στοιχείων αυτών στις περιοχές σύνδεσης ή στήριξης είναι άκαμπτα****.*



ΕΙΣΑΓΩΓΗ

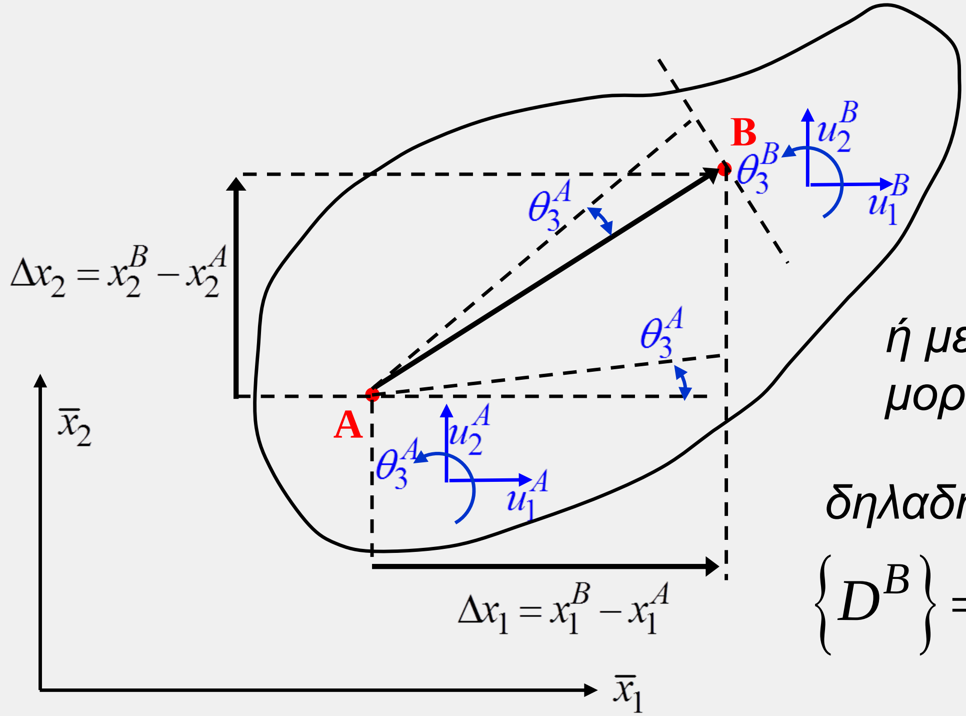
*Τα **άκαμπτα αυτά τμήματα δεν μπορούν να θεωρηθούν γραμμικά μέλη** και στις προαναφερθείσες περιοχές δεν ισχύει η Αρχή της Επιπεδότητας των Διατομών (Αρχή Bernoulli) με βάση την οποία γίνεται η ανάλυση των ραβδωτών στοιχείων μια και στις περιοχές αυτές επικρατεί **τριαξονική εντατική κατάσταση**. Έτσι, τα εντατικά μεγέθη που θα προκύψουν στην περιοχή των ακραίων τμημάτων των στοιχείων αυτών δεν θα είναι αξιόπιστα. Προκειμένου να αντιμετωπιστούν οι προαναφερθείσες περιοχές με αξιοπιστία προβλέπονται στην αρχή ή/και στο τέλος των εν λόγω στοιχείων **άκαμπτα τμήματα** (στερεοί κόμβοι) μήκους ανάλογου με τη γεωμετρία της σύνδεσης ή στήριξης των στοιχείων αυτών. Παρακάτω παρουσιάζεται η επιρροή στα βήματα της **Μεθόδου Άμεσης Στιβαρότητας** για την ανάλυση επίπεδου ή χωρικού ολόσωμου φορέα, προκειμένου να ληφθούν υπόψη οι **στερεοί κόμβοι.***

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ – ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ – ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ

Κινηματικές Σχέσεις

Θεωρείται το στερεό σώμα στο επίπεδο Ox_1x_2 και δύο τυχόντα σημεία του A, B, τα οποία απέχουν μεταξύ τους κατά Δx_1, Δx_2. Εάν λόγω εξωτερικής φόρτισης στο σημείο A επιβληθούν μετακινήσεις υπολογίζονται οι αντίστοιχες στο σημείο B ως



$$u_1^B = u_1^A - \Delta x_2 \cdot \vartheta_3^A \qquad \vartheta_3^B = \vartheta_3^A$$

$$u_2^B = u_2^A + \Delta x_1 \cdot \vartheta_3^A$$

ή με μητρωική μορφή

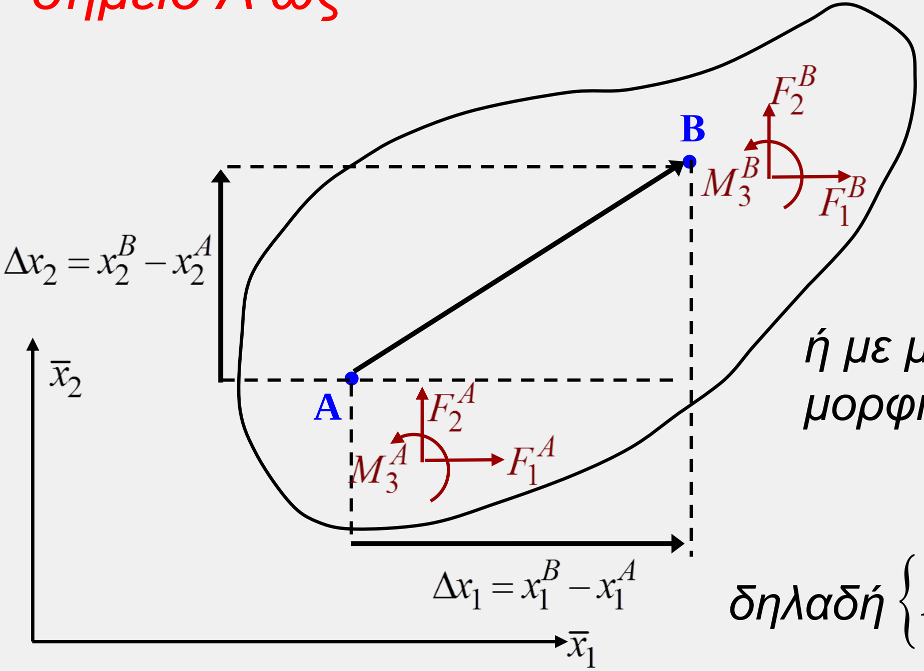
$$\begin{Bmatrix} u_1^B \\ u_2^B \\ \vartheta_3^B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\Delta x_2 \\ 0 & 1 & \Delta x_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^A \\ u_2^A \\ \vartheta_3^A \end{Bmatrix}$$

δηλαδή

$$\left\{D^B\right\} = [e]\left\{D^A\right\} \quad \text{όπου} \quad [e] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\Delta x_2 \\ 0 & 1 & \Delta x_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ισοδύναμες Δράσεις

Από απλές σχέσεις ισορροπίας δυνάμεων και ροπών στο στερεό σώμα, εύκολα προκύπτει ότι εάν στο σημείο Β επιβληθούν οι δράσεις F_1, F_2, M_3, μπορούν να προκύψουν οι ισοδύναμες δράσεις στο σημείο Α ως



$$F_1^A = F_1^B \qquad F_2^A = F_2^B$$

$$M_3^A = -\Delta x_2 \cdot F_1^B + \Delta x_1 \cdot F_2^B + M_3^B$$

ή με μητρωική μορφή

$$\begin{Bmatrix} F_1^A \\ F_2^A \\ M_3^A \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\Delta x_2 & \Delta x_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1^B \\ F_2^B \\ M_3^B \end{Bmatrix}$$

δηλαδή $\left\{A^A\right\} = [e]^T \left\{A^B\right\}$ *όπου* $[e] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\Delta x_2 \\ 0 & 1 & \Delta x_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

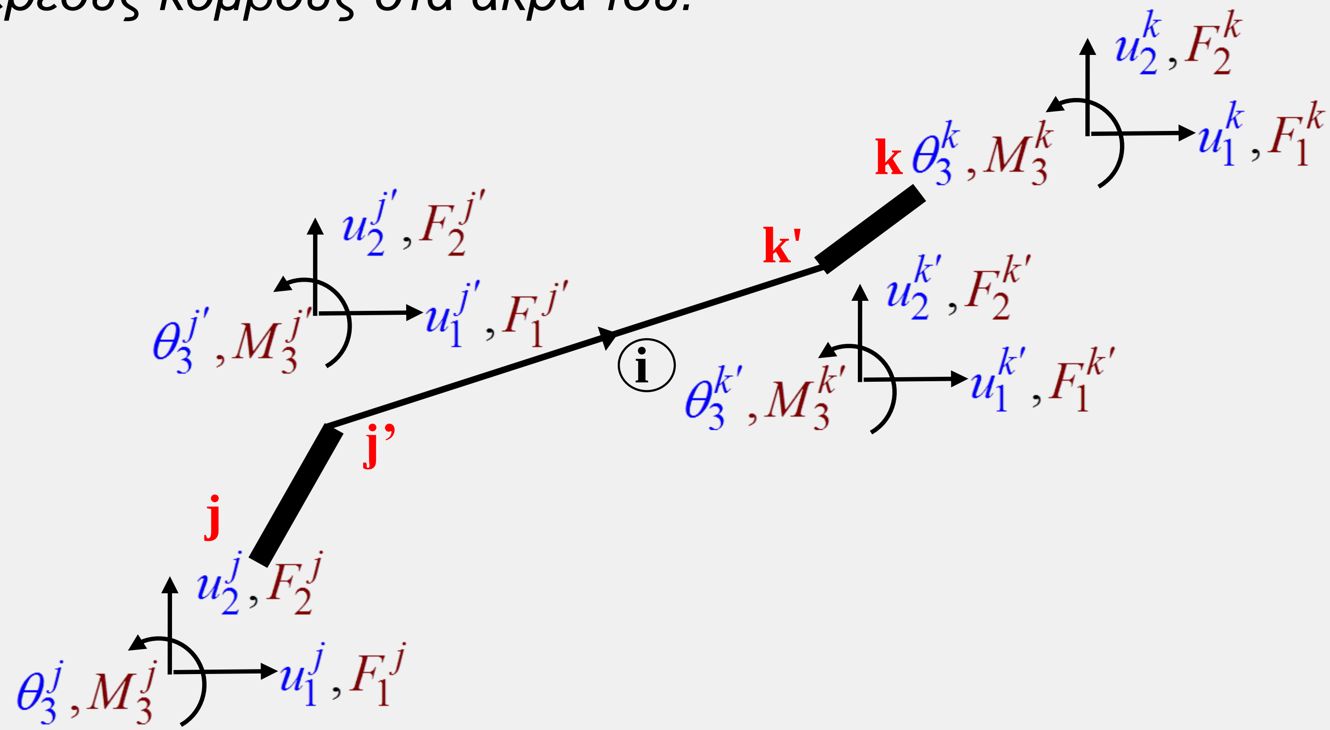
ΣΤΕΡΕΟΙ ΚΟΜΒΟΙ ΣΕ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

ΣΤΕΡΕΟΙ ΚΟΜΒΟΙ
ΣΕ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

*Θεωρείται τυπικό εύκαμπτο μέλος i επίπεδου φορέα, του οποίου τα άκρα j’, k’ φέρουν στερεούς κόμβους κατά τυχούσες διευθύνσεις, μορφώνοντας έτσι ένα “**υπερστοιχείο**” με άκρα j, k, το οποίο περιλαμβάνει το εύκαμπτο τμήμα και τους (τυχόν) στερεούς κόμβους στα άκρα του.*

$$\Delta x_{1,2}^{ij} = x_{1,2}^{ij'} - x_{1,2}^{ij}$$

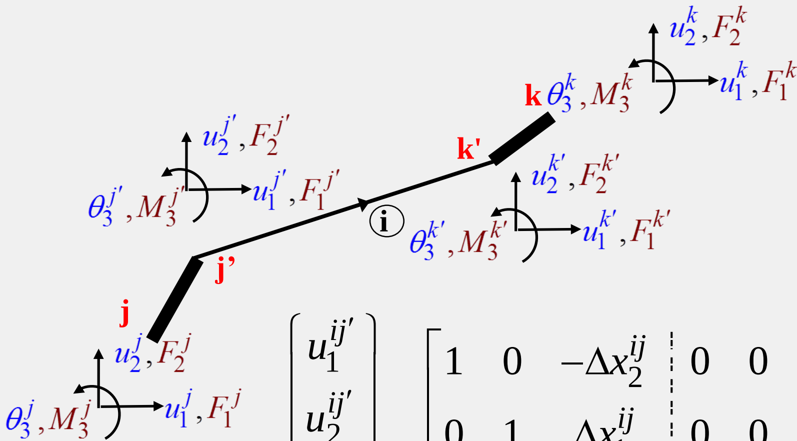
$$\Delta x_{1,2}^{ik} = x_{1,2}^{ik'} - x_{1,2}^{ik}$$



ΣΤΕΡΕΟΙ ΚΟΜΒΟΙ
ΣΕ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

*Θεωρείται τυπικό εύκαμπτο μέλος i επίπεδου φορέα, του οποίου τα άκρα j’, k’ φέρουν στερεούς κόμβους κατά τυχούσες διευθύνσεις, μορφώνοντας έτσι ένα “**υπερστοιχείο**” με άκρα j, k, το οποίο περιλαμβάνει το εύκαμπτο τμήμα και τους (τυχόν) στερεούς κόμβους στα άκρα του.*

Ακραίες μετακινήσεις *των άκρων j’, k’ , συναρτήσει αυτών των άκρων j, k*



$$\begin{Bmatrix} u_1^{ij'} \\ u_2^{ij'} \\ \vartheta_3^{ij'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\Delta x_2^{ij} \\ 0 & 1 & \Delta x_1^{ij} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{ij} \\ u_2^{ij} \\ \vartheta_3^{ij} \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} u_1^{ik'} \\ u_2^{ik'} \\ \vartheta_3^{ik'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\Delta x_2^{ik} \\ 0 & 1 & \Delta x_1^{ik} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{ik} \\ u_2^{ik} \\ \vartheta_3^{ik} \end{Bmatrix}$$

ή με μητρωική μορφή

$$\begin{Bmatrix} u_1^{ij'} \\ u_2^{ij'} \\ \vartheta_3^{ij'} \\ \hdashline u_1^{ik'} \\ u_2^{ik'} \\ \vartheta_3^{ik'} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -\Delta x_2^{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \Delta x_1^{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\Delta x_2^{ik} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta x_1^{ik} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} u_1^{ij} \\ u_2^{ij} \\ \vartheta_3^{ij} \\ \hdashline u_1^{ik} \\ u_2^{ik} \\ \vartheta_3^{ik} \end{Bmatrix}$$

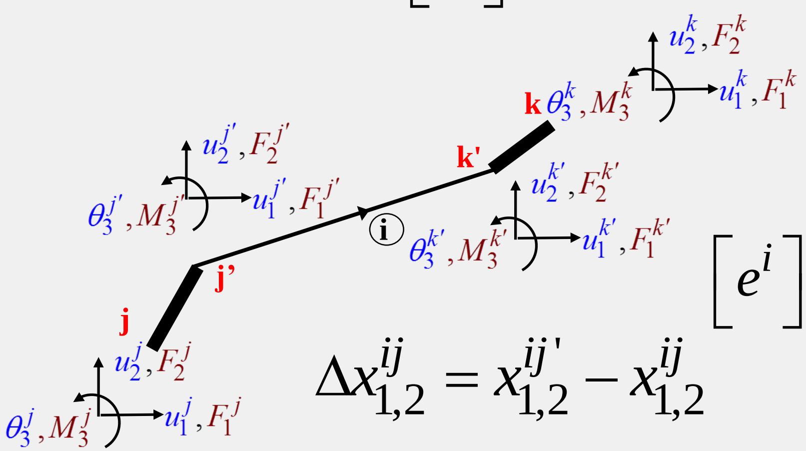
ή

$$\left\{D^{i'}\right\} = \begin{bmatrix} \left\{D^{ij'}\right\} \\ \hdashline \left\{D^{ik'}\right\} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} \left[e^{ij}\right] & [0] \\ \hdashline [0] & \left[e^{ik}\right] \end{array}\right] \begin{bmatrix} \left\{D^{ij}\right\} \\ \hdashline \left\{D^{ik}\right\} \end{bmatrix} = \left[e^{i}\right]\left\{D^{i}\right\}$$

ΣΤΕΡΕΟΙ ΚΟΜΒΟΙ
ΣΕ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

*Θεωρείται τυπικό εύκαμπτο μέλος i επίπεδου φορέα, του οποίου τα άκρα j', k' φέρουν στερεούς κόμβους κατά τυχούσες διευθύνσεις, μορφώνοντας έτσι ένα "**υπερστοιχείο**" με άκρα j, k, το οποίο περιλαμβάνει το εύκαμπτο τμήμα και τους (τυχόν) στερεούς κόμβους στα άκρα του.*

Έτσι, συμβολίζοντας με $\left[e^{ij}\right],\left[e^{ik}\right]$ *τα μητρώα εκκεντρότητας του μέλους i του άκρου j και του άκρου k, αντίστοιχα,* ***το μητρώο εκκεντρότητας του μέλους i*** $\left[e^{i}\right]$ *θα δίνεται από τη σχέση*



$$\Delta x_{1,2}^{ij} = x_{1,2}^{ij'} - x_{1,2}^{ij}$$

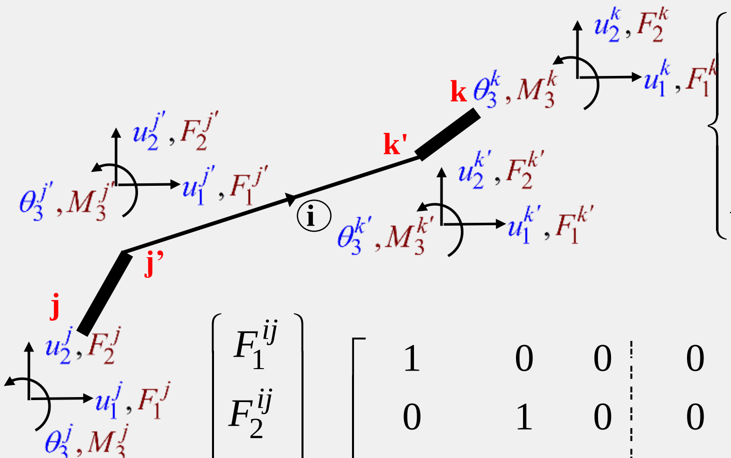
$$\Delta x_{1,2}^{ik} = x_{1,2}^{ik'} - x_{1,2}^{ik}$$

$$\left[e^{i}\right] = \left[\begin{array}{c:c} \left[e^{ij}\right] & [0] \\ \hdashline [0] & \left[e^{ik}\right] \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -\Delta x_2^{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \Delta x_1^{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\Delta x_2^{ik} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta x_1^{ik} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

ΣΤΕΡΕΟΙ ΚΟΜΒΟΙ
ΣΕ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

*Θεωρείται τυπικό εύκαμπτο μέλος i επίπεδου φορέα, του οποίου τα άκρα j’, k’ φέρουν στερεούς κόμβους κατά τυχούσες διευθύνσεις, μορφώνοντας έτσι ένα “**υπερστοιχείο**” με άκρα j, k, το οποίο περιλαμβάνει το εύκαμπτο τμήμα και τους (τυχόν) στερεούς κόμβους στα άκρα του.*

Ακραίες δράσεις *των άκρων j, k, συναρτήσει αυτών των άκρων j’, k’*



$$\begin{Bmatrix} F_1^{ij} \\ F_2^{ij} \\ M_3^{ij} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\Delta x_2^{ij} & \Delta x_1^{ij} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1^{ij'} \\ F_2^{ij'} \\ M_3^{ij'} \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} F_1^{ik} \\ F_2^{ik} \\ M_3^{ik} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\Delta x_2^{ik} & \Delta x_1^{ik} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1^{ik'} \\ F_2^{ik'} \\ M_3^{ik'} \end{Bmatrix}$$

ή με μητρωική μορφή

$$\begin{Bmatrix} F_1^{ij} \\ F_2^{ij} \\ M_3^{ij} \\ \hline F_1^{ik} \\ F_2^{ik} \\ M_3^{ik} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Delta x_2^{ij} & \Delta x_1^{ij} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Delta x_2^{ik} & \Delta x_1^{ik} & 1 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} F_1^{ij'} \\ F_2^{ij'} \\ M_3^{ij'} \\ \hline F_1^{ik'} \\ F_2^{ik'} \\ M_3^{ik'} \end{Bmatrix}$$

ή

$$\left\{A^i\right\} = \begin{bmatrix} \left\{A^{ij}\right\} \\ \hline \left\{A^{ik}\right\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[e^{ij}\right] & [0] \\ \hline [0] & \left[e^{ik}\right] \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \left\{A^{ij'}\right\} \\ \hline \left\{A^{ik'}\right\} \end{bmatrix} = \left[e^i\right]^T \left\{A^{i'}\right\}$$

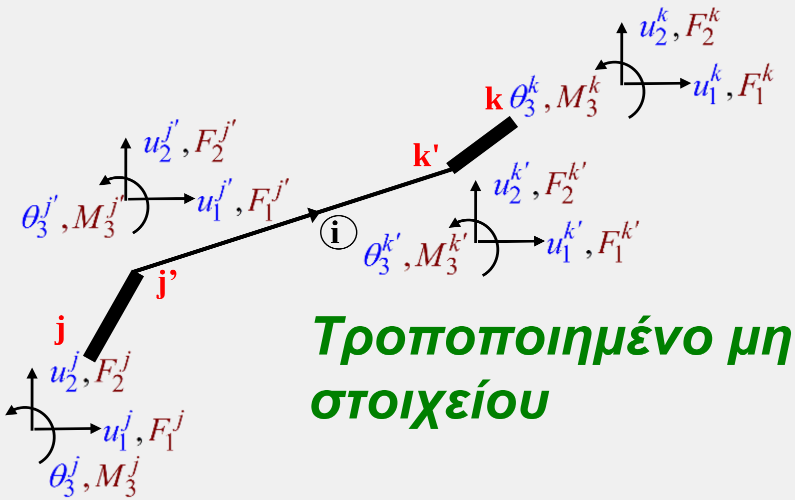
ΣΤΕΡΕΟΙ ΚΟΜΒΟΙ
ΣΕ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

*Θεωρείται τυπικό εύκαμπτο μέλος i επίπεδου φορέα, του οποίου τα άκρα j’, k’ φέρουν στερεούς κόμβους κατά τυχούσες διευθύνσεις, μορφώνοντας έτσι ένα “**υπερστοιχείο**” με άκρα j, k, το οποίο περιλαμβάνει το εύκαμπτο τμήμα και τους (τυχόν) στερεούς κόμβους στα άκρα του.*

Τροποποίηση μητρώου στιβαρότητας *στοιχείου i επίπεδου φορέα* ***λόγω στερεών κόμβων*** *στα άκρα του j’, k’*

Προκειμένου να προσδιοριστεί η τροποποιημένη σχέση στιβαρότητας γράφεται αρχικά η αντίστοιχη σχέση του στοιχείου χωρίς στερεούς κόμβους

$$\left\{A^{i'}\right\}=\left[k^{i'}\right]\left\{D^{i'}\right\}$$



$$\left\{A^{i}\right\}=\left[e^{i}\right]^T\left\{A^{i'}\right\}$$

$$\left\{D^{i'}\right\}=\left[e^{i}\right]\left\{D^{i}\right\}$$

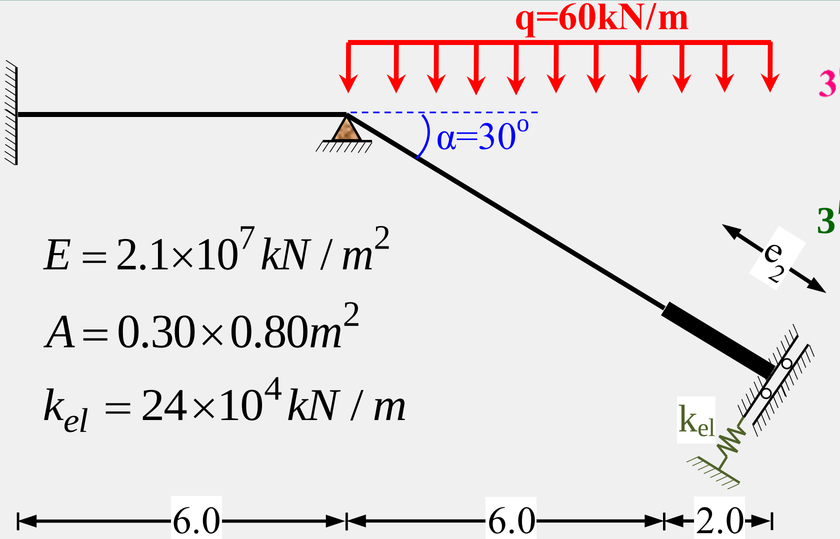
$$\Rightarrow \left\{A^{i}\right\}=\left[e^{i}\right]^T\left[k^{i'}\right]\left[e^{i}\right]\left\{D^{i}\right\}$$

Τροποποιημένο μητρώο στιβαρότητας στοιχείου

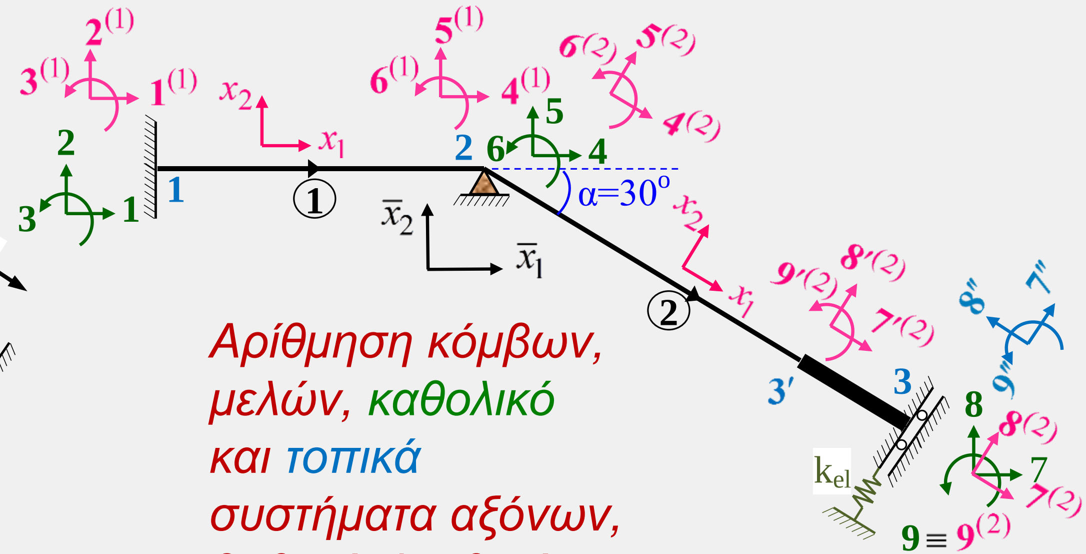
$$\left[k^{i}\right]=\left[e^{i}\right]^T\left[k^{i'}\right]\left[e^{i}\right]$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΣΤΕΡΕΟ ΚΟΜΒΟ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΣΤΕΡΕΟ ΚΟΜΒΟ



Εξεταζόμενο πλαίσιο



Αρίθμηση κόμβων, μελών, καθολικό και τοπικά συστήματα αξόνων, βαθμοί ελευθερίας

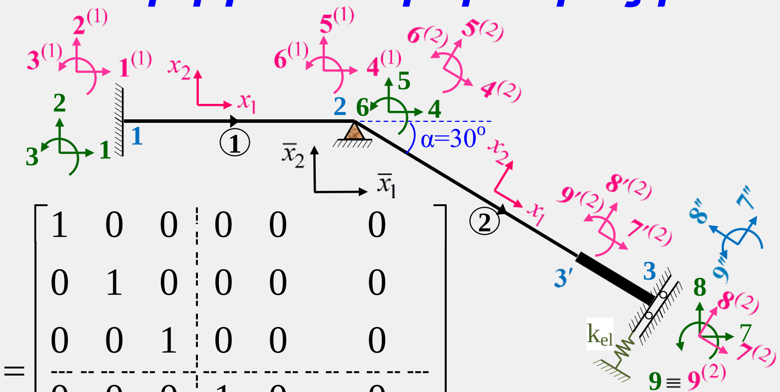
Στοιχεία γεωμετρίας και υλικού μελών

- Μέλος(1): $E^{1} = 2.1\times10^{7}\,kN/m^{2}$, $A^{1} = 0.24m^{2}$, $I^{1} = 0.0128m^{4}$, $L^{1} = 6.0m$
- Μέλος(2): $E^{2} = 2.1\times10^{7}\,kN/m^{2}$, $A^{2} = 0.24m^{2}$, $I^{2} = 0.0128m^{4}$, $L^{2} = 6.928m$

Μόρφωση τοπικών μητρώων στιβαρότητας μελών πλαισίου →

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΣΤΕΡΕΟ ΚΟΜΒΟ

Τοπικά μητρώα στιβαρότητας μελών



$$
\left[e^2\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2.309\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

$$
\left[k^1\right]=EI\;
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}\\
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
3.125 & 0 & 0 & -3.125 & 0 & 0\\
0 & 0.055 & 0.166 & 0 & -0.055 & 0.166\\
0 & 0.166 & 0.666 & 0 & -0.166 & 0.333\\
\hline
-3.125 & 0 & 0 & 3.125 & 0 & 0\\
0 & -0.055 & -0.166 & 0 & 0.055 & -0.166\\
0 & 0.166 & 0.333 & 0 & -0.166 & 0.666
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array}
$$

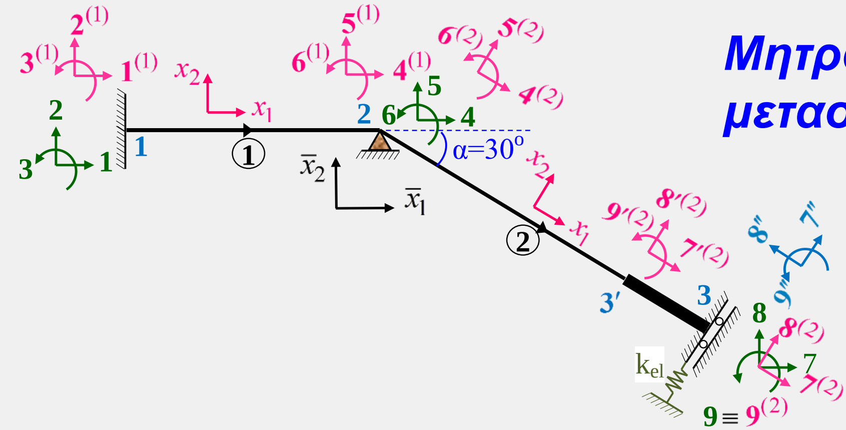
$$
\left[k^2\right]=EI\;
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 4 & 5 & 6 & 7' & 8' & 9' \end{array}\\
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
2.706 & 0 & 0 & -2.706 & 0 & 0\\
0 & 0.036 & 0.125 & 0 & -0.036 & 0.125\\
0 & 0.125 & 0.577 & 0 & -0.125 & 0.288\\
\hline
-2.706 & 0 & 0 & 2.706 & 0 & 0\\
0 & -0.036 & -0.125 & 0 & 0.036 & -0.125\\
0 & 0.125 & 0.288 & 0 & -0.125 & 0.577
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c} \\ 4\\5\\6\\7'\\8'\\9' \end{array}
$$

$$
\left[k_m^2\right]=\left[e^2\right]^T\left[k^2\right]\left[e^2\right]
$$

$$
\left[k_m^2\right]=EI\;
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array}\\
\left[\begin{array}{ccccc|c}
2.706 & 0 & 0 & -2.706 & 0 & 0\\
0 & 0.036 & 0.125 & 0 & -0.036 & 0.208\\
0 & 0.125 & 0.577 & 0 & -0.125 & 0.577\\
-2.706 & 0 & 0 & 2.706 & 0 & 0\\
0 & -0.036 & -0.125 & 0 & 0.036 & -0.208\\
\hline
0 & 0.208 & 0.577 & 0 & -0.208 & 1.346
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c} \\ 4\\5\\6\\7\\8\\9 \end{array}
$$

Τροποποίηση μητρώου μέλους 2 λόγω στερεού κόμβου στο άκρο k

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΣΤΕΡΕΟ ΚΟΜΒΟ



Μητρώα μετασχηματισμού μελών

$$\left[\Lambda_{PF}^{1}\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & [0] & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \hline & & & 1 & 0 & 0 \\ & [0] & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]=[I]$$

$$\theta^{1j}=\theta^{1k}=0^{o}$$
$$\theta^{2j}=\theta^{2k}=330^{o}$$

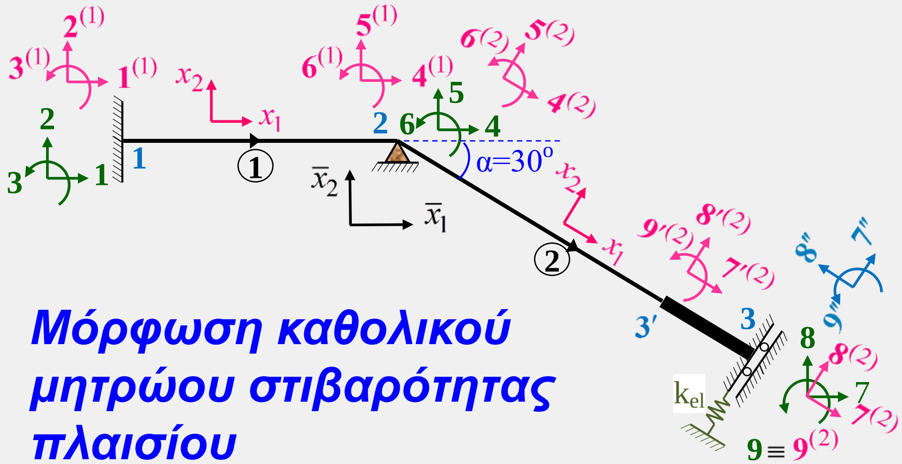
$$\left[\Lambda_{PF}^{2}\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0.866 & -0.5 & 0 & & & \\ 0.5 & 0.866 & 0 & & [0] & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \hline & & & 0.866 & -0.5 & 0 \\ & [0] & & 0.5 & 0.866 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\bar{k}^{1}\right]=EI\begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3.125 & 0 & 0 & -3.125 & 0 & 0 \\ 0 & 0.055 & 0.166 & 0 & -0.055 & 0.166 \\ 0 & 0.166 & 0.666 & 0 & -0.166 & 0.333 \\ \hline -3.125 & 0 & 0 & 3.125 & 0 & 0 \\ 0 & -0.055 & -0.166 & 0 & 0.055 & -0.166 \\ 0 & 0.166 & 0.333 & 0 & -0.166 & 0.666 \end{array}\right] & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \end{array}$$

Καθολικά μητρώα στιβαρότητας μελών

$$\left[\bar{k}^{2}\right]=EI\begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2.038 & -1.156 & 0.0625 & -2.038 & 1.156 & 0.104 \\ -1.156 & 0.7035 & 0.1083 & 1.156 & -0.7035 & 0.1801 \\ 0.0625 & 0.1083 & 0.577 & -0.0625 & -0.1083 & 0.577 \\ \hline -2.038 & 1.156 & -0.0625 & 2.038 & -1.156 & -0.104 \\ 1.156 & -0.7035 & -0.1083 & -1.156 & 0.7035 & -0.1801 \\ 0.104 & 0.1801 & 0.577 & -0.104 & -0.1801 & 1.346 \end{array}\right] & \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} \end{array}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΣΤΕΡΕΟ ΚΟΜΒΟ



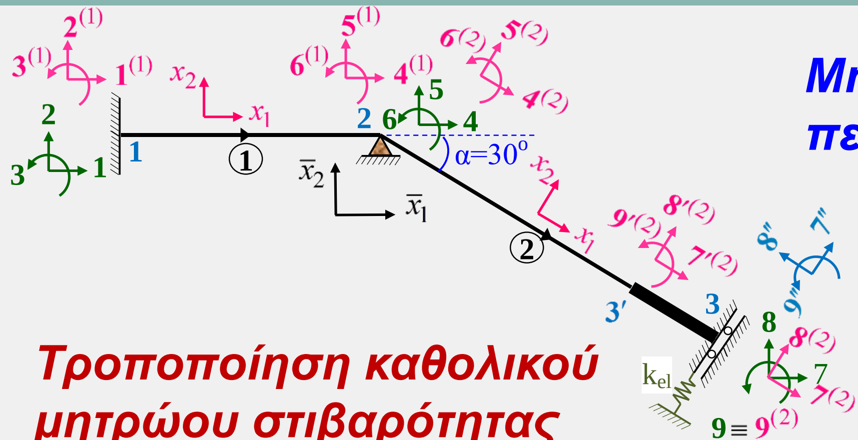
Μόρφωση καθολικού μητρώου στιβαρότητας πλαισίου

$$
\left[\overline{K}\right] = \begin{array}{c} \\ \kappa\acute{o}\mu\beta o\varsigma\ 1 \\ \kappa\acute{o}\mu\beta o\varsigma\ 2 \\ \kappa\acute{o}\mu\beta o\varsigma\ 3 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \kappa\acute{o}\mu\beta o\varsigma\ 1 & \kappa\acute{o}\mu\beta o\varsigma\ 2 & \kappa\acute{o}\mu\beta o\varsigma\ 3 \end{array} \\
\left[\begin{array}{c|c|c}
\left[\overline{k}^{1}_{jj}\right] & \left[\overline{k}^{1}_{jk}\right] & \\ \hline
\left[\overline{k}^{1}_{kj}\right] & \left[\overline{k}^{1}_{kk}\right]+\left[\overline{k}^{2}_{jj}\right] & \left[\overline{k}^{2}_{jk}\right] \\ \hline
 & \left[\overline{k}^{2}_{kj}\right] & \left[\overline{k}^{2}_{kk}\right]
\end{array}\right] \end{array}
$$

$$
\left[\overline{K}\right] = EI
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} & \#1 & & & \#2 & & & \#3 & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccccc}
3.125 & 0 & 0 & -3.125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.055 & 0.166 & 0 & -0.055 & 0.166 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.166 & 0.666 & 0 & -0.166 & 0.333 & 0 & 0 & 0 \\
-3.125 & 0 & 0 & 5.163 & -1.156 & 0.0625 & -2.038 & 1.156 & 0.104 \\
0 & -0.055 & -0.166 & -1.156 & 0.7585 & -0.0578 & 1.156 & -0.7035 & 0.1801 \\
0 & 0.166 & 0.333 & 0.0625 & -0.0578 & 1.243 & -0.0625 & -0.1083 & 0.577 \\
0 & 0 & 0 & -2.038 & 1.156 & -0.0625 & 2.038 & -1.156 & -0.104 \\
0 & 0 & 0 & 1.156 & -0.7035 & -0.1083 & -1.156 & 0.7035 & -0.1801 \\
0 & 0 & 0 & 0.104 & 0.1801 & 0.577 & -0.104 & -0.1801 & 1.346
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l} \\ \left.\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\right\}\#1 \\ \left.\begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}\right\}\#2 \\ \left.\begin{array}{c} 7 \\ 8 \\ 9 \end{array}\right\}\#3 \end{array}
$$

Καθολικό μητρώο στιβαρότητας πλαισίου

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΣΤΕΡΕΟ ΚΟΜΒΟ



Μητρώο περιστροφής

$$
[R^3] = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7'' \\ 8'' \\ 9'' \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7'' & 8'' & 9'' \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos 60^\circ & \sin 60^\circ & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin 60^\circ & \cos 60^\circ & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

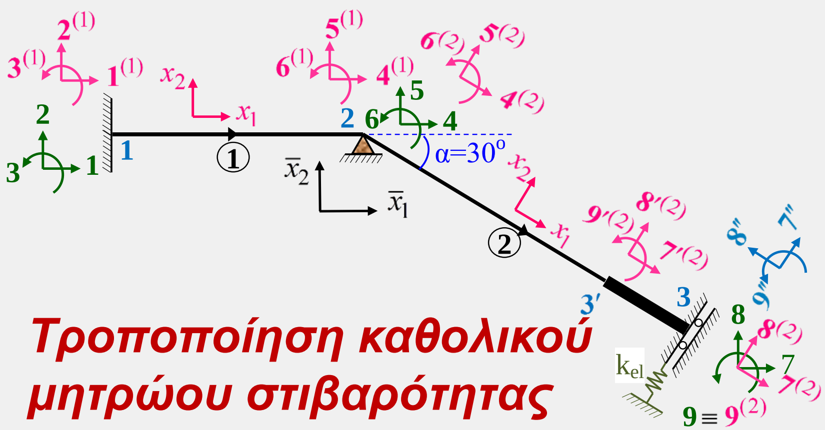
Τροποποίηση καθολικού μητρώου στιβαρότητας πλαισίου λόγω λοξής στήριξης

$$
\left[\overline{K}_m\right] = \left[R^3\right]\left[\overline{K}\right]\left[R^3\right]^T
$$

$$
\left[\overline{K}_m\right] = EI
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} & \#1 & & & \#2 & & & \#3 & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7'' & 8'' & 9'' \end{array} \\
\left[\begin{array}{rrrrrrrrr}
3.125 & 0 & 0 & -3.125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.055 & 0.166 & 0 & -0.055 & 0.166 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.166 & 0.666 & 0 & -0.166 & 0.333 & 0 & 0 & 0 \\
-3.125 & 0 & 0 & 5.163 & -1.156 & 0.0625 & -0.0179 & 2.3429 & 0.104 \\
0 & -0.055 & -0.166 & -1.156 & 0.7585 & -0.0578 & -0.0312 & -1.3529 & 0.1801 \\
0 & 0.166 & 0.333 & 0.0625 & -0.0578 & 1.243 & -0.1250 & 0 & 0.577 \\
0 & 0 & 0 & -0.0179 & -0.0312 & -0.1250 & 0.0360 & 0.0001 & -0.2080 \\
0 & 0 & 0 & 2.3429 & -1.3529 & 0 & 0.0001 & 2.7054 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.104 & 0.1801 & 0.577 & -0.2080 & 0 & 1.346
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l}
\\ \\
\left.\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\right\} \#1 \\
\left.\begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}\right\} \#2 \\
\left.\begin{array}{c} 7'' \\ 8'' \\ 9'' \end{array}\right\} \#3
\end{array}
$$

Τροποποιημένο καθολικό μητρώο στιβαρότητας πλαισίου

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΣΤΕΡΕΟ ΚΟΜΒΟ



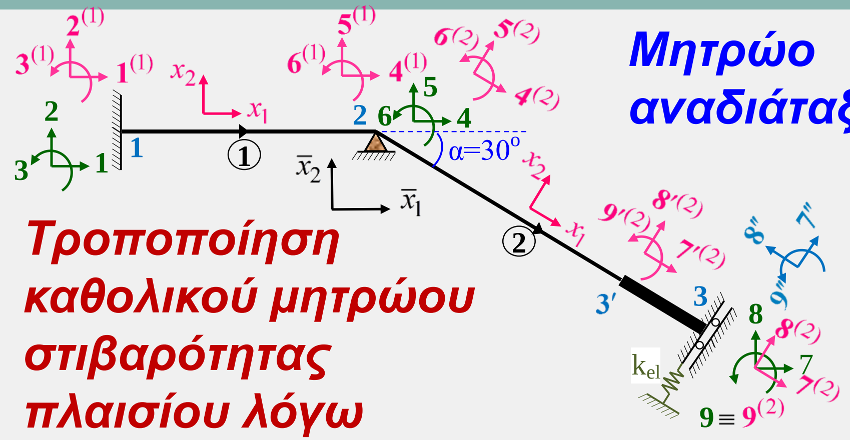
Τροποποίηση καθολικού μητρώου στιβαρότητας πλαισίου λόγω ελαστικής στήριξης

$$\left[\overline{K}_{3,3}\right]=\left[\overline{k}^{2}_{kk}\right]+\begin{bmatrix} k_{el} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \beta.\varepsilon.7'' \\ \beta.\varepsilon.8'' \\ \beta.\varepsilon.9'' \end{array} \overset{\begin{array}{ccc} \beta.\varepsilon.7'' & \beta.\varepsilon.8'' & \beta.\varepsilon.9'' \end{array}}{\begin{bmatrix} \overline{k}^{2}_{11}+k_{el} & \overline{k}^{2}_{12} & \overline{k}^{2}_{13} \\ \overline{k}^{2}_{21} & \overline{k}^{2}_{22} & \overline{k}^{2}_{23} \\ \overline{k}^{2}_{31} & \overline{k}^{2}_{32} & \overline{k}^{2}_{33} \end{bmatrix}}$$

Τροποποιημένο καθολικό μητρώο στιβαρότητας πλαισίου (2η τροποποίηση)

$$\begin{array}{c} \\ \\ \left[\overline{K}_{mm}\right]=EI \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} & \#1 & & & \#2 & & & \#3 & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7'' & 8'' & 9'' \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3.125 & 0 & 0 & -3.125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.055 & 0.166 & 0 & -0.055 & 0.166 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.166 & 0.666 & 0 & -0.166 & 0.333 & 0 & 0 & 0 \\ -3.125 & 0 & 0 & 5.163 & -1.156 & 0.0625 & -0.0179 & 2.3429 & 0.104 \\ 0 & -0.055 & -0.166 & -1.156 & 0.7585 & -0.0578 & -0.0312 & -1.3529 & 0.1801 \\ 0 & 0.166 & 0.333 & 0.0625 & -0.0578 & 1.243 & -0.1250 & 0 & 0.577 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0179 & -0.0312 & -0.1250 & 0.9280 & 0.0001 & -0.2080 \\ 0 & 0 & 0 & 2.3429 & -1.3529 & 0 & 0.0001 & 2.7054 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.104 & 0.1801 & 0.577 & -0.2080 & 0 & 1.346 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \left.\begin{array}{c}1\\2\\3\end{array}\right\}\#1 \\ \left.\begin{array}{c}4\\5\\6\end{array}\right\}\#2 \\ \left.\begin{array}{c}7''\\8''\\9''\end{array}\right\}\#3 \end{array}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΣΤΕΡΕΟ ΚΟΜΒΟ



Τροποποίηση καθολικού μητρώου στιβαρότητας πλαισίου λόγω αναδιάταξης

$$\left[\overline{K}_{mmm}\right]=\left[V\right]\left[\overline{K}_{mm}\right]\left[V\right]^T=\left[\begin{array}{c:c}\left[\overline{K}_{ff}\right] & \left[\overline{K}_{fs}\right] \\ \hdashline \left[\overline{K}_{sf}\right] & \left[\overline{K}_{ss}\right]\end{array}\right]$$

Μητρώο αναδιάταξης

ελεύθεροι βαθμοί (free): $6,\ 7''$

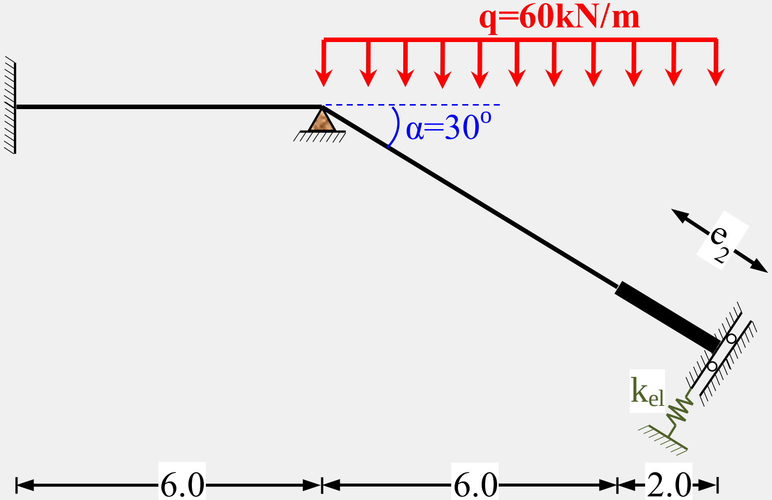
δεσμευμένοι βαθμοί (supported): $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 8'',\ 9''$

$$\begin{Bmatrix} 6 \\ 7'' \\ \hdashline 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 8'' \\ 9'' \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7'' \\ 8'' \\ 9'' \end{Bmatrix}$$

Αναδιατεταγμένο καθολικό μητρώο στιβαρότητας πλαισίου (3η τροποποίηση)

$$\left[\overline{K}_{mmm}\right]=EI\ \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 6 & 7'' & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 8'' & 9'' \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc:ccccccc} 1.243 & & & & & & & & \\ -0.125 & 0.928 & & & & & & & \\ \hdashline 0 & 0 & 3.125 & & & & & & \\ 0.166 & 0 & 0 & 0.055 & & & & & \\ 0.333 & 0 & 0 & 0.166 & 0.666 & & & & \\ 0.0625 & -0.018 & -3.125 & 0 & 0 & 5.164 & & & \\ -0.058 & -0.031 & 0 & -0.055 & -0.166 & -1.156 & 0.759 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.343 & -1.353 & 2.706 & \\ 0.578 & -0.208 & 0 & 0 & 0 & 0.104 & 0.180 & 0 & 1.346 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ 6 \\ 7'' \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 8'' \\ 9'' \end{array}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΣΤΕΡΕΟ ΚΟΜΒΟ

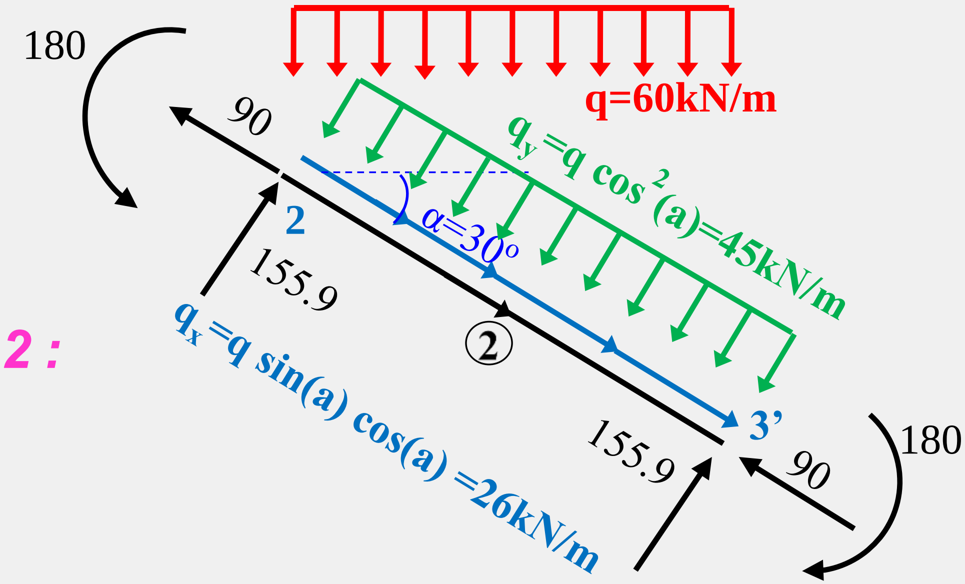


Ανάλυση παγιωμένου φορέα – Τοπικές ακραίες δράσεις μελών

$$\left\{A_r^1\right\} = \begin{bmatrix} \left\{A_r^{1j}\right\} \\ \hline \left\{A_r^{1k}\right\} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{1j} \\ F_2^{1j} \\ M_3^{1j} \\ \hline F_1^{1k} \\ F_2^{1k} \\ M_3^{1k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

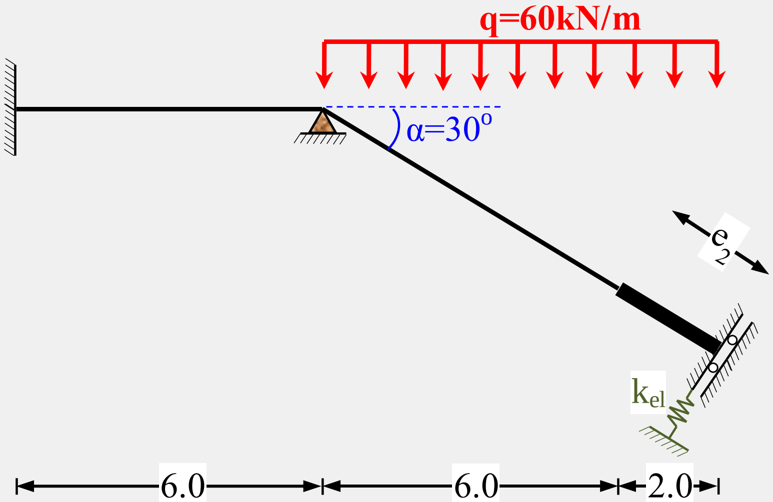
Μέλος 1 : αφόρτιστο

Μέλος 2 :



$$\left\{A_r^2\right\} = \begin{bmatrix} \left\{A_r^{2j}\right\} \\ \hline \left\{A_r^{2k}\right\} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{2j} \\ F_2^{2j} \\ M_3^{2j} \\ \hline F_1^{2k} \\ F_2^{2k} \\ M_3^{2k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -90 \\ 155.9 \\ 180 \\ \hline -90 \\ 155.9 \\ -180 \end{Bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΣΤΕΡΕΟ ΚΟΜΒΟ



Ανάλυση παγιωμένου φορέα – Καθολικές ακραίες δράσεις μελών – Τροποποίηση ακραίων δράσεων λόγω στερεού κόμβου στο μέλος 2

$$\left\{\overline{A}_r^1\right\} = \left[\Lambda_{PF}^1\right]^T \left\{A_r^1\right\} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

Μέλος 1 : αφόρτιστο

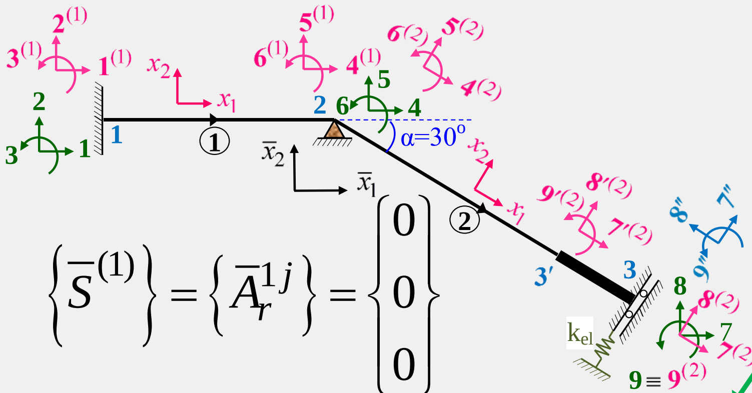
$$\left\{\overline{A}_r^2\right\} = \left[\Lambda_{PF}^2\right]^T [e^2]^T \left\{A_r^2\right\} =$$

Μέλος 2 :

$$= \left[\begin{array}{ccc:ccc} 0.866 & 0.5 & 0 & & & \\ -0.5 & 0.866 & 0 & & [0] & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \hdashline & & & 0 & 1 & 0 \\ & [0] & & -1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.309 & 1 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} -90 \\ 155.9 \\ 180 \\ \hdashline -90 \\ 155.9 \\ -180 \end{array}\right\} == \left\{\begin{array}{c} 0.01 \\ 180 \\ 180 \\ \hdashline 155.9 \\ 90 \\ -539.97 \end{array}\right\}$$

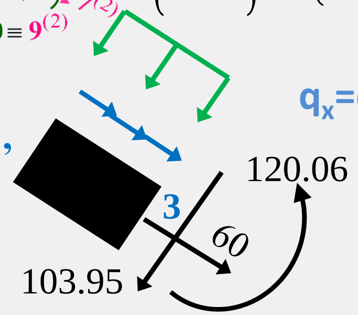
ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΣΤΕΡΕΟ ΚΟΜΒΟ

Ανάλυση παγιωμένου φορέα – Υπολογισμός δράσεων παγίωσης – Συνυπολογισμός φορτίου στερεού κόμβου στο μέλος 2



$$\left\{\overline{S}^{(1)}\right\}=\left\{\overline{A}_r^{1j}\right\}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}$$

$$\left\{\overline{S}^{(2)}\right\}=\left\{\overline{A}_r^{1k}\right\}+\left\{\overline{A}_r^{2j}\right\}=\begin{Bmatrix}0.01\\180\\180\end{Bmatrix}\qquad \left\{\overline{S}^{(3)}\right\}=\left\{\overline{A}_r^{2k}\right\}=\begin{Bmatrix}155.9\\90\\-539.97\end{Bmatrix}$$



q_x=q sin(a) cos(a) =26kN/m

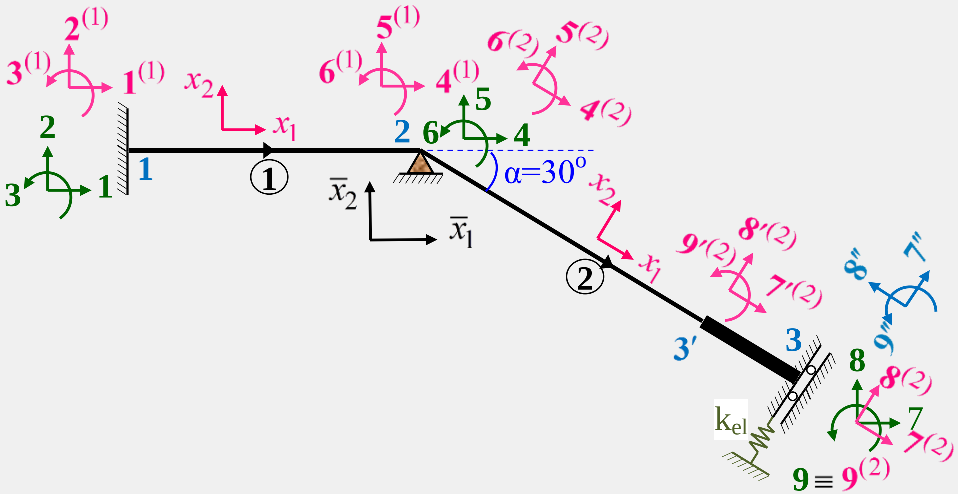
q_y=q cos^2(a)=45kN/m

$$\left\{\overline{\Delta}_{mm}\right\}=\begin{bmatrix}\left\{\overline{\Delta}_f\right\}\\ \hdashline \left\{\overline{\Delta}_s\right\}\end{bmatrix}=\begin{array}{c}\begin{Bmatrix}\overline{\Delta}_3^{(2)}\\ \overline{\Delta}_{1'}^{(3)}\\ \hdashline \overline{\Delta}_1^{(1)}\\ \overline{\Delta}_2^{(1)}\\ \overline{\Delta}_3^{(1)}\\ \overline{\Delta}_1^{(2)}\\ \overline{\Delta}_2^{(2)}\\ \overline{\Delta}_{2'}^{(3)}\\ \overline{\Delta}_{3'}^{(3)}\end{Bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}6\\7''\\1\\2\\3\\4\\5\\8''\\9''\end{array}=\begin{Bmatrix}\overline{\vartheta}_3^{(2)}\\ \overline{u}_{1'}^{(3)}\\ \hdashline 0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{Bmatrix}\begin{array}{c}6\\7''\\1\\2\\3\\4\\5\\8''\\9''\end{array}$$

$$\left\{\overline{P}_{mm}\right\}=\left\{\overline{P}_{mm}^{nodal}-\overline{S}_{mm}\right\}=\begin{bmatrix}\left\{\overline{P}_f\right\}\\ \hdashline \left\{\overline{P}_s\right\}\end{bmatrix}=\begin{Bmatrix}-180\\ -155.9-103.95\\ \hdashline \overline{R}_1^{(1)}\\ \overline{R}_2^{(1)}\\ \overline{R}_3^{(1)}\\ \overline{R}_1^{(2)}-0.01\\ \overline{R}_2^{(2)}-180\\ \overline{R}_2^{(3)}-90-60\\ \overline{R}_3^{(3)}+539.97+120.06\end{Bmatrix}\begin{array}{c}6\\7''\\1\\2\\3\\4\\5\\8''\\9''\end{array}$$

Τροποποιημένα και αναδια-τεταγμένα διανύσματα επικόμβιων μετακινήσεων και δράσεων πλαισίου

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΣΤΕΡΕΟ ΚΟΜΒΟ



$$\left\{\overline{\Delta}_f\right\} = \begin{Bmatrix} \overline{\Delta}_3^{(2)} \\ \overline{\Delta}_{1'}^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{\vartheta}_3^{(2)} \\ \overline{u}_{1'}^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6.523 \\ -11.296 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

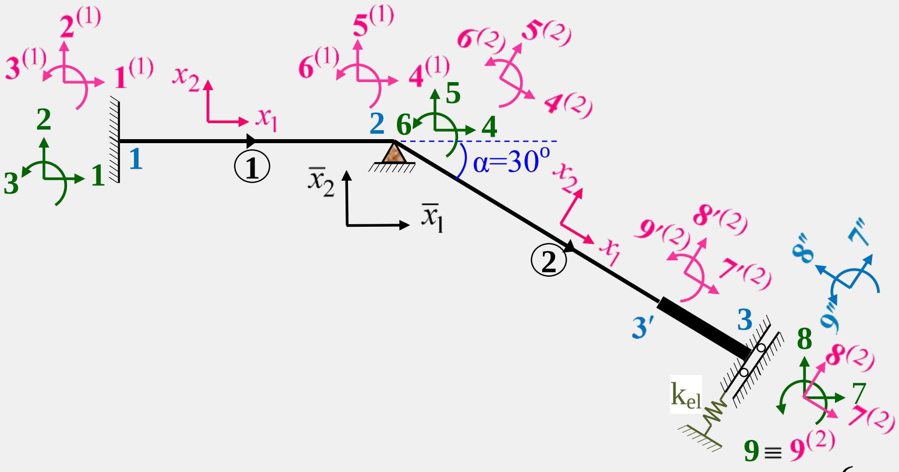
$$\overline{R}_{1'}^{(3)} = -\overline{\Delta}_{1'}^{(3)} \cdot k_{el} = 11.296 \cdot 24 = 271.104 kN$$

$$\begin{Bmatrix} \overline{R}_1^{(1)} \\ \overline{R}_2^{(1)} \\ \overline{R}_3^{(1)} \\ \overline{R}_1^{(2)} \\ \overline{R}_2^{(2)} \\ \overline{R}_2^{(3)} \\ \overline{R}_3^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -29.107 \\ -58.390 \\ -5.484 \\ 199.583 \\ 30 \\ -698.224 \end{Bmatrix}$$

Επίλυση –

Επικόμβιες μετακινήσεις κατά τους ελεύθερους και επικόβιες δράσεις (αντιδράσεις) κατά τους δεσμευμένους β.ε.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΣΤΕΡΕΟ ΚΟΜΒΟ



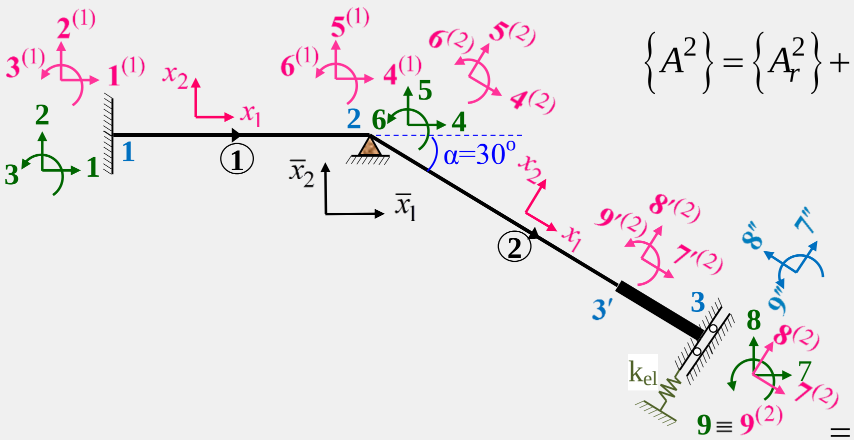
Εσωτερικά εντατικά μεγέθη μελών πλαισίου

Μέλος 1 :

$$\left\{A^1\right\} = \left\{A_r^1\right\} + [k^1][\Lambda_{PF}^1]\left\{\overline{D}^1\right\} = \begin{Bmatrix} F_1^{1j} \\ F_2^{1j} \\ M_3^{1j} \\ F_1^{1k} \\ F_2^{1k} \\ M_3^{1k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + [k^1][I]\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -6.523 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -29.107 \\ -58.390 \\ 0 \\ 29.107 \\ -116.775 \end{Bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΣΤΕΡΕΟ ΚΟΜΒΟ

Εσωτερικά εντατικά μεγέθη μελών πλαισίου



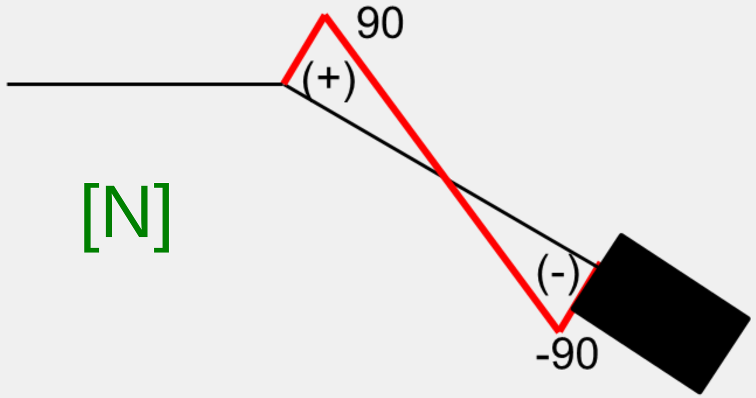
Μέλος 2:

$$\left\{A^2\right\}=\left\{A_r^2\right\}+[k^2][\Lambda_{PF}^2][e^2]\left\{\overline{D}^2\right\}=\begin{Bmatrix} F_1^{2j} \\ F_2^{2j} \\ M_3^{2j} \\ F_1^{2k} \\ F_2^{2k} \\ M_3^{2k}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -90 \\ 155.9 \\ 180 \\ -90 \\ 155.9 \\ -180\end{Bmatrix}+[k^2][\Lambda_{PF}^2][e^2]\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -6.23 \\ -11.296 \\ 0 \\ 0\end{Bmatrix}=$$

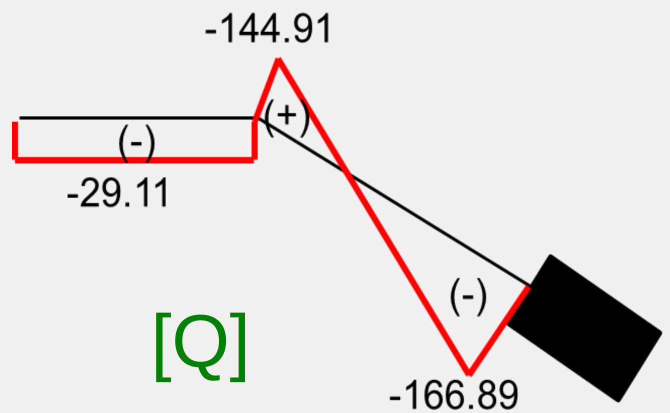
$$=\begin{Bmatrix} -90 \\ 155.9 \\ 180 \\ -90 \\ 155.9 \\ -180\end{Bmatrix}+EI\begin{bmatrix} 2.706 & 0 & 0 & -2.706 & 0 & 0 \\ 0 & 0.036 & 0.125 & 0 & -0.036 & 0.125 \\ 0 & 0.125 & 0.577 & 0 & -0.125 & 0.288 \\ -2.706 & 0 & 0 & 2.706 & 0 & 0 \\ 0 & -0.036 & -0.125 & 0 & 0.036 & -0.125 \\ 0 & 0.125 & 0.288 & 0 & -0.125 & 0.577 \end{bmatrix}\cdot$$

$$\cdot\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0.866 & 0.5 & 0 & & & \\ -0.5 & 0.866 & 0 & & [0] & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \hline & & & 0 & 1 & 0 \\ & [0] & & -1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2.309 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -6.523 \\ -11.296 \\ 0 \\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -90 \\ 144.913 \\ 116.789 \\ -90 \\ 166.886 \\ -192.542\end{Bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΣΤΕΡΕΟ ΚΟΜΒΟ

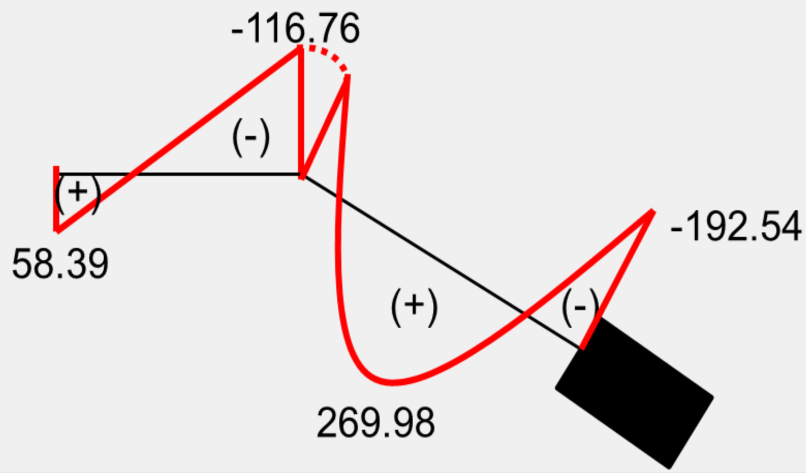


[N]



[Q]

Διαγράμματα εσωτερικών εντατικών μεγεθών μελών πλαισίου



[M]

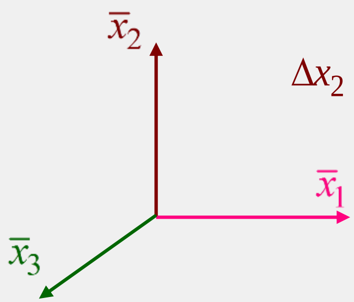
ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΧΩΡΙΚΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ – ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ

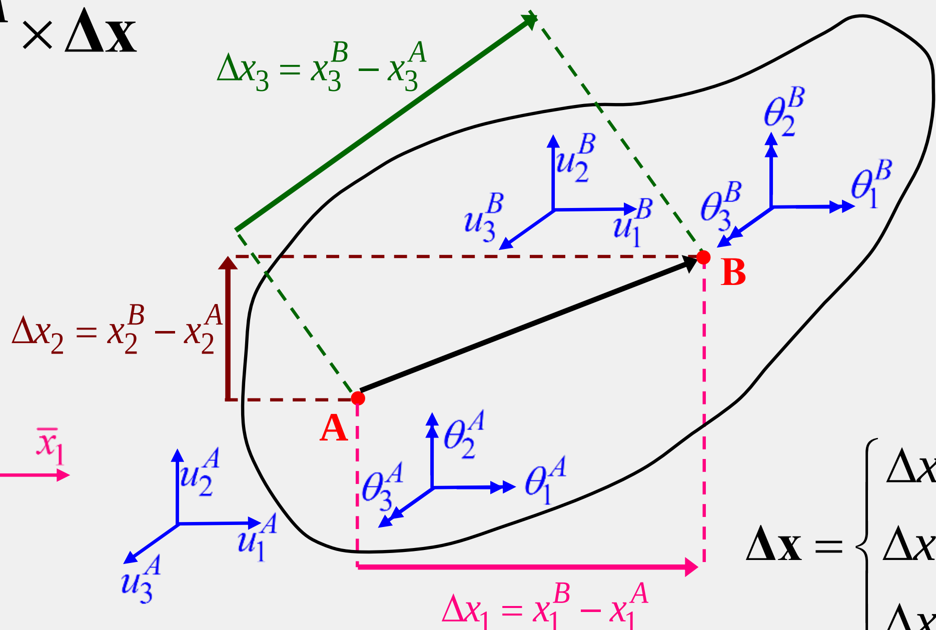
Κινηματικές Σχέσεις

Θεωρείται το στερεό σώμα στο επίπεδο $Ox_1x_2x_3$ και δύο τυχόντα σημεία του A, B, τα οποία απέχουν μεταξύ τους κατά Δx_1, Δx_2, Δx_3. Εάν λόγω εξωτερικής φόρτισης στο σημείο A επιβληθούν μετακινήσεις υπολογίζονται οι αντίστοιχες στο σημείο B ως

$$\mathbf{u}^B = \mathbf{u}^A + \boldsymbol{\theta}^A \times \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}$$

$$\boldsymbol{\theta}^B = \boldsymbol{\theta}^A$$





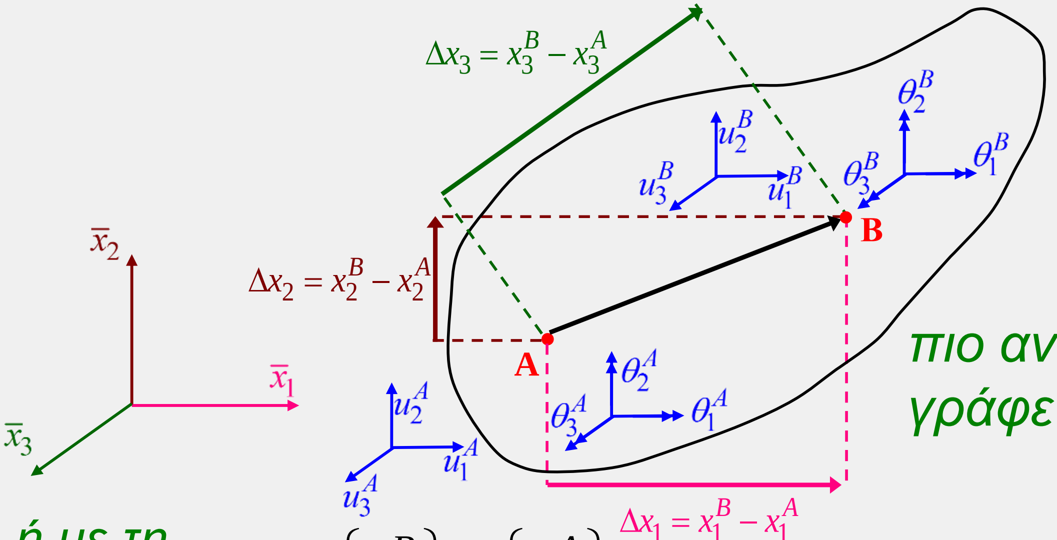
όπου

$$\mathbf{u}^A = \begin{Bmatrix} u_1^A \\ u_2^A \\ u_3^A \end{Bmatrix} \quad \mathbf{u}^B = \begin{Bmatrix} u_1^B \\ u_2^B \\ u_3^B \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\theta}^A = \begin{Bmatrix} \vartheta_1^A \\ \vartheta_2^A \\ \vartheta_3^A \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\theta}^B = \begin{Bmatrix} \vartheta_1^B \\ \vartheta_2^B \\ \vartheta_3^B \end{Bmatrix}$$

Κινηματικές Σχέσεις

Θεωρείται το στερεό σώμα στο επίπεδο $Ox_1x_2x_3$ και δύο τυχόντα σημεία του Α, Β, τα οποία απέχουν μεταξύ τους κατά Δx_1 , Δx_2 , Δx_3. Εάν λόγω εξωτερικής φόρτισης στο σημείο Α επιβληθούν μετακινήσεις υπολογίζονται οι αντίστοιχες στο σημείο Β.



Η σχέση $\mathbf{u}^B = \mathbf{u}^A + \boldsymbol{\theta}^A \times \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}$

πιο αναλυτικά γράφεται ως

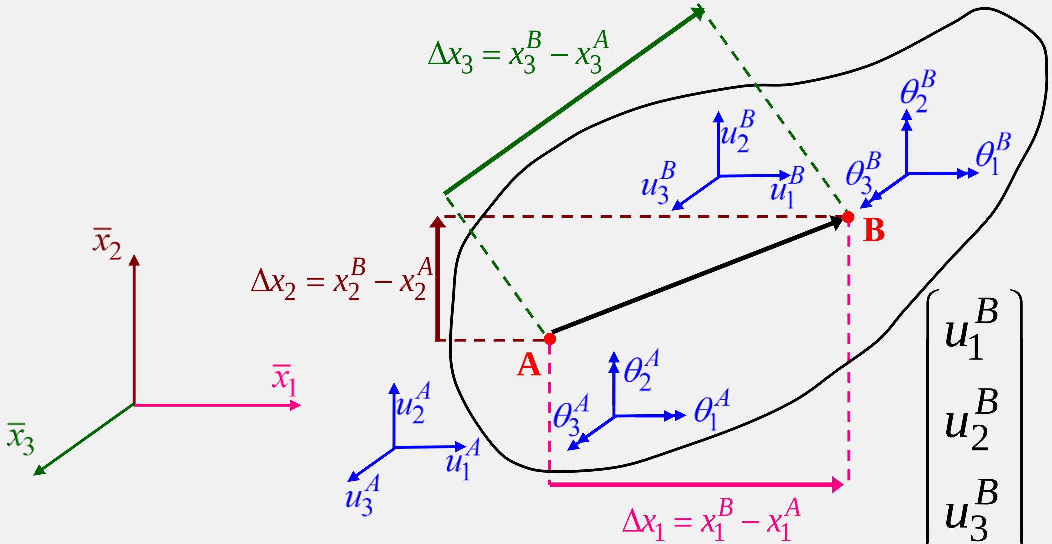
$$\begin{Bmatrix} u_1^B \\ u_2^B \\ u_3^B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1^A \\ u_2^A \\ u_3^A \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \vartheta_1^A \\ \vartheta_2^A \\ \vartheta_3^A \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{Bmatrix}$$

ή με τη βοήθεια του ορισμού του εξωτερικού γινομένου ως

$$\begin{Bmatrix} u_1^B \\ u_2^B \\ u_3^B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1^A \\ u_2^A \\ u_3^A \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ \vartheta_1^A & \vartheta_2^A & \vartheta_3^A \\ \Delta x_1 & \Delta x_2 & \Delta x_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} u_1^B \\ u_2^B \\ u_3^B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1^A \\ u_2^A \\ u_3^A \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \vartheta_2^A \cdot \Delta x_3 - \vartheta_3^A \cdot \Delta x_2 \\ -\vartheta_1^A \cdot \Delta x_3 + \vartheta_3^A \cdot \Delta x_1 \\ \vartheta_1^A \cdot \Delta x_2 - \vartheta_2^A \cdot \Delta x_1 \end{Bmatrix}$$

Κινηματικές Σχέσεις

Θεωρείται το στερεό σώμα στο επίπεδο $Ox_1x_2x_3$ και δύο τυχόντα σημεία του A, B, τα οποία απέχουν μεταξύ τους κατά Δx_1, Δx_2, Δx_3. Εάν λόγω εξωτερικής φόρτισης στο σημείο A επιβληθούν μετακινήσεις υπολογίζονται οι αντίστοιχες στο σημείο B.



Έτσι, οι σχέσεις

$$\mathbf{u}^B = \mathbf{u}^A + \boldsymbol{\theta}^A \times \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}$$
$$\boldsymbol{\theta}^B = \boldsymbol{\theta}^A$$

με μητρωική μορφή γράφονται ως

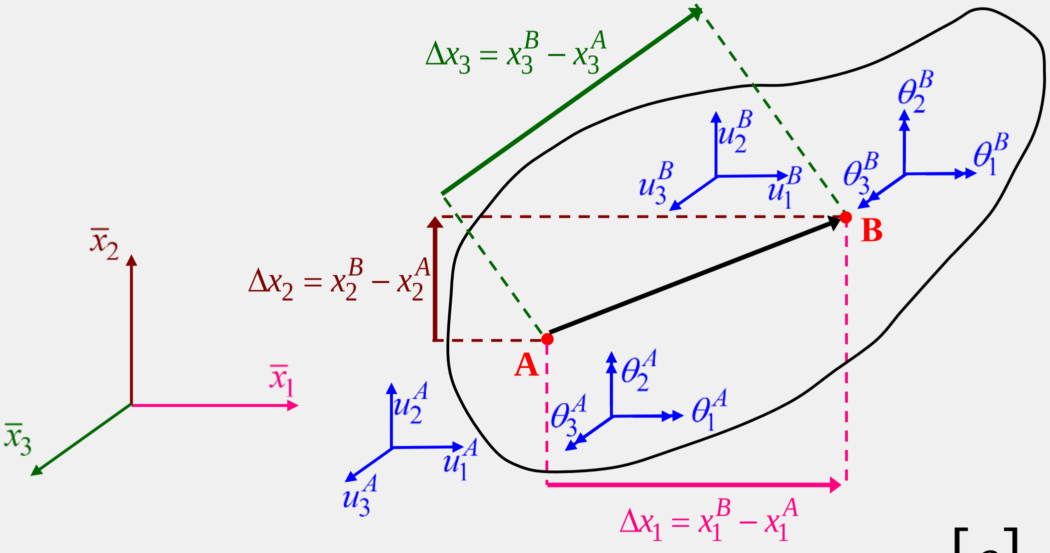
$$\begin{Bmatrix} u_1^B \\ u_2^B \\ u_3^B \\ \hline \vartheta_1^B \\ \vartheta_2^B \\ \vartheta_3^B \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta x_3 & -\Delta x_2 \\ 0 & 1 & 0 & -\Delta x_3 & 0 & \Delta x_1 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta x_2 & -\Delta x_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} u_1^A \\ u_2^A \\ u_3^A \\ \hline \vartheta_1^A \\ \vartheta_2^A \\ \vartheta_3^A \end{Bmatrix}$$

$$\left\{D^B\right\} = [e]\left\{D^A\right\}$$

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΧΩΡΙΚΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ – ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ

Κινηματικές Σχέσεις

Θεωρείται το στερεό σώμα στο επίπεδο $Ox_1x_2x_3$ και δύο τυχόντα σημεία του Α, Β, τα οποία απέχουν μεταξύ τους κατά Δx_1, Δx_2, Δx_3. Εάν λόγω εξωτερικής φόρτισης στο σημείο Α επιβληθούν μετακινήσεις υπολογίζονται οι αντίστοιχες στο σημείο Β.



όπου με [e] συμβολίζεται το μητρώο εκκεντρότητας του σημείου Β ως προς το σημείο Α του χωρικού στερεού σώματος

$$\{D^B\} = [e]\{D^A\}$$

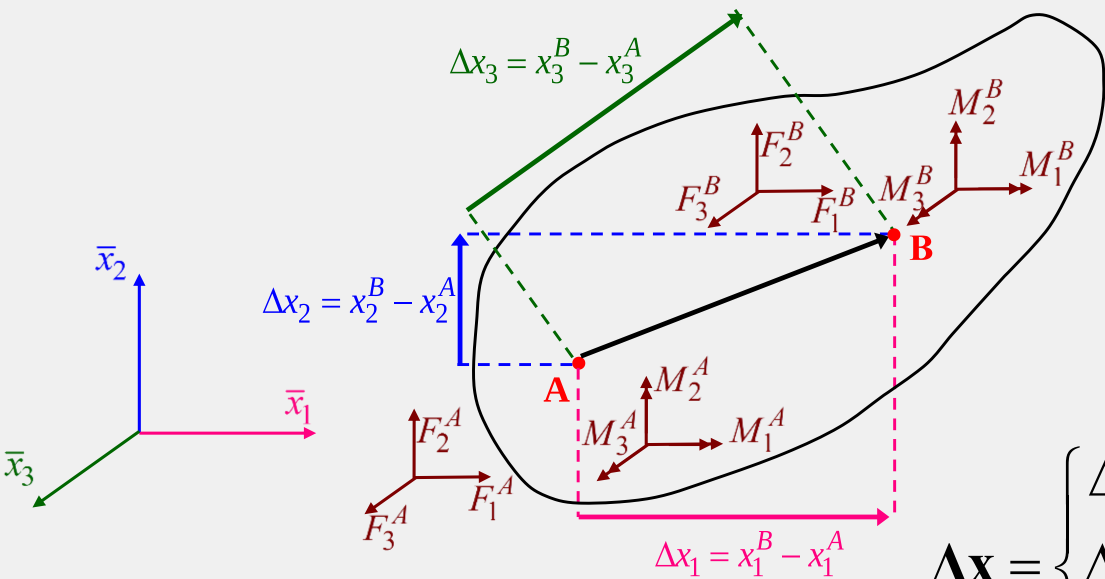
$$[e] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta x_3 & -\Delta x_2 \\ 0 & 1 & 0 & -\Delta x_3 & 0 & \Delta x_1 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta x_2 & -\Delta x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ισοδύναμες Δράσεις

Από απλές σχέσεις ισορροπίας δυνάμεων και ροπών στο στερεό σώμα, εύκολα προκύπτει ότι εάν στο σημείο Β επιβληθούν οι δράσεις F_1, F_2, F_3, M_1, M_2, M_3, μπορούν να προκύψουν οι ισοδύναμες δράσεις στο σημείο Α ως

$$\mathbf{F}^A = \mathbf{F}^B$$

$$\mathbf{M}^A = \mathbf{M}^B + \mathbf{\Delta x} \times \mathbf{F}^B$$



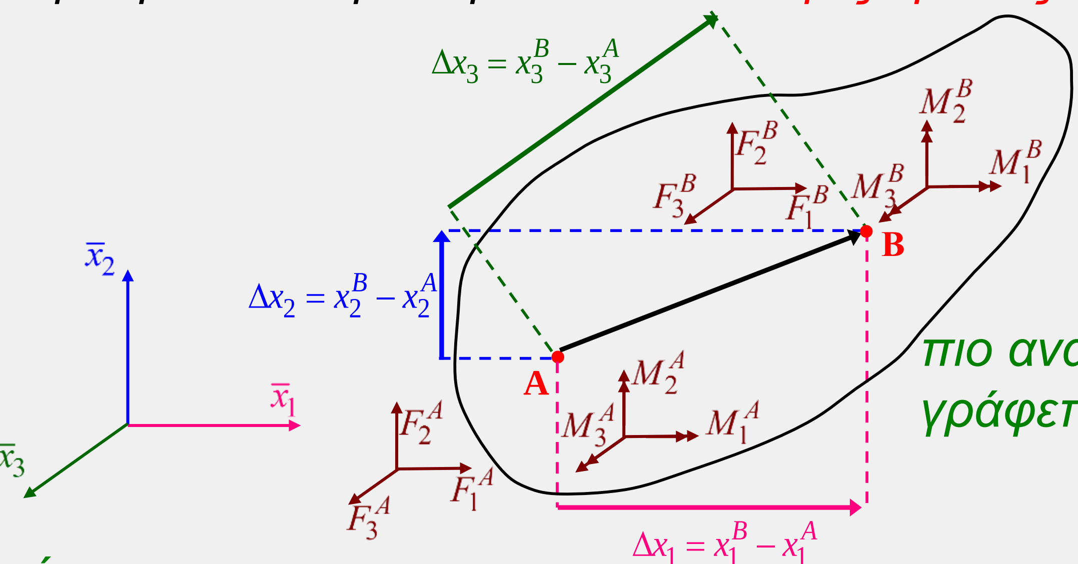
όπου

$$\mathbf{F}^A = \begin{Bmatrix} F_1^A \\ F_2^A \\ F_3^A \end{Bmatrix} \quad \mathbf{F}^B = \begin{Bmatrix} F_1^B \\ F_2^B \\ F_3^B \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{\Delta x} = \begin{Bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{M}^A = \begin{Bmatrix} M_1^A \\ M_2^A \\ M_3^A \end{Bmatrix} \quad \mathbf{M}^B = \begin{Bmatrix} M_1^B \\ M_2^B \\ M_3^B \end{Bmatrix}$$

Ισοδύναμες Δράσεις

Από απλές σχέσεις ισορροπίας δυνάμεων και ροπών στο στερεό σώμα, εύκολα προκύπτει ότι εάν στο σημείο Β επιβληθούν οι δράσεις F_1, F_2, F_3, M_1, M_2, M_3, μπορούν να προκύψουν οι ισοδύναμες δράσεις στο σημείο Α



Η σχέση $\mathbf{M}^A = \mathbf{M}^B + \mathbf{\Delta x} \times \mathbf{F}^B$

πιο αναλυτικά γράφεται ως

$$\begin{Bmatrix} M_1^A \\ M_2^A \\ M_3^A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_1^B \\ M_2^B \\ M_3^B \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} F_1^B \\ F_2^B \\ F_3^B \end{Bmatrix}$$

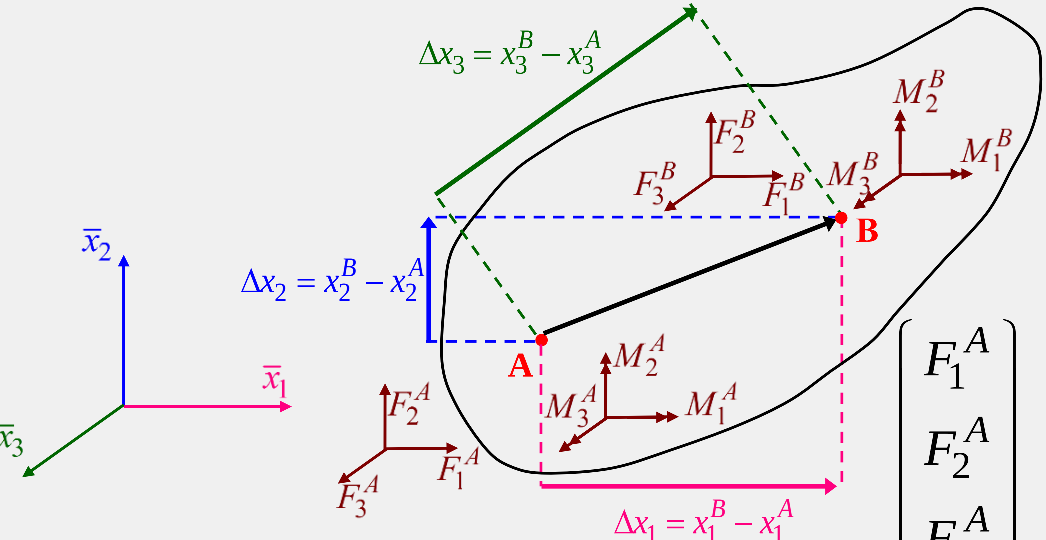
ή με τη βοήθεια του ορισμού του εξωτερικού γινομένου ως

$$\begin{Bmatrix} M_1^A \\ M_2^A \\ M_3^A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_1^B \\ M_2^B \\ M_3^B \end{Bmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ \Delta x_1 & \Delta x_2 & \Delta x_3 \\ F_1^B & F_2^B & F_3^B \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} M_1^A \\ M_2^A \\ M_3^A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_1^B \\ M_2^B \\ M_3^B \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta x_2 \cdot F_3^B - \Delta x_3 \cdot F_2^B \\ \Delta x_3 \cdot F_1^B - \Delta x_1 \cdot F_3^B \\ \Delta x_1 \cdot F_2^B - \Delta x_2 \cdot F_1^B \end{Bmatrix}$$

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΧΩΡΙΚΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ – ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ

Ισοδύναμες Δράσεις

Από απλές σχέσεις ισορροπίας δυνάμεων και ροπών στο στερεό σώμα, εύκολα προκύπτει ότι εάν στο σημείο B επιβληθούν οι δράσεις F_1, F_2, F_3, M_1, M_2, M_3, μπορούν να προκύψουν οι ισοδύναμες δράσεις στο σημείο A



Έτσι, οι σχέσεις

$$\mathbf{F}^A = \mathbf{F}^B$$

$$\mathbf{M}^A = \mathbf{M}^B + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x} \times \mathbf{F}^B$$

με μητρωική μορφή γράφονται ως

$$\begin{Bmatrix} F_1^A \\ F_2^A \\ F_3^A \\ \hdashline M_1^A \\ M_2^A \\ M_3^A \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & -\Delta x_3 & \Delta x_2 & 1 & 0 & 0 \\ \Delta x_3 & 0 & -\Delta x_1 & 0 & 1 & 0 \\ -\Delta x_2 & \Delta x_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} F_1^B \\ F_2^B \\ F_3^B \\ \hdashline M_1^B \\ M_2^B \\ M_3^B \end{Bmatrix}$$

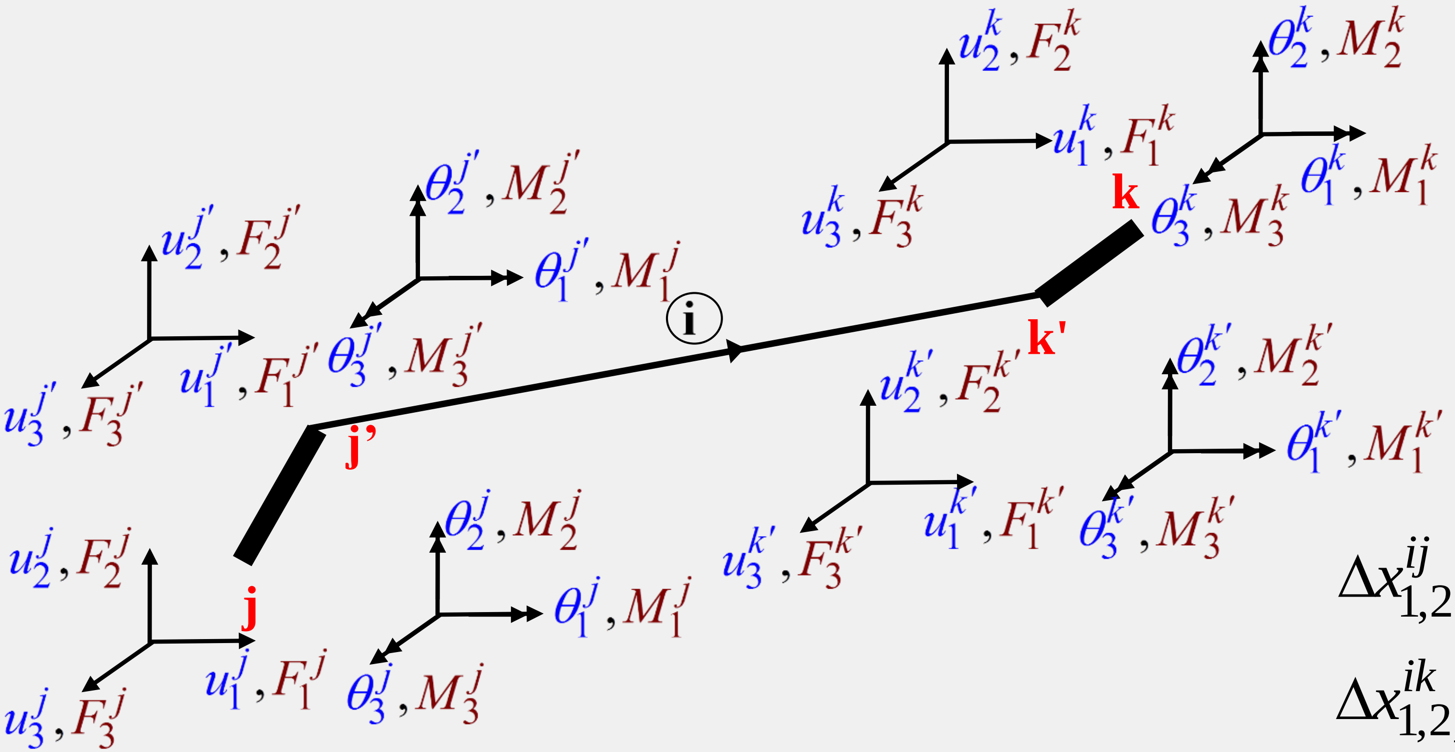
$$\left\{A^A\right\} = [e]^T \left\{A^B\right\}$$

όπου με [e] συμβολίζεται το μητρώο εκκεντρότητας του σημείου B ως προς το σημείο A

ΣΤΕΡΕΟΙ ΚΟΜΒΟΙ ΣΕ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΧΩΡΙΚΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

ΣΤΕΡΕΟΙ ΚΟΜΒΟΙ ΣΕ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΧΩΡΙΚΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

*Θεωρείται τυπικό εύκαμπτο μέλος i χωρικού φορέα, του οποίου τα άκρα j’, k’ φέρουν στερεούς κόμβους κατά τυχούσες διευθύνσεις, μορφώνοντας έτσι ένα “**υπερστοιχείο**” με άκρα j, k, το οποίο περιλαμβάνει το εύκαμπτο τμήμα και τους (τυχόν) στερεούς κόμβους στα άκρα του.*

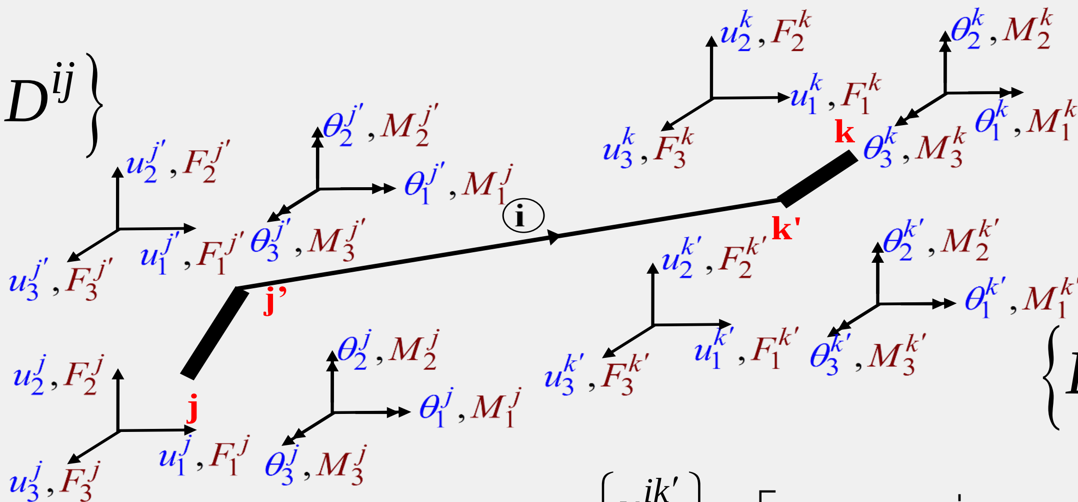


$$\Delta x_{1,2,3}^{ij} = x_{1,2,3}^{ij'} - x_{1,2,3}^{ij}$$

$$\Delta x_{1,2,3}^{ik} = x_{1,2,3}^{ik'} - x_{1,2,3}^{ik}$$

Ακραίες μετακινήσεις *των άκρων j’, k’ , συναρτήσει αυτών των άκρων j, k*

$$\left\{D^{ij'}\right\} = \left[e^{ij}\right]\left\{D^{ij}\right\}$$



$$\left\{D^{ik'}\right\} = \left[e^{ik}\right]\left\{D^{ik}\right\}$$

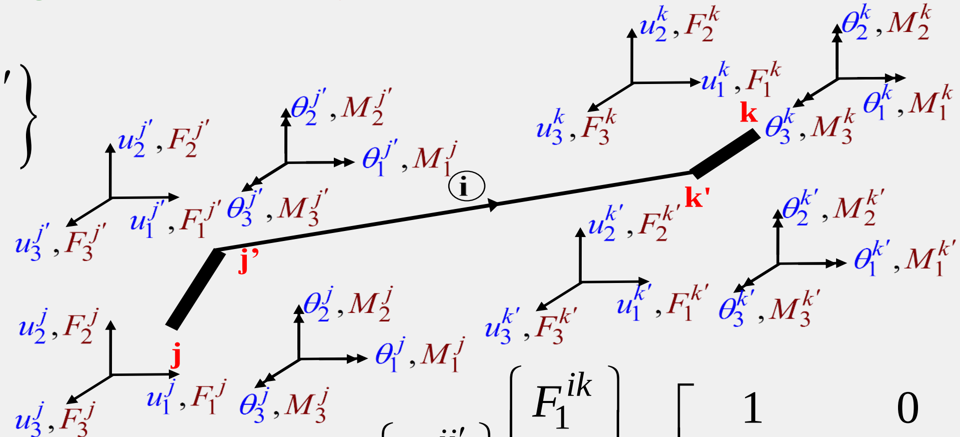
$$\begin{Bmatrix} u_1^{ij'} \\ u_2^{ij'} \\ u_3^{ij'} \\ \hdashline \vartheta_1^{ij'} \\ \vartheta_2^{ij'} \\ \vartheta_3^{ij'} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta x_3^{ij} & -\Delta x_2^{ij} \\ 0 & 1 & 0 & -\Delta x_3^{ij} & 0 & \Delta x_1^{ij} \\ 0 & 0 & 1 & \Delta x_2^{ij} & -\Delta x_1^{ij} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} u_1^{ij} \\ u_2^{ij} \\ u_3^{ij} \\ \hdashline \vartheta_1^{ij} \\ \vartheta_2^{ij} \\ \vartheta_3^{ij} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1^{ik'} \\ u_2^{ik'} \\ u_3^{ik'} \\ \hdashline \vartheta_1^{ik'} \\ \vartheta_2^{ik'} \\ \vartheta_3^{ik'} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta x_3^{ik} & -\Delta x_2^{ik} \\ 0 & 1 & 0 & -\Delta x_3^{ik} & 0 & \Delta x_1^{ik} \\ 0 & 0 & 1 & \Delta x_2^{ik} & -\Delta x_1^{ik} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} u_1^{ik} \\ u_2^{ik} \\ u_3^{ik} \\ \hdashline \vartheta_1^{ik} \\ \vartheta_2^{ik} \\ \vartheta_3^{ik} \end{Bmatrix}$$

ΣΤΕΡΕΟΙ ΚΟΜΒΟΙ
ΣΕ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΧΩΡΙΚΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Ακραίες δράσεις *των άκρων j, k, συναρτήσει αυτών των άκρων j', k'*

$$\left\{A^{ij}\right\}=\left[e^{ij}\right]^T\left\{A^{ij'}\right\}$$



$$\left\{A^{ik}\right\}=\left[e^{ik}\right]^T\left\{A^{ik'}\right\}$$

$$\begin{Bmatrix} F_1^{ij} \\ F_2^{ij} \\ F_3^{ij} \\ \hline M_1^{ij} \\ M_2^{ij} \\ M_3^{ij} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\Delta x_3^{ij} & \Delta x_2^{ij} & 1 & 0 & 0 \\ \Delta x_3^{ij} & 0 & -\Delta x_1^{ij} & 0 & 1 & 0 \\ -\Delta x_2^{ij} & \Delta x_1^{ij} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} F_1^{ij'} \\ F_2^{ij'} \\ F_3^{ij'} \\ \hline M_1^{ij'} \\ M_2^{ij'} \\ M_3^{ij'} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_1^{ik} \\ F_2^{ik} \\ F_3^{ik} \\ \hline M_1^{ik} \\ M_2^{ik} \\ M_3^{ik} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\Delta x_3^{ik} & \Delta x_2^{ik} & 1 & 0 & 0 \\ \Delta x_3^{ik} & 0 & -\Delta x_1^{ik} & 0 & 1 & 0 \\ -\Delta x_2^{ik} & \Delta x_1^{ik} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} F_1^{ik'} \\ F_2^{ik'} \\ F_3^{ik'} \\ \hline M_1^{ik'} \\ M_2^{ik'} \\ M_3^{ik'} \end{Bmatrix}$$

$$\Delta x_{1,2,3}^{ij} = x_{1,2,3}^{ij'} - x_{1,2,3}^{ij} \qquad \Delta x_{1,2,3}^{ik} = x_{1,2,3}^{ik'} - x_{1,2,3}^{ik}$$

όπου $\left[e^{ij}\right]$, $\left[e^{ik}\right]$ *τα μητρώα εκκεντρότητας του μέλους i του άκρου j και του άκρου k, αντίστοιχα.*

ΣΤΕΡΕΟΙ ΚΟΜΒΟΙ ΣΕ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΧΩΡΙΚΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Έτσι, συμβολίζοντας με $\left[e^{ij}\right], \left[e^{ik}\right]$ *τα μητρώα εκκεντρότητας του μέλους i του άκρου j και του άκρου k, αντίστοιχα,* ***το μητρώο εκκεντρότητας του μέλους i*** $\left[e^{i}\right]$ *θα δίνεται από τη σχέση*

$$\Delta x_{1,2,3}^{ij} = x_{1,2,3}^{ij\,'} - x_{1,2,3}^{ij}$$

$$\Delta x_{1,2,3}^{ik} = x_{1,2,3}^{ik\,'} - x_{1,2,3}^{ik}$$

$$\left[e^{i}\right] = \left[\begin{array}{c:c} \left[e^{ij}\right] & [0] \\ \hdashline [0] & \left[e^{ik}\right] \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccccc:cccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \Delta x_3^{ij} & -\Delta x_2^{ij} & & & & & & \\
0 & 1 & 0 & -\Delta x_3^{ij} & 0 & \Delta x_1^{ij} & & & & & & \\
0 & 0 & 1 & \Delta x_2^{ij} & \Delta x_1^{ij} & 0 & & & [0] & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & & \\
\hdashline
 & & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta x_3^{ik} & -\Delta x_2^{ik} \\
 & & & & & & 0 & 1 & 0 & -\Delta x_3^{ik} & 0 & \Delta x_1^{ik} \\
 & & & & & & 0 & 0 & 1 & \Delta x_2^{ik} & -\Delta x_1^{ik} & 0 \\
 & & & [0] & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]$$

ΣΤΕΡΕΟΙ ΚΟΜΒΟΙ
ΣΕ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΧΩΡΙΚΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Ακραίες μετακινήσεις *των άκρων j’, k’ , συναρτήσει αυτών των άκρων j, k*

ή συνολικά για το μέλος i *δηλαδή*

$$
\begin{Bmatrix} u_1^{ij'} \\ u_2^{ij'} \\ u_3^{ij'} \\ \vartheta_1^{ij'} \\ \vartheta_2^{ij'} \\ \vartheta_3^{ij'} \\ \hdashline u_1^{ik'} \\ u_2^{ik'} \\ u_3^{ik'} \\ \vartheta_1^{ik'} \\ \vartheta_2^{ik'} \\ \vartheta_3^{ik'} \end{Bmatrix} =
\left[\begin{array}{cccccc:cccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \Delta x_3^{ij} & -\Delta x_2^{ij} & & & & & & \\
0 & 1 & 0 & -\Delta x_3^{ij} & 0 & \Delta x_1^{ij} & & & & & & \\
0 & 0 & 1 & \Delta x_2^{ij} & \Delta x_1^{ij} & 0 & & & & [0] & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & & \\ \hdashline
 & & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta x_3^{ik} & -\Delta x_2^{ik} \\
 & & & & & & 0 & 1 & 0 & -\Delta x_3^{ik} & 0 & \Delta x_1^{ik} \\
 & & & & & & 0 & 0 & 1 & \Delta x_2^{ik} & -\Delta x_1^{ik} & 0 \\
 & & & [0] & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\begin{Bmatrix} u_1^{ij} \\ u_2^{ij} \\ u_3^{ij} \\ \vartheta_1^{ij} \\ \vartheta_2^{ij} \\ \vartheta_3^{ij} \\ \hdashline u_1^{ik} \\ u_2^{ik} \\ u_3^{ik} \\ \vartheta_1^{ik} \\ \vartheta_2^{ik} \\ \vartheta_3^{ik} \end{Bmatrix}
$$

$$
\left\{D^{i'}\right\} = \left[\begin{array}{c} \left\{D^{ij'}\right\} \\ \hdashline \left\{D^{ik'}\right\} \end{array}\right] =
$$

$$
= \left[\begin{array}{c:c} \left[e^{ij}\right] & [0] \\ \hdashline [0] & \left[e^{ik}\right] \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \left\{D^{ij}\right\} \\ \hdashline \left\{D^{ik}\right\} \end{array}\right] =
$$

$$
= \left[e^{i}\right]\left\{D^{i}\right\}
$$

ΣΤΕΡΕΟΙ ΚΟΜΒΟΙ
ΣΕ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΧΩΡΙΚΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Ακραίες δράσεις *των άκρων j, k, συναρτήσει αυτών των άκρων j’, k’*

ή συνολικά για το μέλος i *δηλαδή*

$$
\left\{\begin{array}{c} F_1^{ij} \\ F_2^{ij} \\ F_3^{ij} \\ M_1^{ij} \\ M_2^{ij} \\ M_3^{ij} \\ \hdashline F_1^{ik} \\ F_2^{ik} \\ F_3^{ik} \\ M_1^{ik} \\ M_2^{ik} \\ M_3^{ik} \end{array}\right\}
=
\left[\begin{array}{cccccc:cccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & [0] & & & \\
0 & -\Delta x_3^{ij} & \Delta x_2^{ij} & 1 & 0 & 0 & & & & & & \\
\Delta x_3^{ij} & 0 & -\Delta x_1^{ij} & 0 & 1 & 0 & & & & & & \\
-\Delta x_2^{ij} & \Delta x_1^{ij} & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & & \\
\hdashline
 & & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & & & & & 0 & 1 & 0 & & 0 & \\
 & & & & & & 0 & 0 & 1 & & & 0 \\
 & & [0] & & & & 0 & -\Delta x_3^{ik} & \Delta x_2^{ik} & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & & & \Delta x_3^{ik} & 0 & -\Delta x_1^{ik} & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & & -\Delta x_2^{ik} & \Delta x_1^{ik} & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\left\{\begin{array}{c} F_1^{ij'} \\ F_2^{ij'} \\ F_3^{ij'} \\ M_1^{ij'} \\ M_2^{ij'} \\ M_3^{ij'} \\ \hdashline F_1^{ik'} \\ F_2^{ik'} \\ F_3^{ik'} \\ M_1^{ik'} \\ M_2^{ik'} \\ M_3^{ik'} \end{array}\right\}
$$

$$
\left\{A^i\right\} = \left[\begin{array}{c} \left\{A^{ij}\right\} \\ \hdashline \left\{A^{ik}\right\} \end{array}\right] =
$$

$$
= \left[\begin{array}{c:c} \left[e^{ij}\right] & [0] \\ \hdashline [0] & \left[e^{ik}\right] \end{array}\right]^T \left[\begin{array}{c} \left\{A^{ij'}\right\} \\ \hdashline \left\{A^{ik'}\right\} \end{array}\right] =
$$

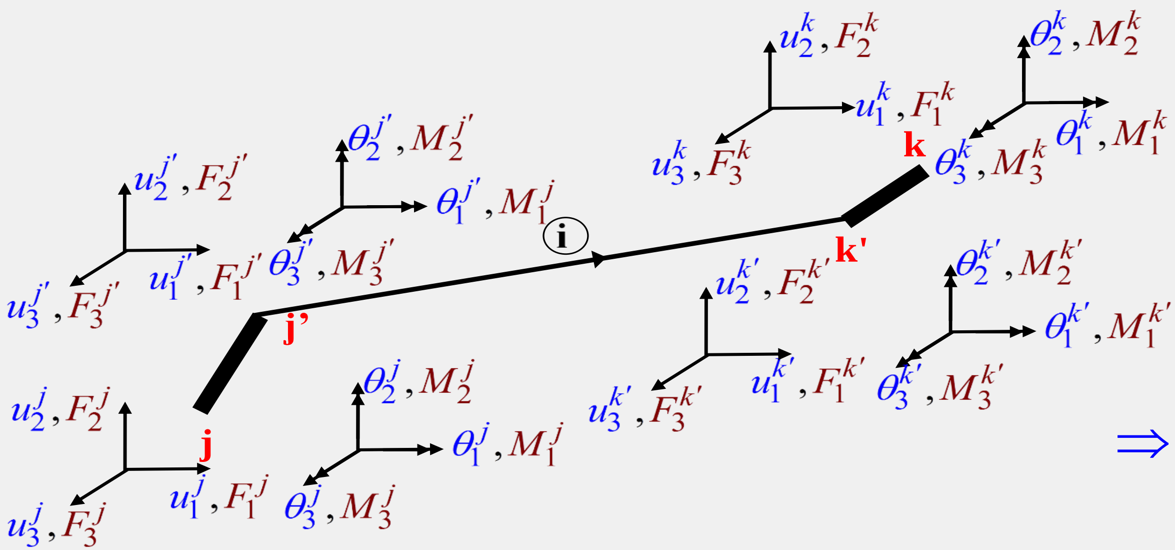
$$
= \left[e^i\right]^T \left\{A^{i'}\right\}
$$

ΣΤΕΡΕΟΙ ΚΟΜΒΟΙ
ΣΕ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΧΩΡΙΚΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Τροποποίηση μητρώου στιβαρότητας *στοιχείου i χωρικού φορέα* **λόγω στερεών κόμβων** *στα άκρα του j’, k’*

Προκειμένου να προσδιοριστεί η τροποποιημένη σχέση στιβαρότητας γράφεται αρχικά η αντίστοιχη σχέση του στοιχείου χωρίς στερεούς κόμβους

$$\left\{A^{i'}\right\}=\left[k^{i'}\right]\left\{D^{i'}\right\}$$



$$\left.\begin{array}{l}\left\{A^{i}\right\}=\left[e^{i}\right]^{T}\left\{A^{i'}\right\}\\ \left\{D^{i'}\right\}=\left[e^{i}\right]\left\{D^{i}\right\}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left\{A^{i}\right\}=\left[e^{i}\right]^{T}\left[k^{i'}\right]\left[e^{i}\right]\left\{D^{i}\right\}$$

Τροποποιημένο μητρώο στιβαρότητας στοιχείου $\left[k^{i}\right]=\left[e^{i}\right]^{T}\left[k^{i'}\right]\left[e^{i}\right]$