



ΧΩΡΙΚΑ ΠΛΑΙΣΙΑ

Ε.Ι. Σαπουντζάκης
Καθηγητής ΕΜΠ

**ΑΝΑΛΥΣΗ ΡΑΒΔΩΤΩΝ ΦΟΡΕΩΝ ΜΕ
ΜΗΤΡΩΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ**

Περιεχόμενα

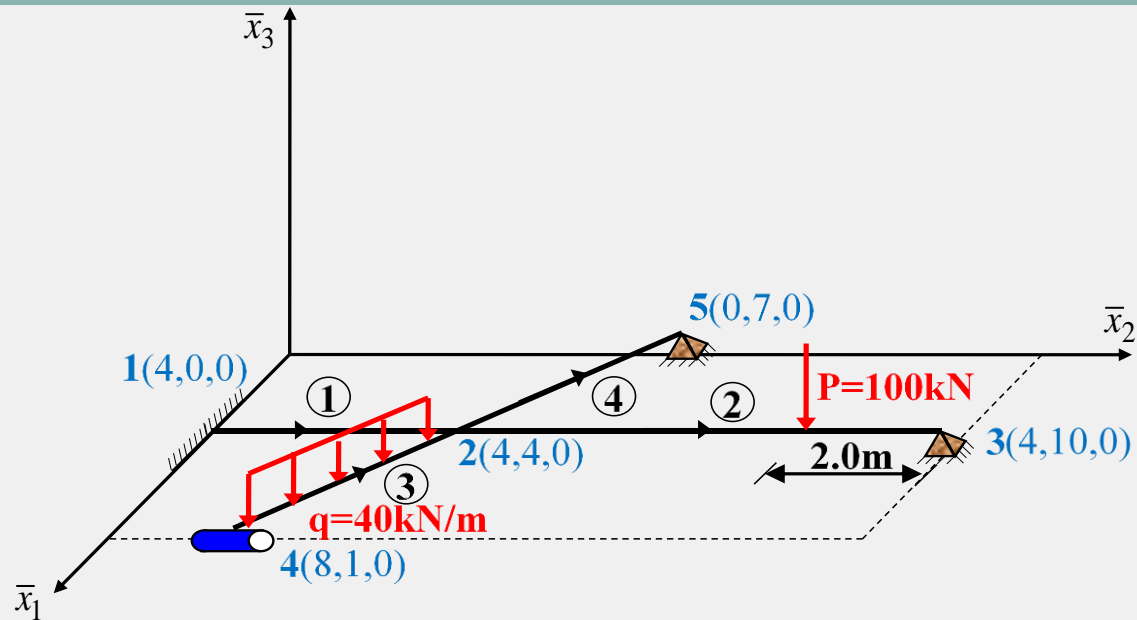
1. Εισαγωγή
2. Παρουσίαση χωρικού πλαισίου
3. Διανύσματα ακραίων δράσεων στοιχείου χωρικού πλαισίου
4. Διανύσματα ακραίων μετακινήσεων στοιχείου χωρικού πλαισίου
5. Μητρώο μετασχηματισμού στοιχείου χωρικού πλαισίου
6. Τοπικό μητρώο στιβαρότητας στοιχείου χωρικού πλαισίου
7. Καθολικό μητρώο στιβαρότητας στοιχείου χωρικού πλαισίου

Περιεχόμενα

8. Διανύσματα επικόμβιων δράσεων και μετακινήσεων χωρικού πλαισίου
9. Καθολικό μητρώο στιβαρότητας χωρικού πλαισίου
10. Τροποποίηση (αναδιάταξη) καθολικού μητρώου στιβαρότητας χωρικού πλαισίου λόγω στήριξης – Μητρώο αναδιάταξης
11. Εσωτερικά εντατικά μεγέθη μελών χωρικού πλαισίου
12. Εφαρμογή-Ανάλυση εσχάρας

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

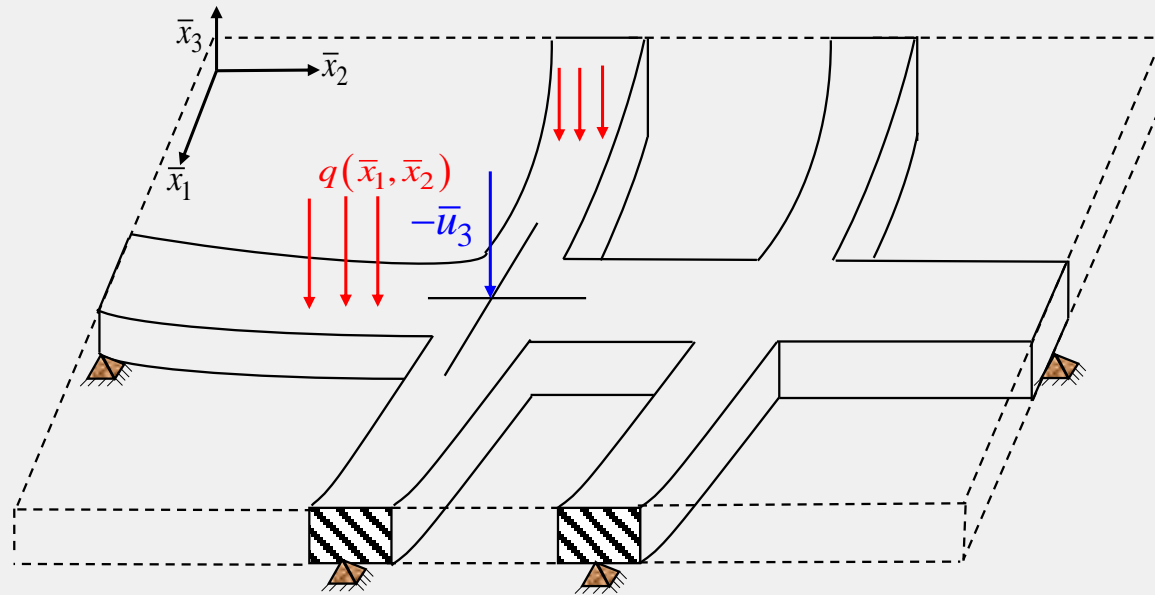


Ο **συνδυασμός γραμμικών στοιχείων** συνδεδεμένων μεταξύ τους μέσω κυρίως μονολιθικών συνδέσεων (χωρίς να αποκλείονται και κάποιες εσωτερικές ελευθερώσεις) δημιουργεί δομικούς φορείς που ονομάζονται **πλαισιακοί φορείς** ή απλώς **πλαίσια**. Το χαρακτηριστικό στοιχείο ολόσωμου γραμμικού φορέα είναι η **δοκός**.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ως **δοκός** νοείται το **ευθύγραμμο δομικό στοιχείο**, του οποίου η **οριζόντια διαμήκης διεύθυνση**, η οποία αποτελεί και τον άξονα της δοκού, **έχει διάσταση κατά πολύ μεγαλύτερη από αυτές των δύο εγκάρσιων διευθύνσεων**. Στην περίπτωση κατά την οποία όλα τα μέλη φορέα ανήκουν σε ένα επίπεδο καθώς επίσης και η φόρτιση του ενεργεί στο επίπεδο αυτό, ο φορέας χαρακτηρίζεται ως **“επίπεδος”**. Εάν μια από τις προηγούμενες συνθήκες δεν αληθεύει ο φορέας χαρακτηρίζεται ως **“χωρικός”**. Ενδιάμεση περίπτωση μεταξύ του επιπέδου και του χωρικού πλαισίου αποτελεί ο φορέας που ονομάζεται **εσχάρα**, στον οποίο όλα τα μέλη ανήκουν σε ένα επίπεδο και η φόρτιση του είναι αποκλειστικά κάθετη στο επίπεδο αυτό.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ



Συνήθης εφαρμογή της περίπτωσης **εσχάρας** αποτελεί η προσομοίωση της πλάκας με τον ραβδωτό αυτόν φορέα μια και ο μηχανισμός ανάληψης φορτίων από την πλάκα ομοιάζει σε μεγάλο βαθμό με αυτόν των δοκών εσχάρας.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στις επόμενες διαφάνειες παρουσιάζεται η **Μέθοδος Άμεσης Στιβαρότητας για την ανάλυση χωρικών πλαισίων**, δηλαδή χωρικών ολόσωμων φορέων, οι οποίοι συνθέτονται αποκλειστικά από γραμμικά στοιχεία.

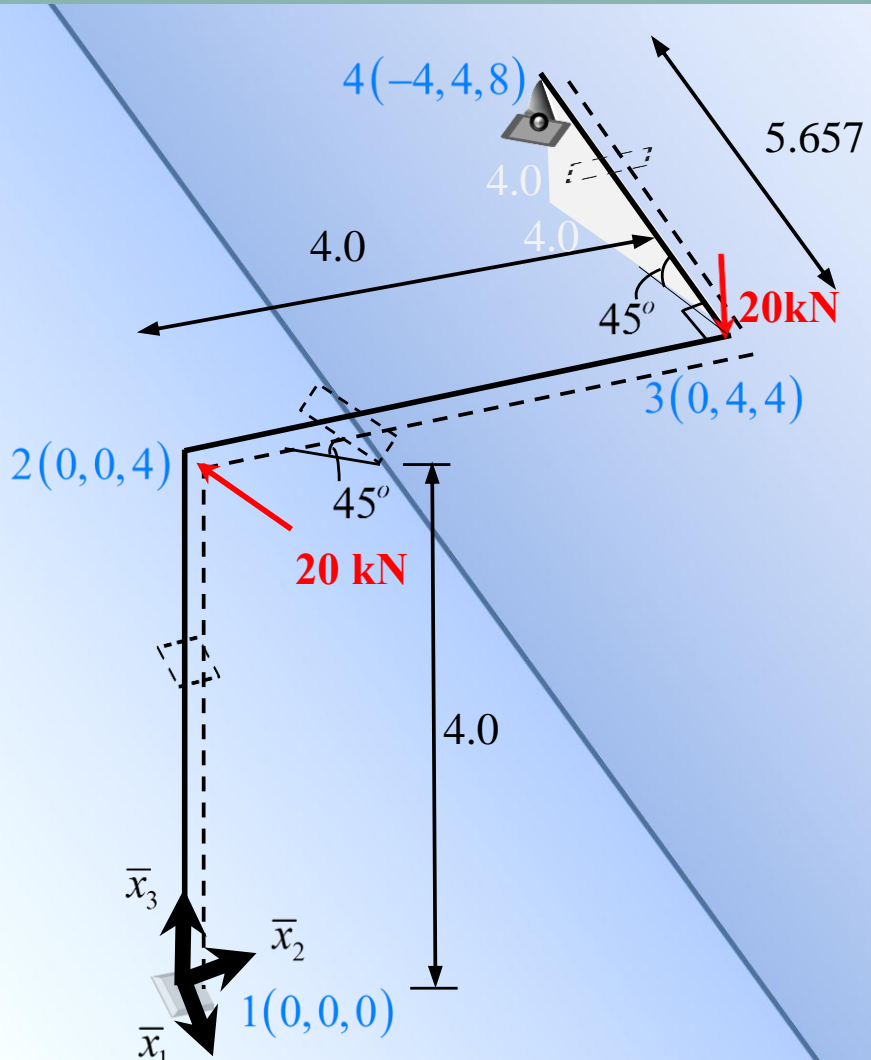
ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στις επόμενες διαφάνειες παρουσιάζεται η **Μέθοδος Άμεσης Στιβαρότητας για την ανάλυση χωρικών πλαισίων**, δηλαδή χωρικών ολόσωμων φορέων, οι οποίοι συνθέτονται αποκλειστικά από γραμμικά στοιχεία.

Η περίπτωση του χωρικού πλαισίου αποτελεί την πλέον γενική περίπτωση ραβδόμορφου φορέα, από την ανάλυση της οποίας μπορεί να προκύψει η ανάλυση του επίπεδου δικτυώματος, του επίπεδου πλαισίου, του χωρικού δικτυώματος και της εσχάρας αντιμετωπίζοντας τους ως ειδικές περιπτώσεις. Για τον λόγο αυτό, κατά την παρουσίαση των βημάτων της μεθόδου για την περίπτωση του χωρικού πλαισίου, θα επισημαίνεται η εξαγωγή των αντίστοιχων βημάτων των φορέων που προαναφέρθηκαν ως ειδικές περιπτώσεις των προηγούμενων.

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΧΩΡΙΚΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΧΩΡΙΚΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ



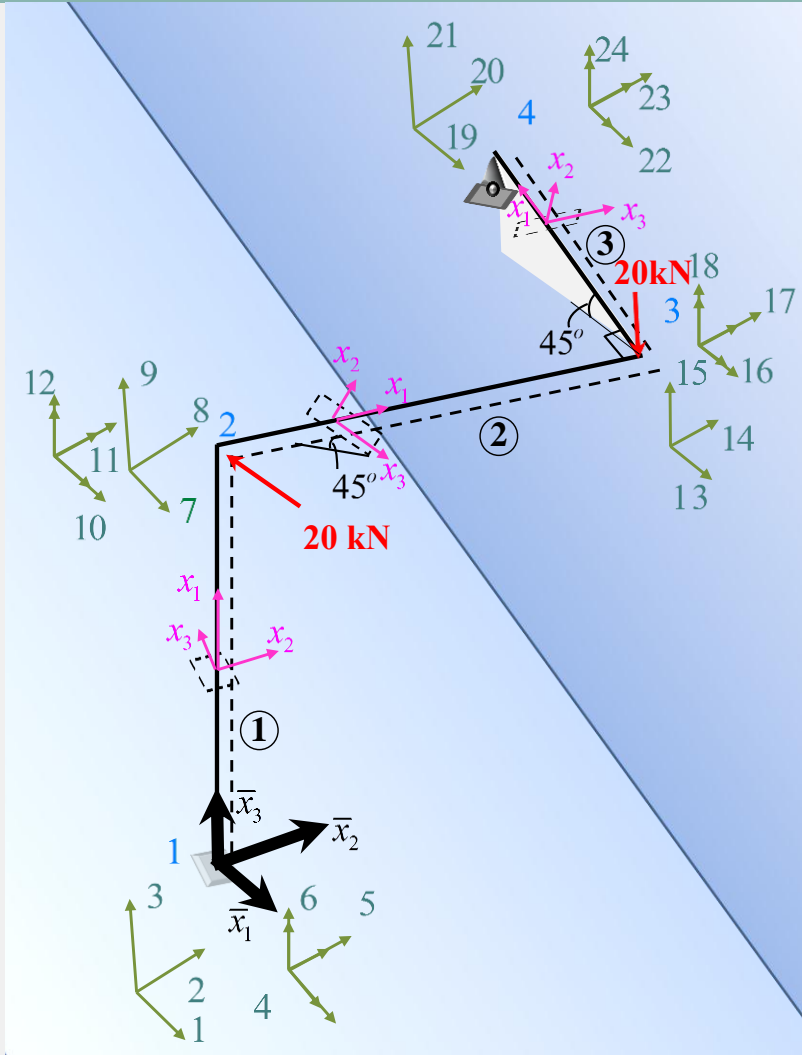
Εξεταζόμενο πλαίσιο

Στοιχεία γεωμετρίας και υλικού μελών

Τα μέλη του πλαισίου είναι κατασκευασμένα από ομογενές και ισότροπο υλικό ($E = 30 \times 10^6 \text{ kN} / \text{m}^2$) και είναι διατομής $A = 0.50 \times 0.25 \text{ m}^2$.

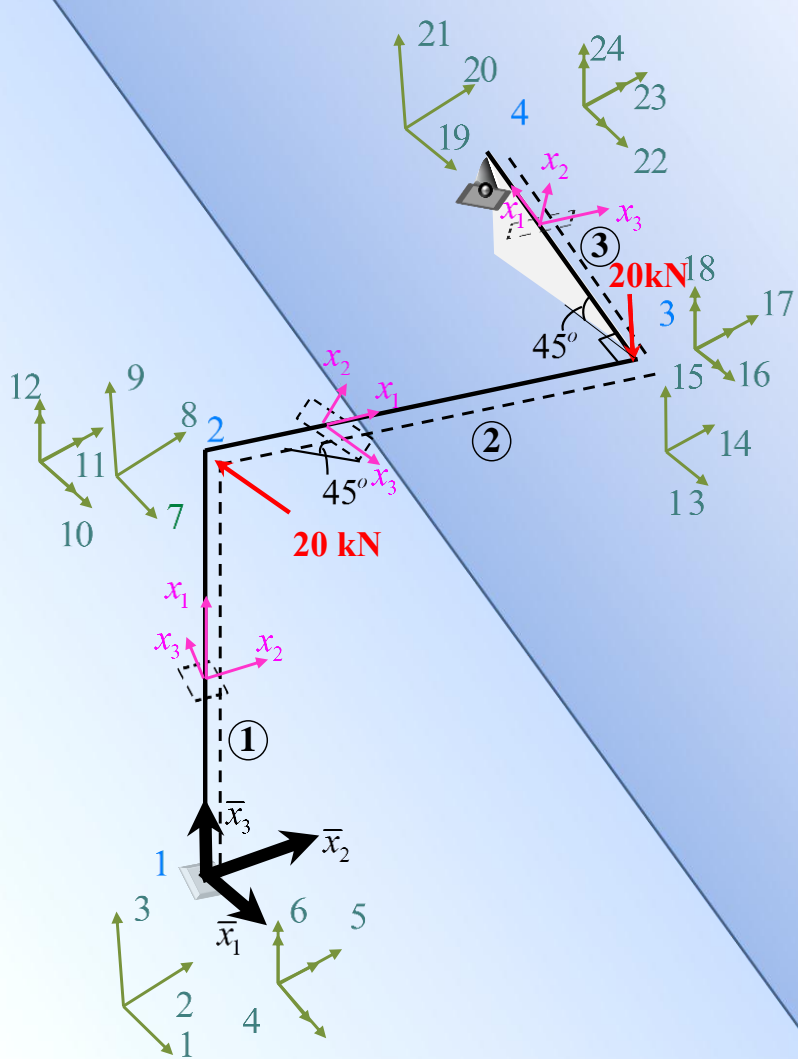
Το πλαίσιο στηρίζεται στον κόμβο 1 με πάκτωση και στον κόμβο 4 με κύλιση με ελευθέρωση μετατόπισης κατά τους καθολικούς άξονες x_1, x_2 .

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΧΩΡΙΚΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ



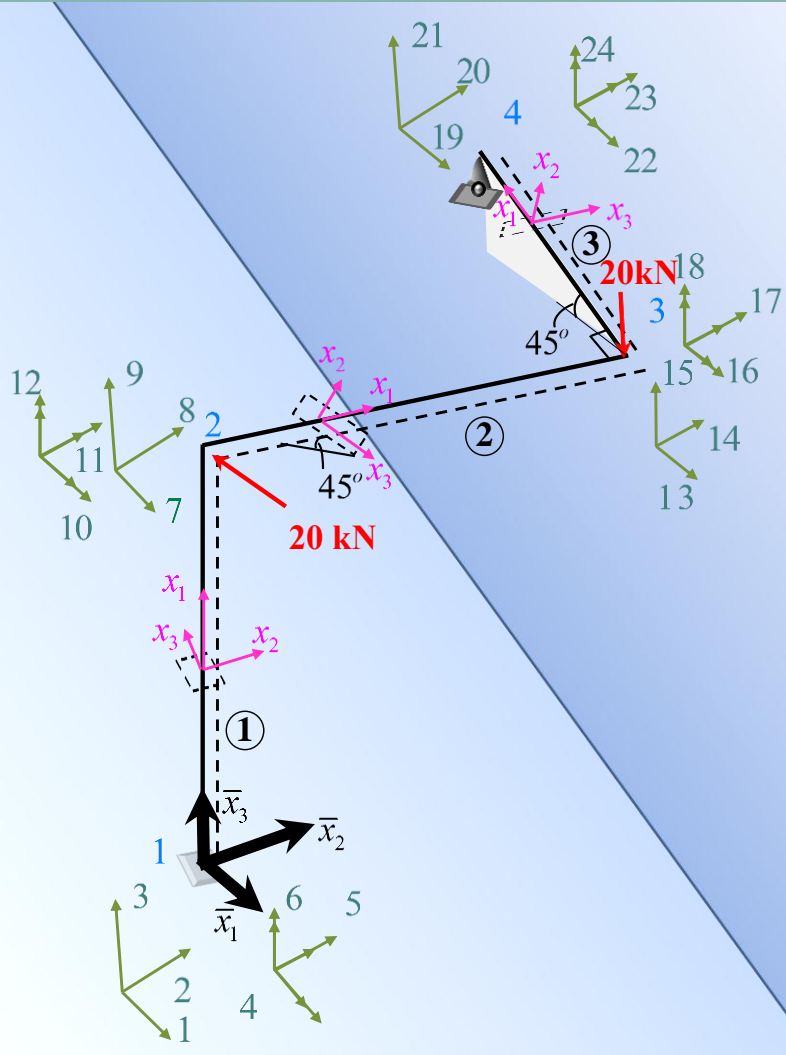
Σημείο εκκίνησης για την ανάλυση του χωρικού πλαισίου αποτελεί η **αρίθμηση των κόμβων και των μελών** του. Επίσης, επιλέγεται ως **καθολικό σύστημα αξόνων** το δεξιόστροφο ορθογώνιο σύστημα αξόνων ως προς το οποίο θα γίνει η ανάλυση του φορέα και ο υπολογισμός τόσο των **κινηματικών μεγεθών** των κόμβων του όσο και των **αντιδράσεων των στηρίξεων** του.

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΧΩΡΙΚΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ



Ακολουθως, προκειμένου να πραγματοποιηθεί ο ορισμός των εσωτερικών εντατικών και των κινηματικών μεγεθών των μελών εισάγεται **τοπικό σύστημα αναφοράς** για κάθε ένα από τα στοιχεία που συνθέτουν το πλαίσιο. Για τον καθορισμό του συστήματος αυτού, σε κάθε μέλος ορίζεται ως **άξονας x_1** αυτός που έχει διεύθυνση εκείνη του μέλους και φορά από τον κόμβο με μικρότερο προς τον κόμβο με μεγαλύτερο αύξοντα αριθμό. Ως άξονες x_2, x_3 ορίζονται οι κύριοι κεντροβαρικοί άξονες της διατομής.

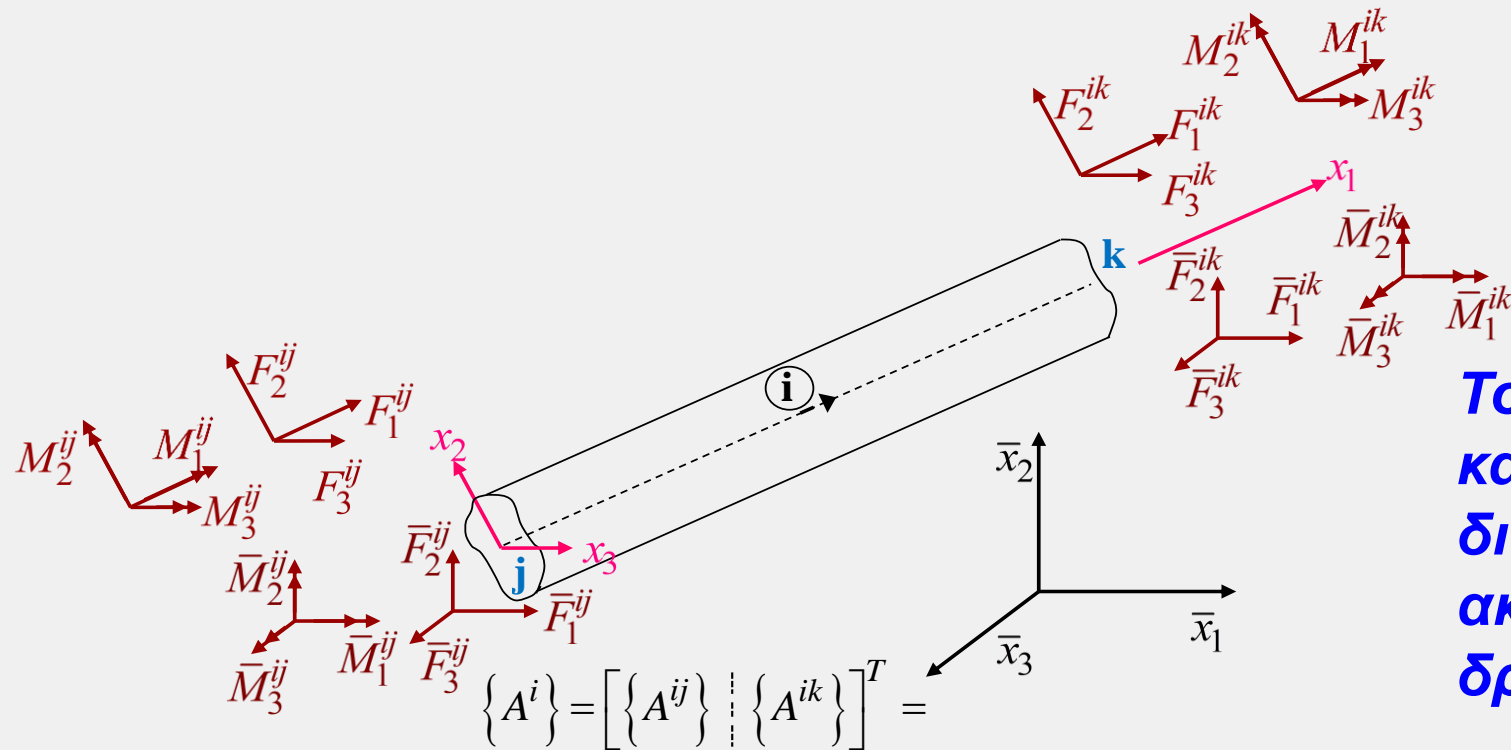
ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΧΩΡΙΚΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ



Τέλος, καθορίζονται οι **βαθμοί ελευθερίας** κίνησης των κόμβων του πλαισίου (κινηματική αοριστία), όπου στο βήμα αυτό **αμελείται ο τρόπος στήριξης του**. Έτσι, γνωρίζοντας ότι σε χωρικό πλαίσιο **κάθε κόμβος διαθέτει έξι βαθμούς ελευθερίας κίνησης**, οι βαθμοί ελευθερίας κίνησης του φορέα θα είναι $6N$, όπου N ο αριθμός των κόμβων (nodes) του πλαισίου.

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΑΚΡΑΙΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΧΩΡΙΚΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΑΚΡΑΙΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΧΩΡΙΚΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ



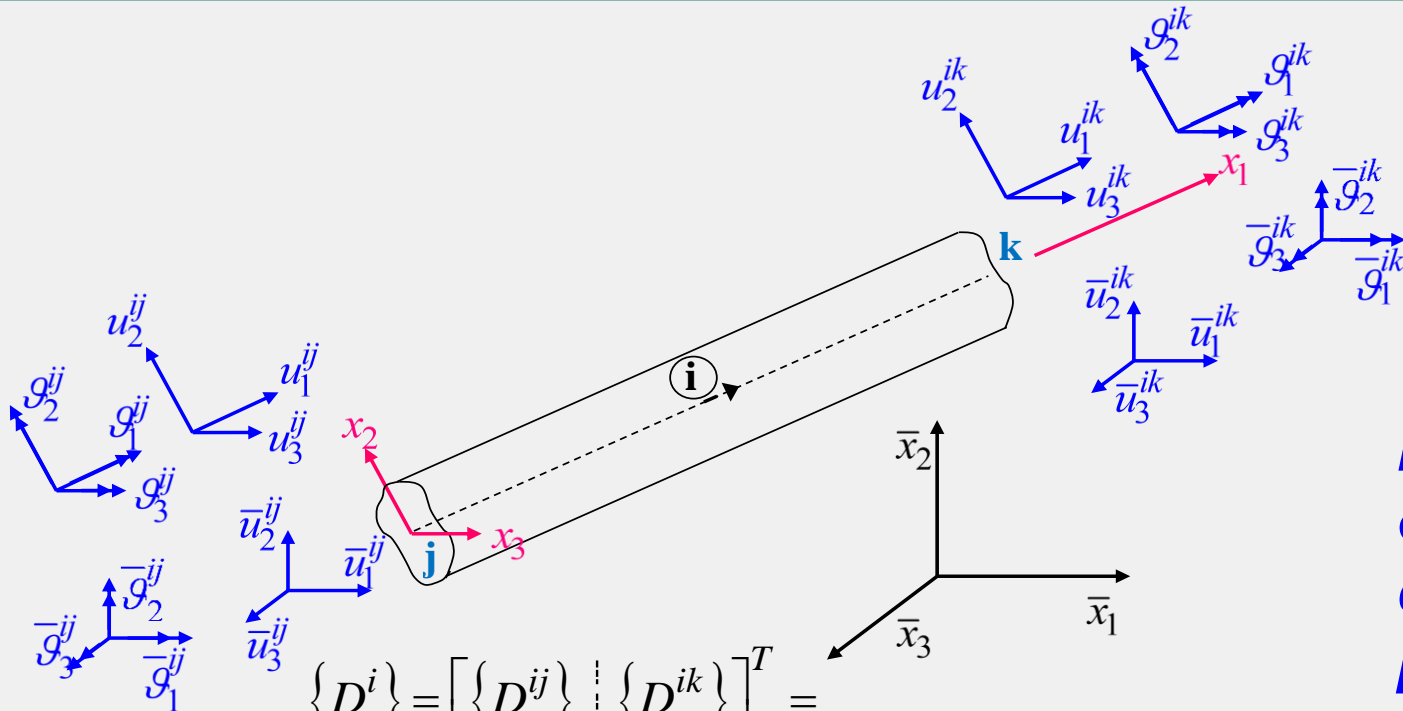
Τοπικό και καθολικό διάνυσμα ακραίων δράσεων

όλου του στοιχείου

$$\begin{aligned} \{A^i\} &= \left[\left\{ A^{ij} \right\} \parallel \left\{ A^{ik} \right\} \right]^T = \\ &= \left\{ F_1^{ij} \quad F_2^{ij} \quad F_3^{ij} \quad M_1^{ij} \quad M_2^{ij} \quad M_3^{ij} \parallel F_1^{ik} \quad F_2^{ik} \quad F_3^{ik} \quad M_1^{ik} \quad M_2^{ik} \quad M_3^{ik} \right\}^T \\ \{\bar{A}^i\} &= \left[\left\{ \bar{A}^{ij} \right\} \parallel \left\{ \bar{A}^{ik} \right\} \right]^T = \\ &= \left\{ \bar{F}_1^{ij} \quad \bar{F}_2^{ij} \quad \bar{F}_3^{ij} \quad \bar{M}_1^{ij} \quad \bar{M}_2^{ij} \quad \bar{M}_3^{ij} \parallel \bar{F}_1^{ik} \quad \bar{F}_2^{ik} \quad \bar{F}_3^{ik} \quad \bar{M}_1^{ik} \quad \bar{M}_2^{ik} \quad \bar{M}_3^{ik} \right\}^T \end{aligned}$$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΑΚΡΑΙΩΝ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΧΩΡΙΚΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΑΚΡΑΙΩΝ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΧΩΡΙΚΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ



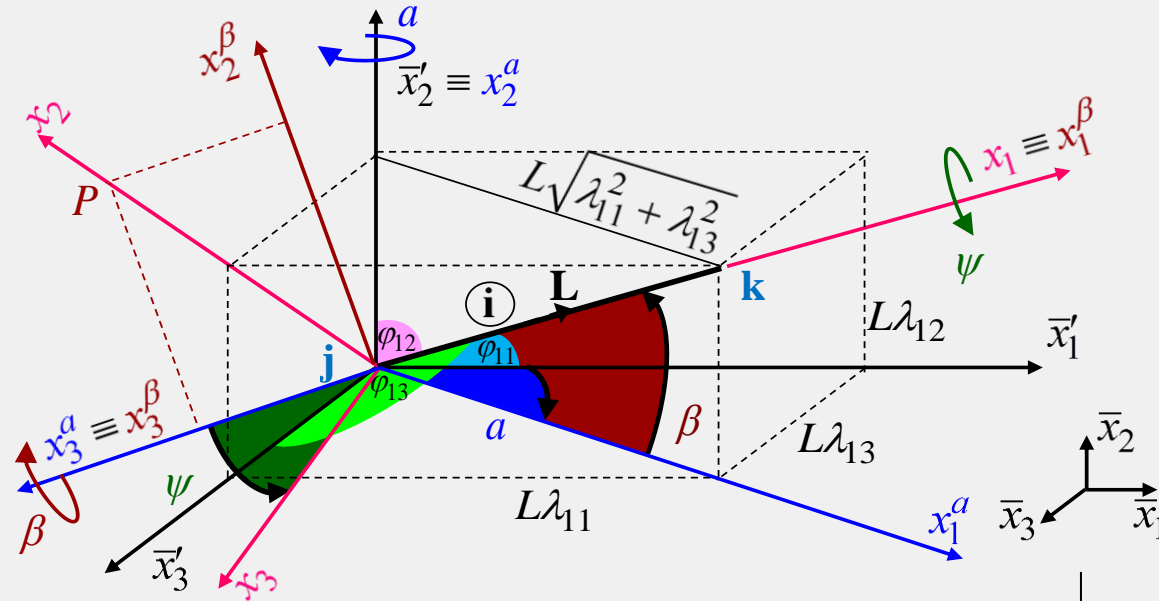
**Τοπικό και
καθολικό
διάνυσμα
ακράιων
μετακινήσεων**

**όλου του
στοιχείου**

$$\begin{aligned}
 \{D^i\} &= \left[\left\{ D^{ij} \right\} \parallel \left\{ D^{ik} \right\} \right]^T = \\
 &= \left\{ u_1^{ij} \quad u_2^{ij} \quad u_3^{ij} \quad g_1^{ij} \quad g_2^{ij} \quad g_3^{ij} \parallel u_1^{ik} \quad u_2^{ik} \quad u_3^{ik} \quad g_1^{ik} \quad g_2^{ik} \quad g_3^{ik} \right\}^T \\
 \{\bar{D}^i\} &= \left[\left\{ \bar{D}^{ij} \right\} \parallel \left\{ \bar{D}^{ik} \right\} \right]^T = \\
 &= \left\{ \bar{u}_1^{ij} \quad \bar{u}_2^{ij} \quad \bar{u}_3^{ij} \quad \bar{g}_1^{ij} \quad \bar{g}_2^{ij} \quad \bar{g}_3^{ij} \parallel \bar{u}_1^{ik} \quad \bar{u}_2^{ik} \quad \bar{u}_3^{ik} \quad \bar{g}_1^{ik} \quad \bar{g}_2^{ik} \quad \bar{g}_3^{ik} \right\}^T
 \end{aligned}$$

ΜΗΤΡΩΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΧΩΡΙΚΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Βασικό μητρώο περιστροφής



Απαιτούνται τρεις διαδοχικές περιστροφές του καθολικού συστήματος αξόνων, οι οποίες πρέπει να είναι τέτοιες ώστε αυτό να συμπίπτει με το τοπικό σύστημα αξόνων.

1η περιστροφή $[\Lambda^\alpha]$

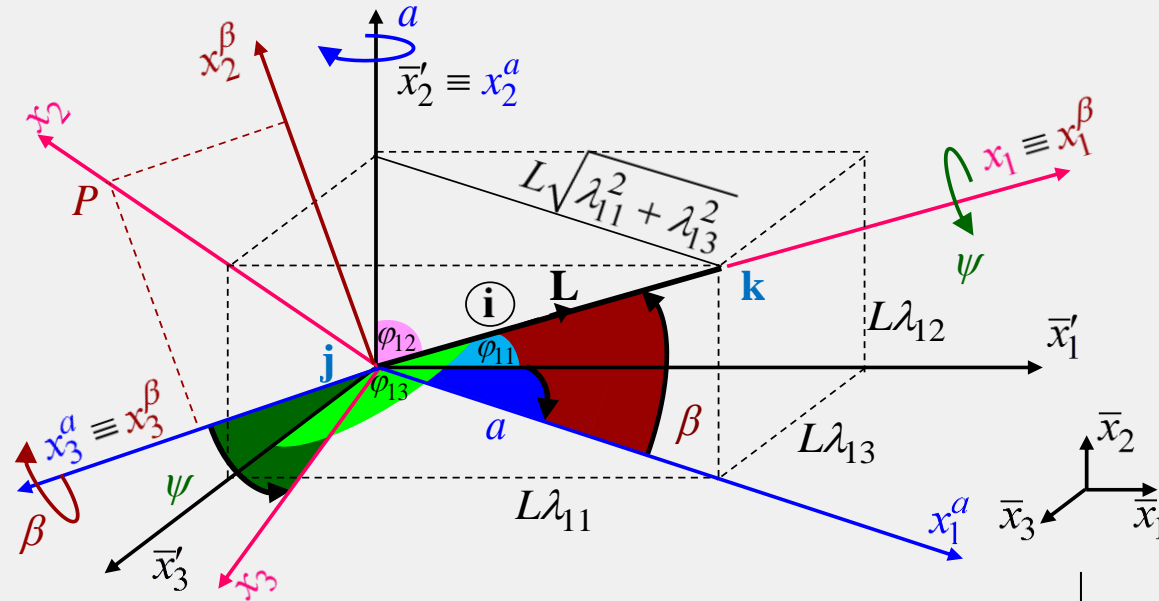
$$\begin{aligned} \lambda_{11}^a &= \cos a & \lambda_{12}^a &= 0 & \lambda_{13}^a &= \sin a \\ \lambda_{21}^a &= 0 & \lambda_{22}^a &= 1 & \lambda_{23}^a &= 0 \\ \lambda_{31}^a &= -\sin a & \lambda_{32}^a &= 0 & \lambda_{33}^a &= \cos a \end{aligned}$$

$$\sin a = \frac{\lambda_{13}}{\sqrt{\lambda_{11}^2 + \lambda_{13}^2}} \quad \cos a = \frac{\lambda_{11}}{\sqrt{\lambda_{11}^2 + \lambda_{13}^2}}$$

$$\{A\} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} = [\Lambda^\psi][\Lambda^\beta][\Lambda^\alpha] \begin{Bmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \\ \bar{A}_3 \end{Bmatrix} = [\Lambda_S] \{\bar{A}\}$$

$$[\Lambda_S] = [\Lambda^\psi][\Lambda^\beta][\Lambda^\alpha]$$

Βασικό μητρώο περιστροφής



Απαιτούνται τρεις διαδοχικές περιστροφές του καθολικού συστήματος αξόνων, οι οποίες πρέπει να είναι τέτοιες ώστε αυτό να συμπίπτει με το τοπικό σύστημα αξόνων.

2η περιστροφή $[\Lambda^\beta]$

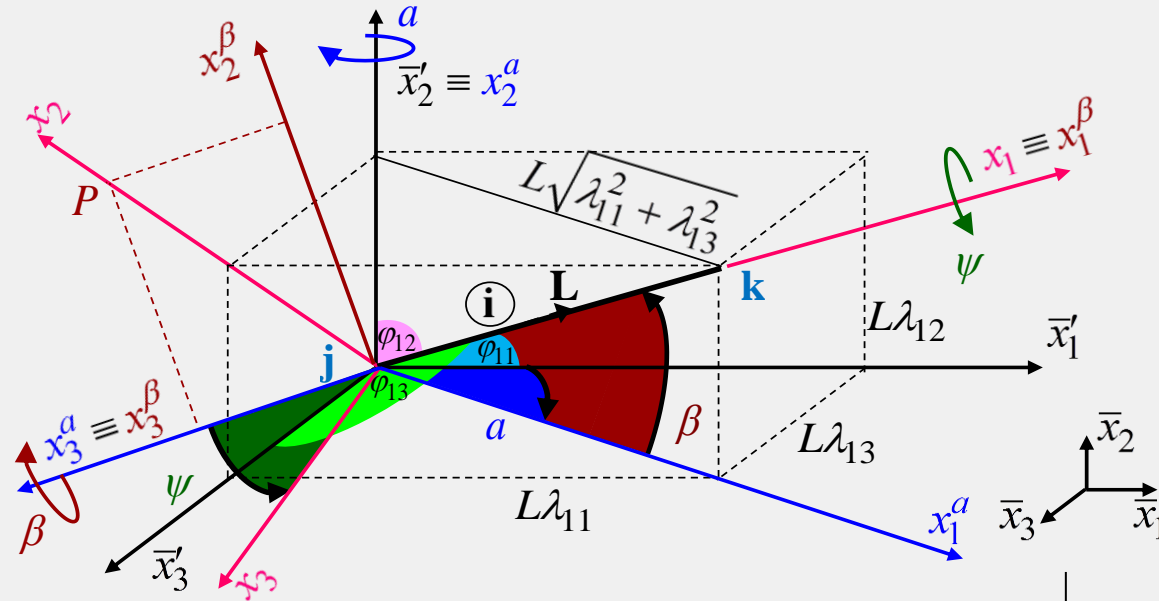
$$\begin{aligned} \lambda_{11}^\beta &= \cos \beta & \lambda_{12}^\beta &= \sin \beta & \lambda_{13}^\beta &= 0 \\ \lambda_{21}^\beta &= -\sin \beta & \lambda_{22}^\beta &= \cos \beta & \lambda_{23}^\beta &= 0 \\ \lambda_{31}^\beta &= 0 & \lambda_{32}^\beta &= 0 & \lambda_{33}^\beta &= 1 \end{aligned}$$

$$\sin \beta = \lambda_{12} \quad \cos \beta = \sqrt{\lambda_{11}^2 + \lambda_{13}^2}$$

$$\{\mathbf{A}\} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} = [\Lambda^\psi][\Lambda^\beta][\Lambda^\alpha] \begin{Bmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \\ \bar{A}_3 \end{Bmatrix} = [\Lambda_S] \{\bar{\mathbf{A}}\}$$

$$[\Lambda_S] = [\Lambda^\psi][\Lambda^\beta][\Lambda^\alpha]$$

Βασικό μητρώο περιστροφής



Απαιτούνται τρεις διαδοχικές περιστροφές του καθολικού συστήματος αξόνων, οι οποίες πρέπει να είναι τέτοιες ώστε αυτό να συμπίπτει με το τοπικό σύστημα αξόνων.

3η περιστροφή $[\Lambda^\psi]$

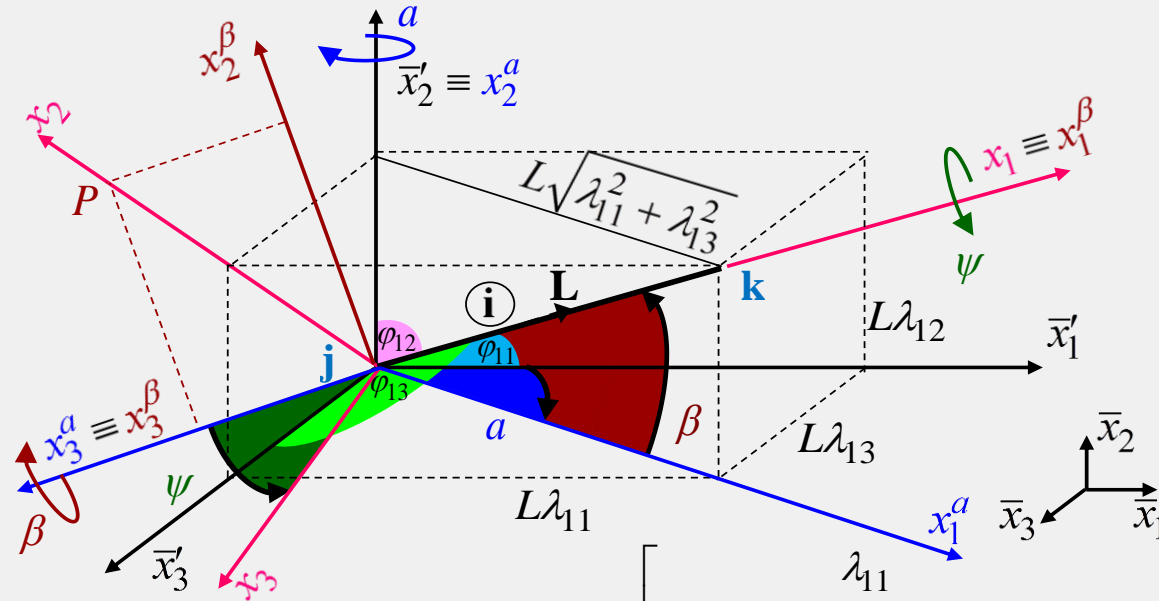
$$\begin{matrix} \lambda_{11}^\psi = 1 & \lambda_{12}^\psi = 0 & \lambda_{13}^\psi = 0 \\ \lambda_{21}^\psi = 0 & \lambda_{22}^\psi = \cos \psi & \lambda_{23}^\psi = \sin \psi \\ \lambda_{31}^\psi = 0 & \lambda_{32}^\psi = -\sin \psi & \lambda_{33}^\psi = \cos \psi \end{matrix}$$

με το συνημίτονο και το ημίτονο της γωνίας κυλίσεως ψ

$$\{\mathbf{A}\} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} = [\Lambda^\psi][\Lambda^\beta][\Lambda^\alpha] \begin{Bmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \\ \bar{A}_3 \end{Bmatrix} = [\Lambda_S] \{\bar{\mathbf{A}}\}$$

$$[\Lambda_S] = [\Lambda^\psi][\Lambda^\beta][\Lambda^\alpha]$$

Βασικό μητρώο περιστροφής



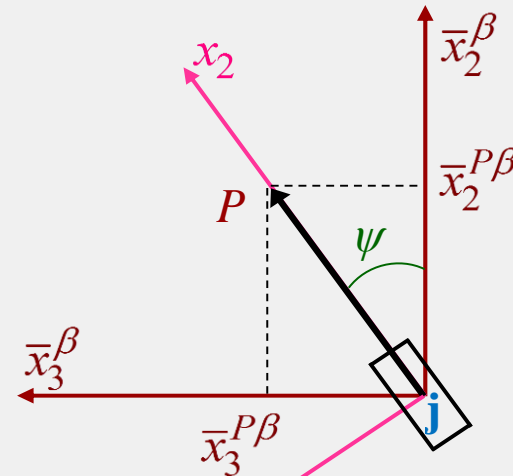
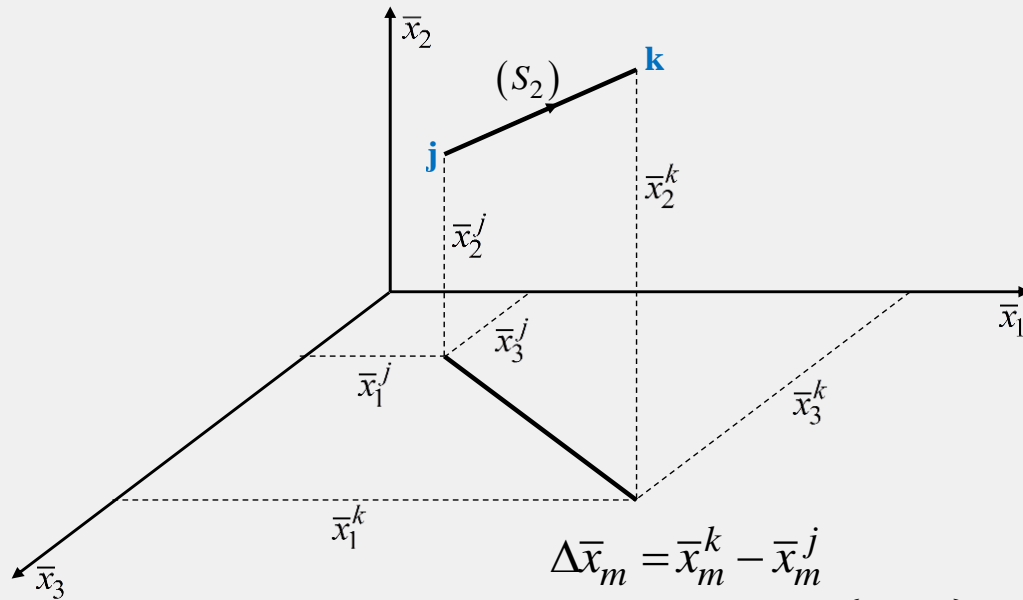
Απαιτούνται τρεις διαδοχικές περιστροφές του καθολικού συστήματος αξόνων, οι οποίες πρέπει να είναι τέτοιες ώστε αυτό να συμπίπτει με το τοπικό σύστημα αξόνων.

Έτσι, σύμφωνα με τα προηγούμενα

$$[\Lambda_S] = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_{11}\lambda_{12} \cos \psi + \lambda_{13} \sin \psi}{\sqrt{\lambda_{11}^2 + \lambda_{13}^2}} & \left(\sqrt{\lambda_{11}^2 + \lambda_{13}^2}\right) \cos \psi & -\frac{\lambda_{12}\lambda_{13} \cos \psi - \lambda_{11} \sin \psi}{\sqrt{\lambda_{11}^2 + \lambda_{13}^2}} \\ \frac{\lambda_{11}\lambda_{12} \sin \psi - \lambda_{13} \cos \psi}{\sqrt{\lambda_{11}^2 + \lambda_{13}^2}} & -\left(\sqrt{\lambda_{11}^2 + \lambda_{13}^2}\right) \sin \psi & \frac{\lambda_{12}\lambda_{13} \sin \psi + \lambda_{11} \cos \psi}{\sqrt{\lambda_{11}^2 + \lambda_{13}^2}} \end{bmatrix}$$

Βασικό μητρώο περιστροφής

Αναφορικά με τον προσδιορισμό της γωνίας κυλίσεως ψ ορίζεται σημείο P στο επίπεδο x_1, x_2 , το οποίο **δεν πρέπει να κείται πάνω στον άξονα x_1**



$$L = \sqrt{\Delta \bar{x}_1^2 + \Delta \bar{x}_2^2 + \Delta \bar{x}_3^2}$$

$$\lambda_{11} = \cos \phi_{11} = \Delta \bar{x}_1 / L$$

$$\lambda_{12} = \cos \phi_{12} = \Delta \bar{x}_2 / L$$

$$\lambda_{13} = \cos \phi_{13} = \Delta \bar{x}_3 / L$$

$$\begin{Bmatrix} x_1^{P\beta} \\ x_2^{P\beta} \\ x_3^{P\beta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda^\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda^\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \bar{x}_1^P \\ \Delta \bar{x}_2^P \\ \Delta \bar{x}_3^P \end{Bmatrix}$$

$$\sin \psi = \frac{x_3^{P\beta}}{\sqrt{(x_2^{P\beta})^2 + (x_3^{P\beta})^2}} \quad \cos \psi = \frac{x_2^{P\beta}}{\sqrt{(x_2^{P\beta})^2 + (x_3^{P\beta})^2}}$$

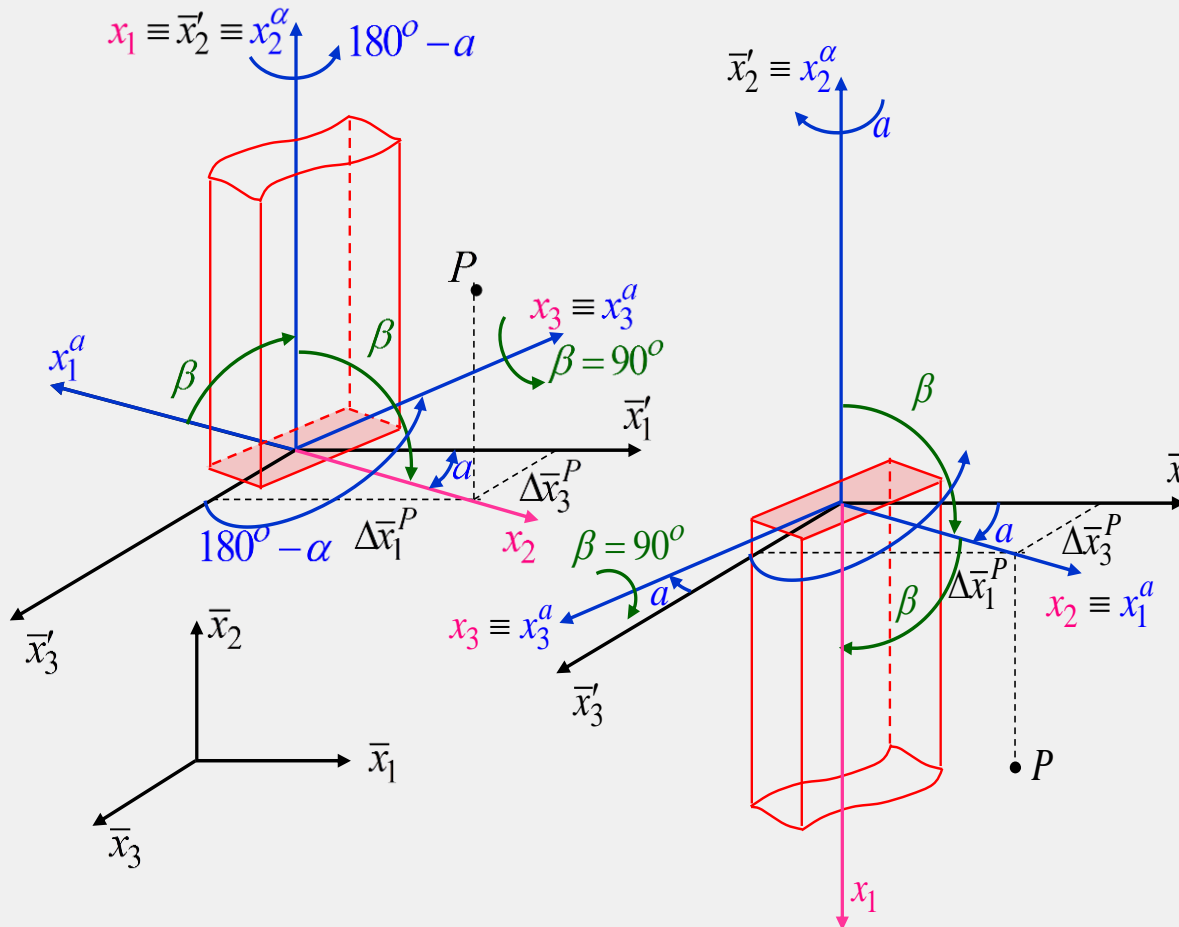
$$\Delta \bar{x}_1^P = \bar{x}_1^P - \bar{x}_1^j$$

$$\Delta \bar{x}_2^P = \bar{x}_2^P - \bar{x}_2^j$$

$$\Delta \bar{x}_3^P = \bar{x}_3^P - \bar{x}_3^j$$

Μητρώο περιστροφής με ειδικό προσανατολισμό

Στην περίπτωση κατά την οποία ο τοπικός άξονας x_1 είναι παράλληλος με τον καθολικό άξονα \bar{x}_2

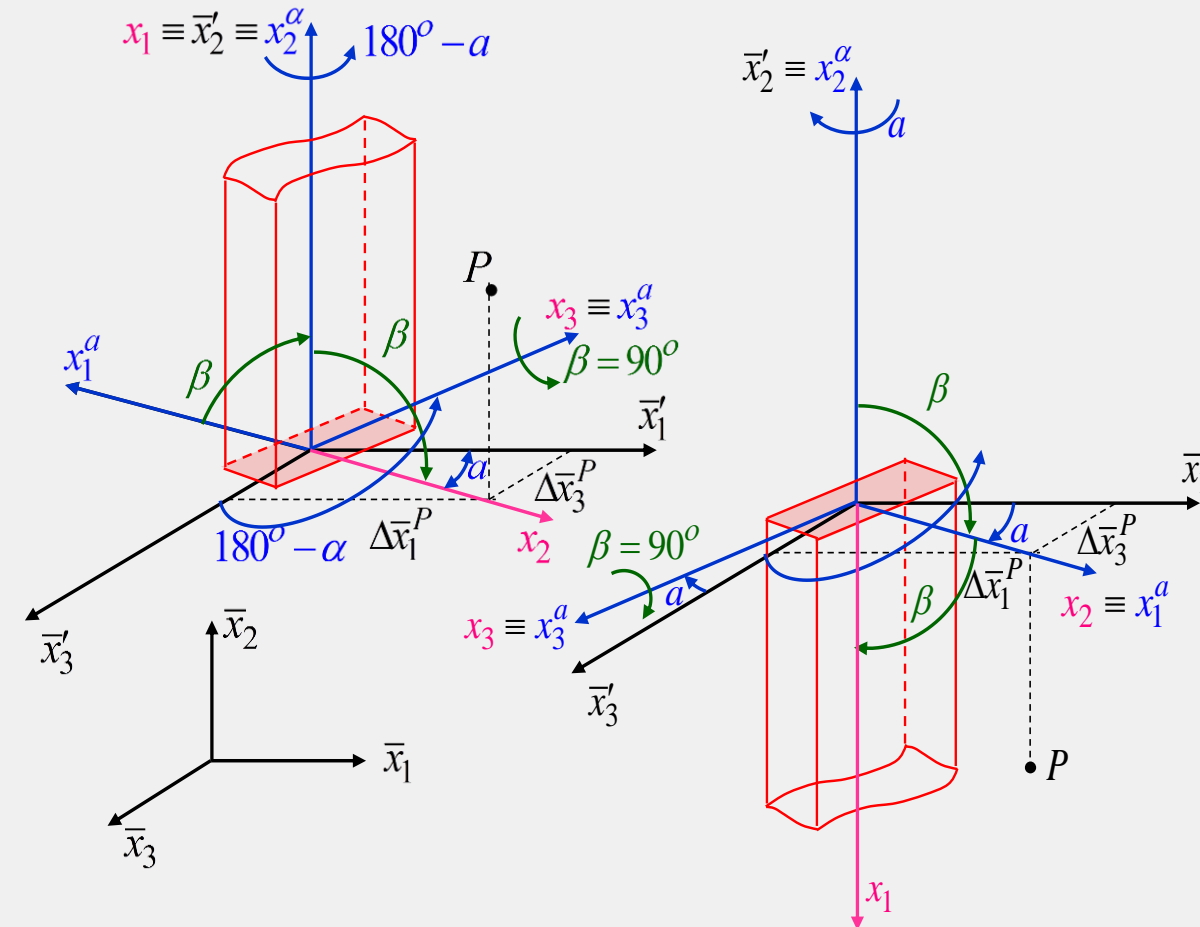


το συνημίτονο της γωνίας β είναι μηδέν διότι μηδενίζεται η προβολή του στοιχείου στο επίπεδο $\bar{x}_1 \bar{x}_3$. Αυτό σημαίνει ότι $\cos \beta = \sqrt{\lambda_{11}^2 + \lambda_{13}^2} = 0$ και η σχέση που διατυπώθηκε για το $[\Lambda_S]$ δεν ισχύει, διότι η μηδενισμένη παράσταση βρίσκεται στον παρονομαστή των σχέσεων. Στην περίπτωση αυτή θα απαιτηθούν δύο διαδοχικές περιστροφές του καθολικού συστήματος αξόνων, οι οποίες είναι τέτοιες ώστε αυτό να συμπίψει με το αντίστοιχο τοπικό.

Μητρώο περιστροφής με ειδικό προσανατολισμό

Στην περίπτωση κατά την οποία ο τοπικός άξονας x_1 είναι παράλληλος με τον καθολικό άξονα \bar{x}_2

Δύο διαδοχικές περιστροφές του καθολικού συστήματος αξόνων, οι οποίες είναι τέτοιες ώστε αυτό να συμπίπτει με το τοπικό σύστημα αξόνων.



1η περιστροφή

$$\lambda_{11}^a = \cos(180^\circ - a) \quad \lambda_{12}^a = 0$$

$$\lambda_{13}^a = \cos(90^\circ + a)$$

$$\lambda_{21}^a = 0 \quad \lambda_{22}^a = 1 \quad \lambda_{23}^a = 0$$

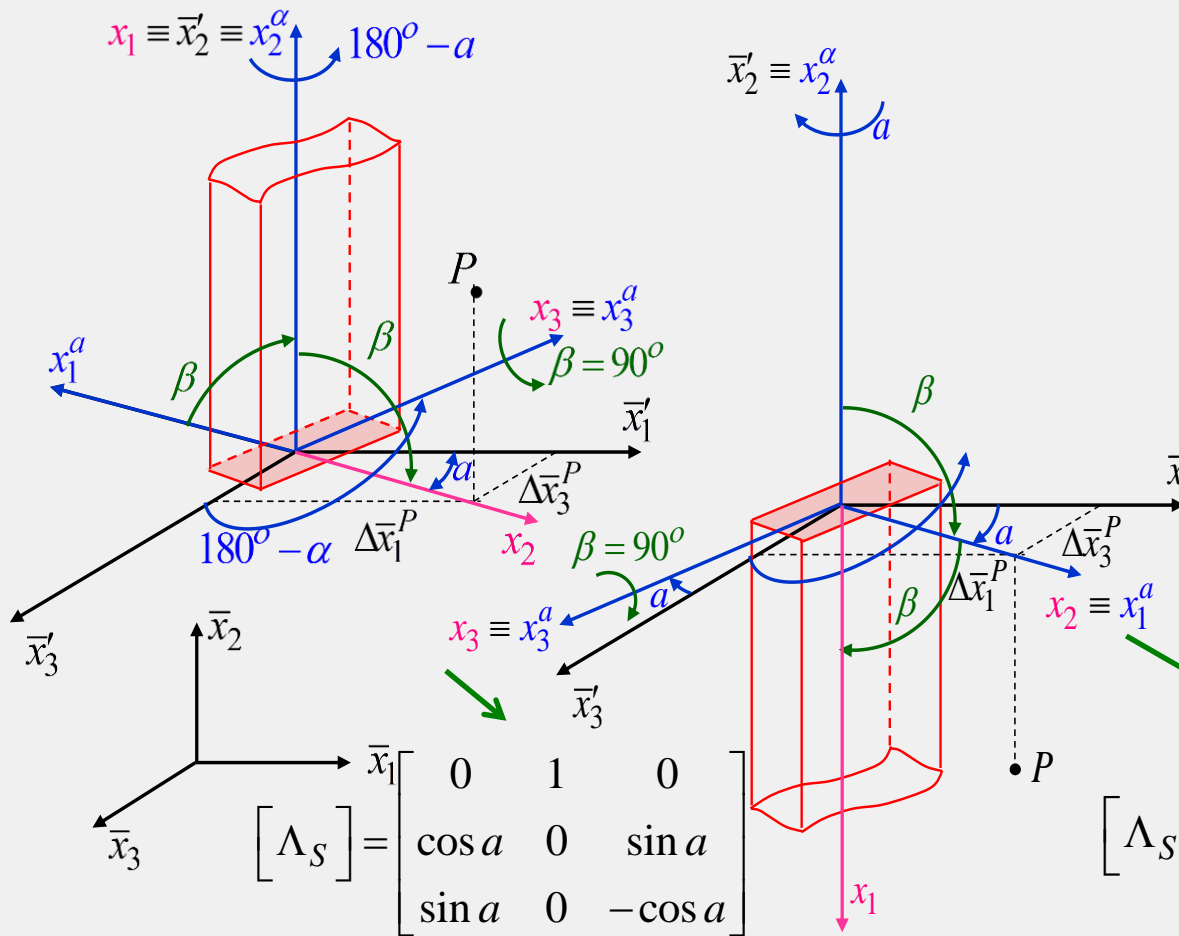
$$\lambda_{31}^a = \cos(90^\circ - a) \quad \lambda_{32}^a = 0$$

$$\lambda_{33}^a = \cos(180^\circ - a)$$

$$[\Lambda^a] = \begin{bmatrix} -\cos a & 0 & -\sin a \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin a & 0 & -\cos a \end{bmatrix}$$

Μητρώο περιστροφής με ειδικό προσανατολισμό

Στην περίπτωση κατά την οποία ο τοπικός άξονας x_1 είναι παράλληλος με τον καθολικό άξονα \bar{x}_2



Δύο διαδοχικές περιστροφές του καθολικού συστήματος αξόνων, οι οποίες είναι τέτοιες ώστε αυτό να συμπίπτει με το τοπικό σύστημα αξόνων.

2η περιστροφή

$$[\Lambda^\beta] \begin{matrix} \lambda_{11}^\beta = 0 & \lambda_{12}^\beta = 1 & \lambda_{13}^\beta = 0 \\ \lambda_{21}^\beta = -1 & \lambda_{22}^\beta = 0 & \lambda_{23}^\beta = 0 \\ \lambda_{31}^\beta = 0 & \lambda_{32}^\beta = 0 & \lambda_{33}^\beta = 1 \end{matrix}$$

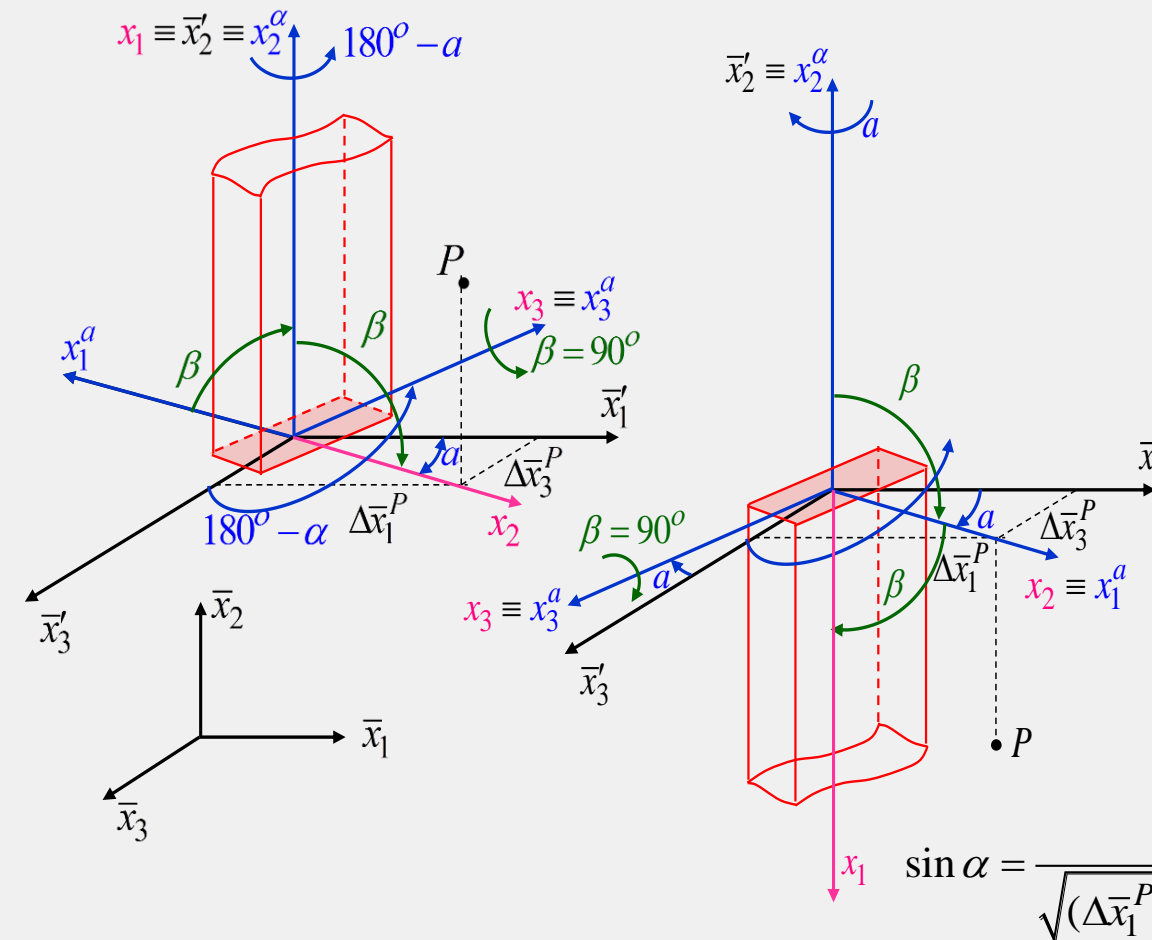
$$[\Lambda_S] = [\Lambda^\beta] [\Lambda^\alpha]$$

$$[\Lambda_S] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \cos a & 0 & \sin a \\ -\sin a & 0 & \cos a \end{bmatrix}$$

Μητρώο περιστροφής με ειδικό προσανατολισμό

Στην περίπτωση κατά την οποία ο τοπικός άξονας x_1 είναι παράλληλος με τον καθολικό άξονα \bar{x}_2

Και για τις δύο προαναφερθείσες περιπτώσεις η συνολική έκφραση του μητρώου περιστροφής στοιχείου ειδικού προσανατολισμού με χρήση του βοηθητικού σημείου P διατυπώνεται ως



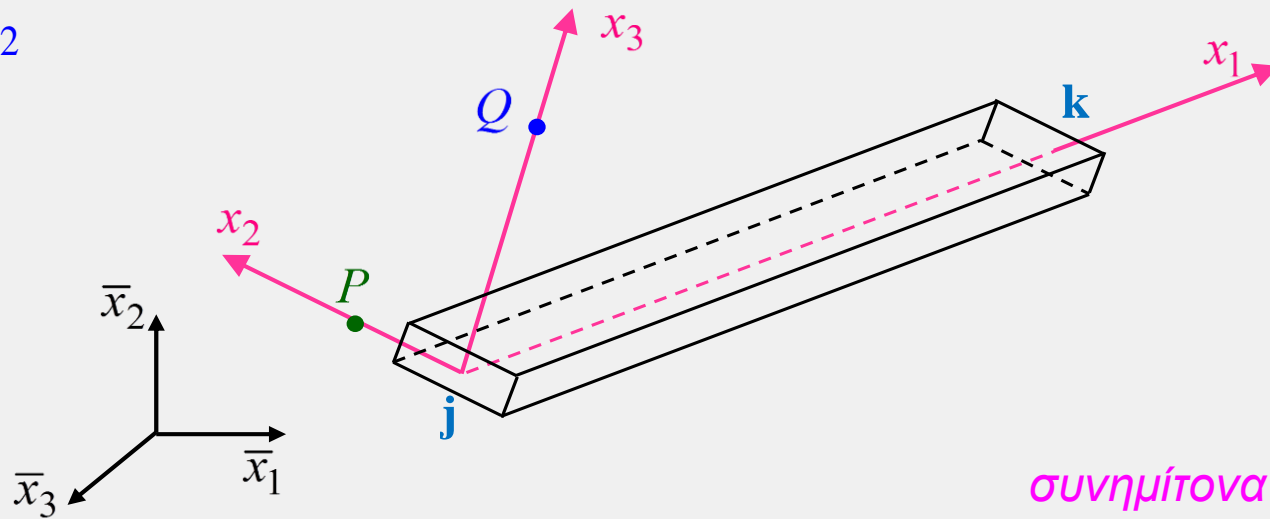
$$[\Lambda_S] = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_{12} & 0 \\ \cos a & 0 & \sin a \\ \lambda_{12} \sin a & 0 & -\lambda_{12} \cos a \end{bmatrix}$$

όπου $\Delta \bar{x}_1^P = \bar{x}_1^P - \bar{x}_1^j$ $\Delta \bar{x}_3^P = \bar{x}_3^P - \bar{x}_3^j$

$$\sin \alpha = \frac{\Delta \bar{x}_3^P}{\sqrt{(\Delta \bar{x}_1^P)^2 + (\Delta \bar{x}_3^P)^2}} \quad \cos \alpha = \frac{\Delta \bar{x}_1^P}{\sqrt{(\Delta \bar{x}_1^P)^2 + (\Delta \bar{x}_3^P)^2}}$$

Μητρώο περιστροφής για ειδικό βοηθητικό σημείο

Στην περίπτωση κατά την οποία το βοηθητικό σημείο P δεν κείται απλά στο επίπεδο x_1, x_2 και προς τα θετικά του άξονα x_2 αλλά **πάνω** στον θετικό άξονα x_2



συνημίτονα κατεύθυνσης του άξονα του στοιχείου (άξονας x_1)

$$\lambda_{11} = \cos \phi_{11} = \Delta \bar{x}_1 / L$$

$$\lambda_{12} = \cos \phi_{12} = \Delta \bar{x}_2 / L$$

$$\lambda_{13} = \cos \phi_{13} = \Delta \bar{x}_3 / L$$

όπου $L = \sqrt{\Delta \bar{x}_1^2 + \Delta \bar{x}_2^2 + \Delta \bar{x}_3^2}$

$$\Delta \bar{x}_m = \bar{x}_m^k - \bar{x}_m^j$$

$m=1,2,3$

$$\Delta \bar{x}_m^P = \bar{x}_m^P - \bar{x}_m^j$$

$m=1,2,3$

συνημίτονα κατεύθυνσης του άξονα x_2 του στοιχείου

$$\lambda_{21} = \cos \phi_{21} = \Delta \bar{x}_1^P / (jP)$$

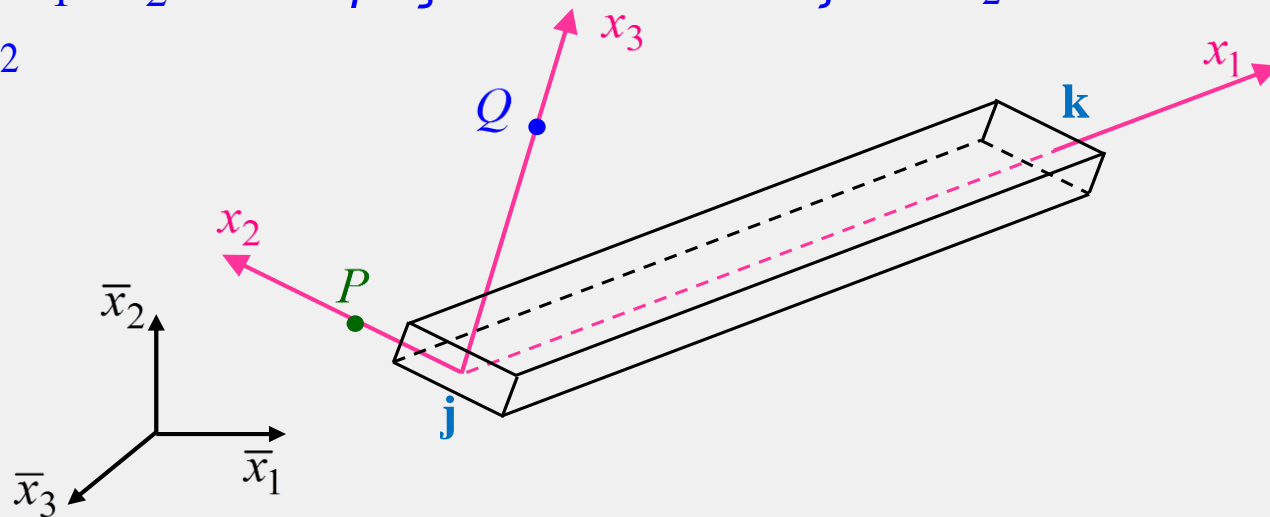
$$\lambda_{22} = \cos \phi_{22} = \Delta \bar{x}_2^P / (jP)$$

$$\lambda_{23} = \cos \phi_{23} = \Delta \bar{x}_3^P / (jP)$$

όπου $(jP) = \sqrt{(\Delta \bar{x}_1^P)^2 + (\Delta \bar{x}_2^P)^2 + (\Delta \bar{x}_3^P)^2}$

Μητρώο περιστροφής για ειδικό βοηθητικό σημείο

Στην περίπτωση κατά την οποία το βοηθητικό σημείο P δεν κείται απλά στο επίπεδο x_1, x_2 και προς τα θετικά του άξονα x_2 αλλά **πάνω** στον θετικό άξονα x_2



Για τον υπολογισμό των συνημιτόνων κατεύθυνσης του άξονα x_3 προσδιορίζεται βοηθητικό σημείο Q του θετικού άξονα x_3 , ως

και επομένως

$$\begin{Bmatrix} \Delta \bar{x}_1^Q \\ \Delta \bar{x}_2^Q \\ \Delta \bar{x}_3^Q \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ \Delta \bar{x}_1 & \Delta \bar{x}_2 & \Delta \bar{x}_3 \\ \Delta \bar{x}_1^P & \Delta \bar{x}_2^P & \Delta \bar{x}_3^P \end{vmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{Bmatrix} \Delta \bar{x}_1^Q \\ \Delta \bar{x}_2^Q \\ \Delta \bar{x}_3^Q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \bar{x}_2 \cdot \Delta \bar{x}_3^P - \Delta \bar{x}_3 \cdot \Delta \bar{x}_2^P \\ -\Delta \bar{x}_1 \cdot \Delta \bar{x}_3^P + \Delta \bar{x}_3 \cdot \Delta \bar{x}_1^P \\ \Delta \bar{x}_1 \cdot \Delta \bar{x}_2^P - \Delta \bar{x}_2 \cdot \Delta \bar{x}_1^P \end{Bmatrix}$$

$$\lambda_{31} = \cos \phi_{31} = \Delta \bar{x}_1^Q / (jQ)$$

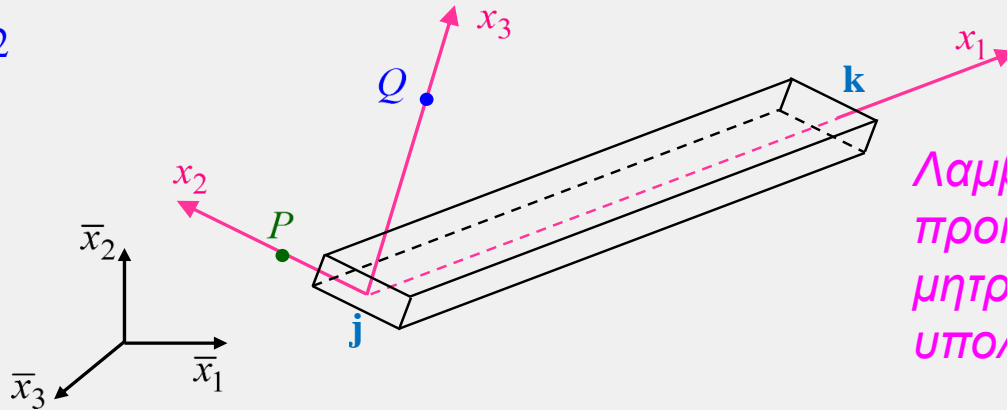
$$\lambda_{32} = \cos \phi_{32} = \Delta \bar{x}_2^Q / (jQ)$$

$$\lambda_{33} = \cos \phi_{33} = \Delta \bar{x}_3^Q / (jQ)$$

όπου $(jQ) = \sqrt{(\Delta \bar{x}_1^Q)^2 + (\Delta \bar{x}_2^Q)^2 + (\Delta \bar{x}_3^Q)^2}$

Μητρώο περιστροφής για ειδικό βοηθητικό σημείο

Στην περίπτωση κατά την οποία το βοηθητικό σημείο P δεν κείται απλά στο επίπεδο x_1, x_2 και προς τα θετικά του άξονα x_2 αλλά **πάνω** στον θετικό άξονα x_2



Λαμβάνοντας υπόψη τις προηγούμενες σχέσεις το βασικό μητρώο περιστροφής $[\Lambda_S]$ υπολογίζεται ως

$$[\Lambda_S] = \begin{bmatrix} \frac{\Delta \bar{x}_1}{\sqrt{\Delta \bar{x}_1^2 + \Delta \bar{x}_2^2 + \Delta \bar{x}_3^2}} & \frac{\Delta \bar{x}_1}{\sqrt{\Delta \bar{x}_1^2 + \Delta \bar{x}_2^2 + \Delta \bar{x}_3^2}} & \frac{\Delta \bar{x}_1}{\sqrt{\Delta \bar{x}_1^2 + \Delta \bar{x}_2^2 + \Delta \bar{x}_3^2}} \\ \frac{\Delta \bar{x}_1^P}{\sqrt{(\Delta \bar{x}_1^P)^2 + (\Delta \bar{x}_2^P)^2 + (\Delta \bar{x}_3^P)^2}} & \frac{\Delta \bar{x}_2^P}{\sqrt{(\Delta \bar{x}_1^P)^2 + (\Delta \bar{x}_2^P)^2 + (\Delta \bar{x}_3^P)^2}} & \frac{\Delta \bar{x}_3^P}{\sqrt{(\Delta \bar{x}_1^P)^2 + (\Delta \bar{x}_2^P)^2 + (\Delta \bar{x}_3^P)^2}} \\ \frac{\Delta \bar{x}_1^Q}{\sqrt{(\Delta \bar{x}_1^Q)^2 + (\Delta \bar{x}_2^Q)^2 + (\Delta \bar{x}_3^Q)^2}} & \frac{\Delta \bar{x}_1^Q}{\sqrt{(\Delta \bar{x}_1^Q)^2 + (\Delta \bar{x}_2^Q)^2 + (\Delta \bar{x}_3^Q)^2}} & \frac{\Delta \bar{x}_1^Q}{\sqrt{(\Delta \bar{x}_1^Q)^2 + (\Delta \bar{x}_2^Q)^2 + (\Delta \bar{x}_3^Q)^2}} \end{bmatrix}$$

Μητρώο μετασχηματισμού ακραίων συνιστωσών στοιχείου χωρικού πλαισίου

$$\left\{ A^i \right\} = \begin{bmatrix} \left\{ A^{ij} \right\} \\ \left\{ A^{ik} \right\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\Lambda_{SF}^{ij} \right] & [0] \\ [0] & \left[\Lambda_{SF}^{ik} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left\{ \bar{A}^{ij} \right\} \\ \left\{ \bar{A}^{ik} \right\} \end{bmatrix} = \left[\Lambda_{SF}^i \right] \left\{ \bar{A}^i \right\}$$

Σχέσεις
μετασχηματισμού για
μέλος χωρικού πλαισίου

$$\left\{ D^i \right\} = \begin{bmatrix} \left\{ D^{ij} \right\} \\ \left\{ D^{ik} \right\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\Lambda_{SF}^{ij} \right] & [0] \\ [0] & \left[\Lambda_{SF}^{ik} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left\{ \bar{D}^{ij} \right\} \\ \left\{ \bar{D}^{ik} \right\} \end{bmatrix} = \left[\Lambda_{SF}^i \right] \left\{ \bar{D}^i \right\}$$

$$\left\{ \bar{A}^i \right\} = \begin{bmatrix} \left\{ \bar{A}^{ij} \right\} \\ \left\{ \bar{A}^{ik} \right\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\Lambda_{SF}^{ij} \right]^T & [0] \\ [0] & \left[\Lambda_{SF}^{ik} \right]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left\{ A^{ij} \right\} \\ \left\{ A^{ik} \right\} \end{bmatrix} = \left[\Lambda_{SF}^i \right]^T \left\{ A^i \right\}$$

$$\left\{ \bar{D}^i \right\} = \begin{bmatrix} \left\{ \bar{D}^{ij} \right\} \\ \left\{ \bar{D}^{ik} \right\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\Lambda_{SF}^{ij} \right]^T & [0] \\ [0] & \left[\Lambda_{SF}^{ik} \right]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left\{ D^{ij} \right\} \\ \left\{ D^{ik} \right\} \end{bmatrix} = \left[\Lambda_{SF}^i \right]^T \left\{ D^i \right\}$$

$$\left[\Lambda_{SF}^i \right] = \begin{bmatrix} \left[\Lambda_S^{ij} \right] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & \left[\Lambda_S^{ij} \right] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & \left[\Lambda_S^{ik} \right] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & \left[\Lambda_S^{ik} \right] \end{bmatrix}$$

Αντίστροφοι
μετασχηματισμοί για
μέλος χωρικού πλαισίου

Παραγωγή μητρώων μετασχηματισμού στοιχείων υπόλοιπων τύπων φορέων

$$\{A^{il}\} = \begin{Bmatrix} F_1^{il} \\ F_2^{il} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{il} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11}^{il} & \lambda_{12}^{il} \\ \lambda_{21}^{il} & \lambda_{22}^{il} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{F}_1^{il} \\ \bar{F}_2^{il} \end{Bmatrix} = [\Lambda_{PT}^{il}] \{\bar{A}^{il}\}$$

Επίπεδο δικτύωμα

$$\{A^{il}\} = \begin{Bmatrix} F_1^{il} \\ F_2^{il} \\ M_3^{il} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11}^{il} & \lambda_{12}^{il} & 0 \\ \lambda_{21}^{il} & \lambda_{22}^{il} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{33}^{il} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{F}_1^{il} \\ \bar{F}_2^{il} \\ \bar{M}_3^{il} \end{Bmatrix} = [\Lambda_{PF}^{il}] \{\bar{A}^{il}\}$$

Επίπεδο πλαίσιο

$$\{A^{il}\} = \begin{Bmatrix} F_1^{il} \\ F_2^{il} \\ F_3^{il} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{il} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11}^{il} & \lambda_{12}^{il} & \lambda_{13}^{il} \\ \lambda_{21}^{il} & \lambda_{22}^{il} & \lambda_{23}^{il} \\ \lambda_{31}^{il} & \lambda_{32}^{il} & \lambda_{33}^{il} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{F}_1^{il} \\ \bar{F}_2^{il} \\ \bar{F}_3^{il} \end{Bmatrix} = [\Lambda_{ST}^{il}] \{\bar{A}^{il}\}$$

Χωρικό δικτύωμα

$$\{A^{il}\} = \begin{Bmatrix} F_3^{il} \\ M_1^{il} \\ M_2^{il} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{33}^{il} = 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{11}^{il} & \lambda_{12}^{il} \\ 0 & \lambda_{21}^{il} & \lambda_{22}^{il} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{F}_3^{il} \\ \bar{M}_1^{il} \\ \bar{M}_2^{il} \end{Bmatrix} = [\Lambda_G^{il}] \{\bar{A}^{il}\}$$

Εσχάρα

Εφαρμογή – Μητρώα μετασχηματισμού μελών πλαisiού

Στοιχεία γεωμετρίας μελών

- Μέλος (1): Μέλος τυχαίου προσανατολισμού
(Σημείο P: $x_1 = 0, x_2 = 0.125, x_3 = 0 \Leftrightarrow \bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = 0.125, \bar{x}_3 = 0$)

$$\Delta\bar{x}_1 = 0 - 0 = 0, \Delta\bar{x}_2 = 0 - 0 = 0, \Delta\bar{x}_3 = 4 - 0 = 4,$$

$$L = \sqrt{(\Delta\bar{x}_1)^2 + (\Delta\bar{x}_2)^2 + (\Delta\bar{x}_3)^2} = 4$$

$$\lambda_{11} = \Delta\bar{x}_1 / L = 0, \lambda_{12} = \Delta\bar{x}_2 / L = 0, \lambda_{13} = \Delta\bar{x}_3 / L = 1$$

$$\Delta\bar{x}_1^P = 0 - 0 = 0, \Delta\bar{x}_2^P = 0.125 - 0 = 0.125, \Delta\bar{x}_3^P = 0 - 0 = 0$$

$$\sin \alpha = 1 / \sqrt{0+1} = 1, \cos \alpha = 0, \sin \beta = 0, \cos \beta = 1$$

$$x_1^{P\beta} = 0, x_2^{P\beta} = 0.125, x_3^{P\beta} = 0, \sin \psi = 0, \cos \psi = 1$$

Εφαρμογή – Μητρώα μετασχηματισμού μελών πλαισίου

Στοιχεία γεωμετρίας μελών

- Μέλος (2): Μέλος ειδικού προσανατολισμού

$$\Delta \bar{x}_1 = 0, \Delta \bar{x}_2 = 4, \Delta \bar{x}_3 = 0, \lambda_{12} = \Delta \bar{x}_2 / L = 1$$

$$\Delta \bar{x}_1^P = -0.18, \Delta \bar{x}_2^P = 2, \Delta \bar{x}_3^P = 0.18, \sin \alpha = 0.707, \cos \alpha = 0$$

- Μέλος (3): Μέλος τυχαίου προσανατολισμού

$$\text{Σημείο } P: x_1 = 0, x_2 = 0.125, x_3 = 0 \Leftrightarrow \bar{x}_1 = 4, \bar{x}_2 = 4.125, \bar{x}_3 = 0)$$

$$\Delta \bar{x}_1 = -4, \Delta \bar{x}_2 = 0, \Delta \bar{x}_3 = 4$$

$$\lambda_{11} = \Delta \bar{x}_1 / L = -0.707, \lambda_{12} = \Delta \bar{x}_2 / L = 0.0, \lambda_{13} = \Delta \bar{x}_3 / L = 0.707$$

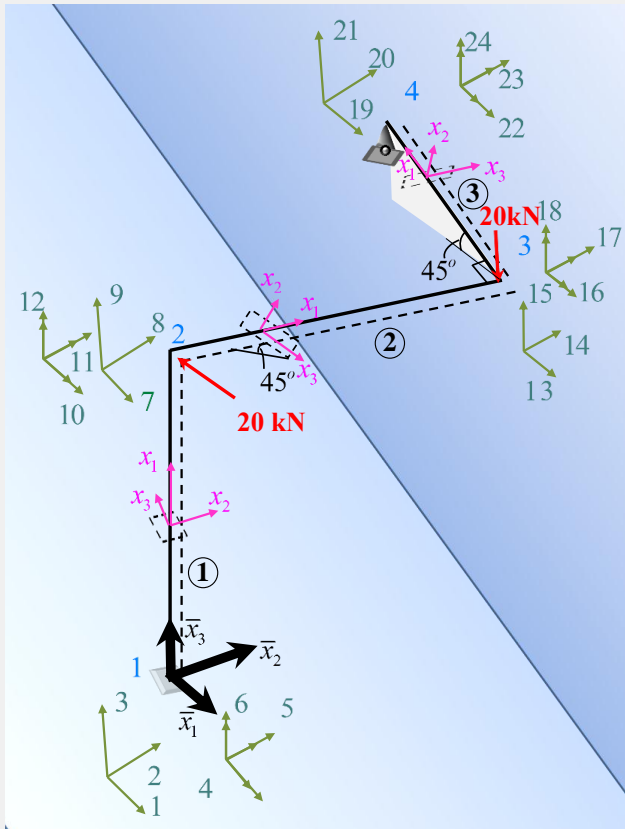
$$\Delta \bar{x}_1^P = 0.0, \Delta \bar{x}_2^P = 0.0, \Delta \bar{x}_3^P = 0.125$$

$$\sin \alpha = 0.707, \cos \alpha = -0.707, \sin \beta = 0.0, \cos \beta = 1.0$$

$$x_1^{P\beta} = 0.088, x_2^{P\beta} = 0.0, x_3^{P\beta} = -0.088, \sin \psi = -1.0, \cos \psi = 0.0$$

Εφαρμογή – Μητρώα μετασχηματισμού μελών πλαισίου

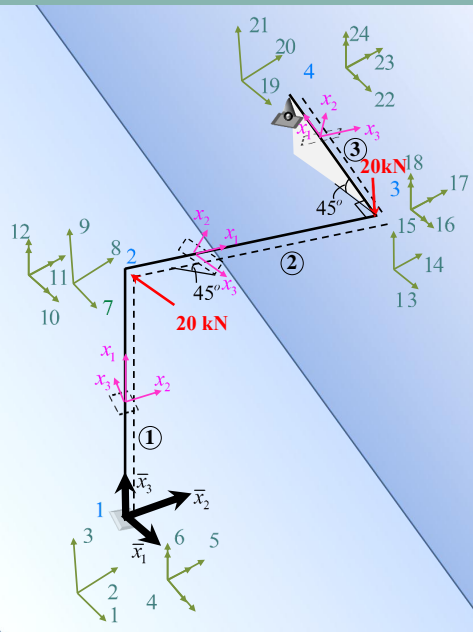
Εφαρμόζοντας τα προηγούμενα δεδομένα υπολογίζονται τα **μητρώα μετασχηματισμού** των μελών του πλαισίου ως



Μέλος 1

$$[\Lambda_{SF}^1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Εφαρμογή – Μητρώα μετασχηματισμού μελών πλαισίου



Εφαρμόζοντας τα προηγούμενα δεδομένα υπολογίζονται τα **μητρώα μετασχηματισμού** των μελών του πλαισίου ως

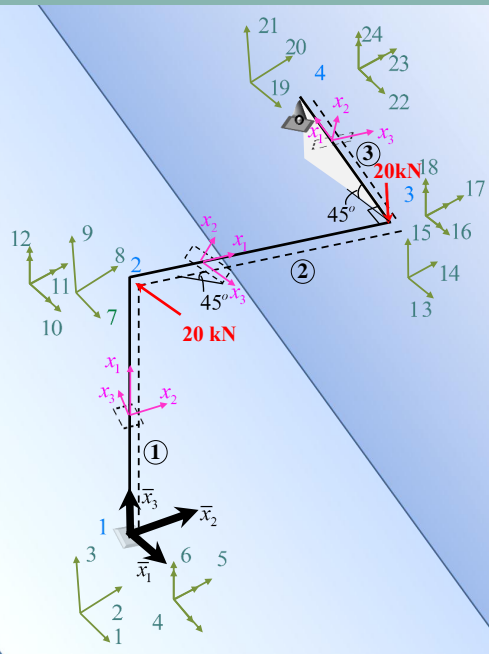
Μέλος 2

$$[\Lambda_{SF}^2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.707 & 0 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.707 & 0 & -0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0 & -0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0 & 0.707 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0 & -0.707 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0 & 0.707 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0 & -0.707 \end{bmatrix}$$

Εφαρμογή – Μητρώα μετασχηματισμού μελών πλαισίου

Εφαρμόζοντας τα προηγούμενα δεδομένα υπολογίζονται τα **μητρώα μετασχηματισμού** των μελών του πλαισίου ως

Μέλος 3



$$[\Lambda_{SF}^3] =$$

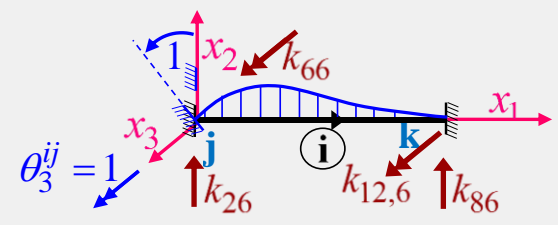
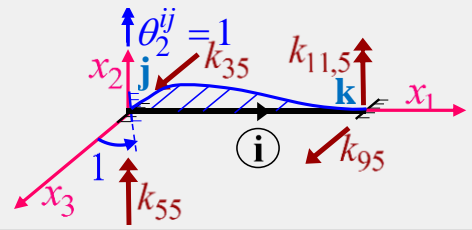
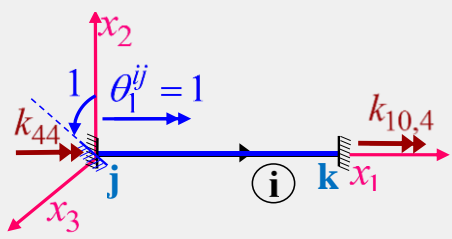
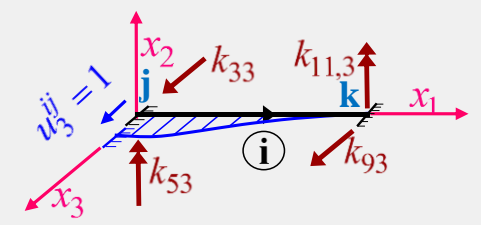
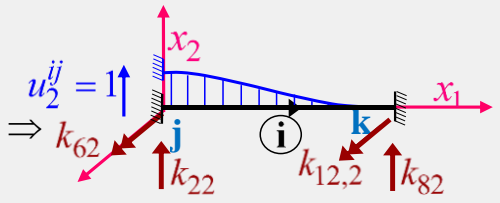
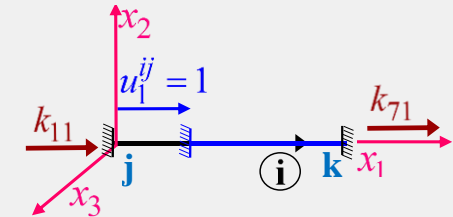
-0.707	0	0.707	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.707	0	0.707	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-0.707	0	0.707	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0.707	0	0.707	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-0.707	0	0.707	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0.707	0	0.707	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.707	0	0.707
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.707	0	0.707
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

ΤΟΠΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΧΩΡΙΚΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Δομή μητρώου στιβαρότητας – Δείκτες στιβαρότητας

Μοναδιαίες μετακινήσεις στο άκρο j

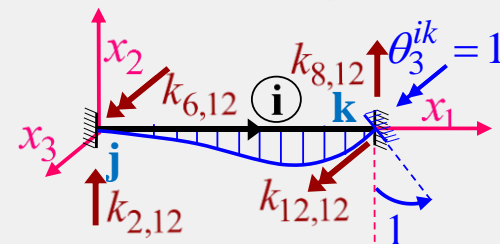
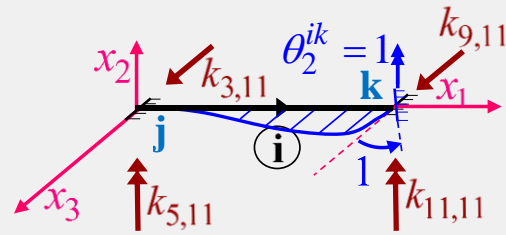
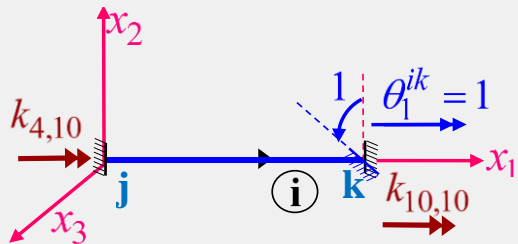
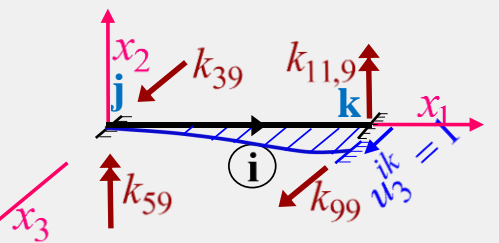
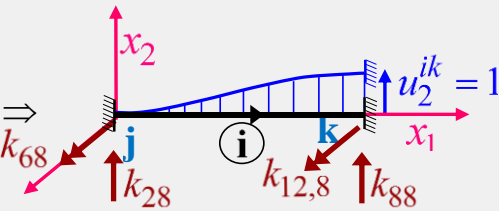
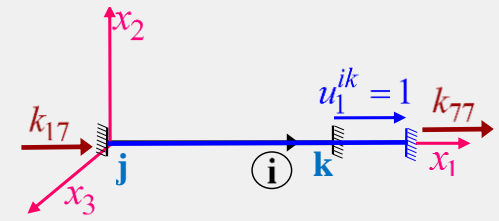
F_1^{ij}	k_{11}^i	0	0	0	0	0	k_{17}^i	0	0	0	0	0	u_1^{ij}
F_2^{ij}	0	k_{22}^i	0	0	0	k_{26}^i	0	k_{28}^i	0	0	0	$k_{2,12}^i$	u_2^{ij}
F_3^{ij}	0	0	k_{33}^i	0	k_{35}^i	0	0	0	k_{39}^i	0	$k_{3,11}^i$	0	u_3^{ij}
M_1^{ij}	0	0	0	k_{44}^i	0	0	0	0	0	$k_{4,10}^i$	0	0	g_1^{ij}
M_2^{ij}	0	0	0	k_{53}^i	0	k_{55}^i	0	0	k_{59}^i	0	$k_{5,11}^i$	0	g_2^{ij}
M_3^{ij}	0	k_{62}^i	0	0	0	k_{66}^i	0	k_{68}^i	0	0	0	$k_{6,12}^i$	g_3^{ij}
F_1^{ik}	k_{71}^i	0	0	0	0	0	k_{77}^i	0	0	0	0	0	u_1^{ik}
F_2^{ik}	0	k_{82}^i	0	0	0	k_{86}^i	0	k_{88}^i	0	0	0	$k_{8,12}^i$	u_2^{ik}
F_3^{ik}	0	0	k_{93}^i	0	k_{95}^i	0	0	0	k_{99}^i	0	$k_{9,11}^i$	0	u_3^{ik}
M_1^{ik}	0	0	0	$k_{10,4}^i$	0	0	0	0	0	$k_{10,10}^i$	0	0	g_1^{ik}
M_2^{ik}	0	0	0	$k_{11,3}^i$	0	$k_{11,5}^i$	0	0	$k_{11,9}^i$	0	$k_{11,11}^i$	0	g_2^{ik}
M_3^{ik}	0	$k_{12,2}^i$	0	0	0	$k_{12,6}^i$	0	$k_{12,8}^i$	0	0	0	$k_{12,12}^i$	g_3^{ik}



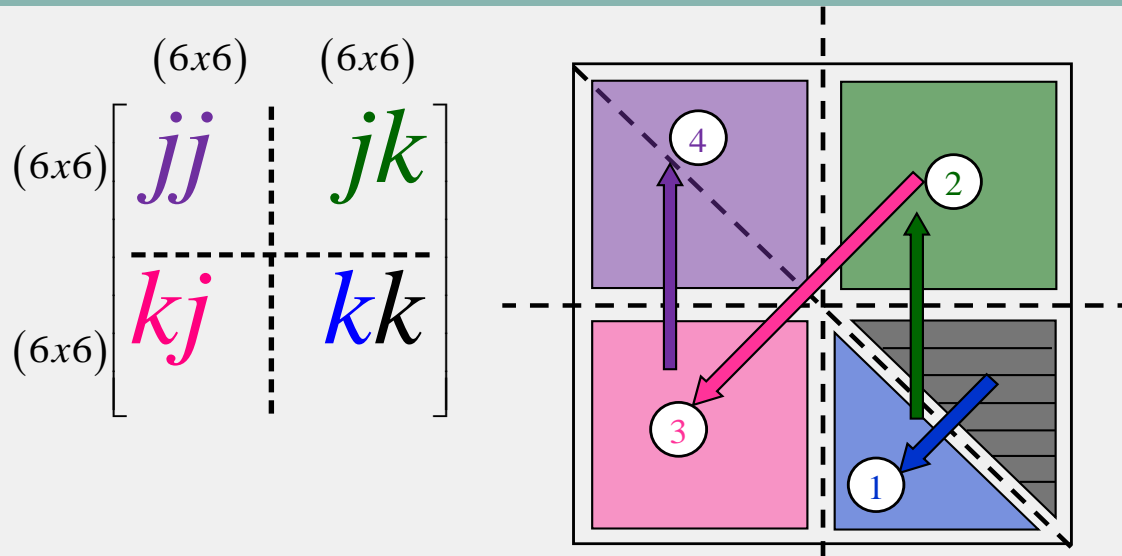
Δομή μητρώου στιβαρότητας – Δείκτες στιβαρότητας

Μοναδιαίες μετακινήσεις στο άκρο k

$$\begin{Bmatrix} F_1^{ij} \\ F_2^{ij} \\ F_3^{ij} \\ M_1^{ij} \\ M_2^{ij} \\ M_3^{ij} \\ F_1^{ik} \\ F_2^{ik} \\ F_3^{ik} \\ M_1^{ik} \\ M_2^{ik} \\ M_3^{ik} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{17}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22}^i & 0 & 0 & 0 & k_{26}^i & 0 & k_{28}^i & 0 & 0 & 0 & k_{2,12}^i \\ 0 & 0 & k_{33}^i & 0 & k_{35}^i & 0 & 0 & 0 & k_{39}^i & 0 & k_{3,11}^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{44}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{4,10}^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{53}^i & 0 & k_{55}^i & 0 & 0 & 0 & k_{59}^i & 0 & k_{5,11}^i & 0 \\ 0 & k_{62}^i & 0 & 0 & 0 & k_{66}^i & 0 & k_{68}^i & 0 & 0 & 0 & k_{6,12}^i \\ \hline k_{71}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{77}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{82}^i & 0 & 0 & 0 & k_{86}^i & 0 & k_{88}^i & 0 & 0 & 0 & k_{8,12}^i \\ 0 & 0 & k_{93}^i & 0 & k_{95}^i & 0 & 0 & 0 & k_{99}^i & 0 & k_{9,11}^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{10,4}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{10,10}^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{11,3}^i & 0 & k_{11,5}^i & 0 & 0 & 0 & k_{11,9}^i & 0 & k_{11,11}^i & 0 \\ 0 & k_{12,2}^i & 0 & 0 & 0 & k_{12,6}^i & 0 & k_{12,8}^i & 0 & 0 & 0 & k_{12,12}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{ij} \\ u_2^{ij} \\ u_3^{ij} \\ g_1^{ij} \\ g_2^{ij} \\ g_3^{ij} \\ u_1^{ik} \\ u_2^{ik} \\ u_3^{ik} \\ g_1^{ik} \\ g_2^{ik} \\ g_3^{ik} \end{Bmatrix}$$



Δομή μητρώου στιβαρότητας – Δείκτες στιβαρότητας



Για τον υπολογισμό των δεικτών στιβαρότητας απαιτούνται μόνο οι δείκτες του διαγραμμισμένου κάτω τριγωνικού υπομητρώου.

Οι δείκτες $K_{12,8}$ και $K_{11,9}$ προκύπτουν από τη συμμετρία του μητρώου στιβαρότητας, η οποία διατηρείται στο διαγώνιο υπομητρώο (kk) (1). Οι δείκτες του υπομητρώου (jk) (2) εκφράζουν τις δράσεις παγίωσης (αντιδράσεις) στο άκρο j των περιπτώσεων που προαναφέρθηκαν και προκύπτουν συναρτήσεως των ήδη γνωστών δράσεων του άκρου k από τη θεώρηση της ισορροπίας των δράσεων των στοιχείων. Οι δείκτες στιβαρότητας του υπομητρώου (kj) (3) ισούνται με τους αντίστοιχους δείκτες του υπομητρώου (jk) λόγω συμμετρίας. Τέλος οι δείκτες του διαγώνιου υπομητρώου (jj) (4) είναι οι δράσεις παγίωσης του άκρου j και υπολογίζονται από τις συνθήκες ισορροπίας.

Δομή μητρώου στιβαρότητας – Δείκτες στιβαρότητας

Λαμβάνοντας υπόψη τα προαναφερθέντα, δηλαδή την εφαρμογή των συνθηκών συμμετρίας και ισορροπίας, **το μητρώο στιβαρότητας στοιχείου χωρικού πλαισίου** μπορεί να γραφεί με την ακόλουθη μορφή, όπου όλοι οι δείκτες στιβαρότητας έχουν εκφραστεί συναρτήσει των δεικτών του άνω τριγωνικού υπομητρώου (kk)

$$[k^i] = \begin{bmatrix} k_{77}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{77}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{88}^i & 0 & 0 & 0 & k_{12,8}^i + Lk_{8,8}^i & 0 & -k_{88}^i & 0 & 0 & 0 & -k_{12,8}^i \\ 0 & 0 & k_{99}^i & 0 & k_{11,9}^i - Lk_{9,9}^i & 0 & 0 & 0 & -k_{99}^i & 0 & -k_{11,9}^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{10,10}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{10,10}^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{11,9}^i - Lk_{9,9}^i & 0 & k_{11,11}^i - 2Lk_{12,8}^i + L^2 k_{8,8}^i & 0 & 0 & 0 & -k_{11,9}^i + Lk_{9,9}^i & 0 & -k_{11,11}^i + Lk_{11,9}^i & 0 \\ 0 & k_{12,8}^i - Lk_{8,8}^i & 0 & 0 & 0 & k_{12,12}^i - 2Lk_{11,9}^i + L^2 k_{9,9}^i & 0 & -k_{12,8}^i - Lk_{8,8}^i & 0 & 0 & 0 & -k_{12,12}^i - Lk_{12,8}^i \\ \hline -k_{77}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{77}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_{88}^i & 0 & 0 & 0 & -k_{12,8}^i - Lk_{8,8}^i & 0 & k_{88}^i & 0 & 0 & 0 & k_{12,8}^i \\ 0 & 0 & -k_{99}^i & 0 & -k_{11,9}^i + Lk_{9,9}^i & 0 & 0 & 0 & k_{99}^i & 0 & k_{11,9}^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_{10,10}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{10,10}^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{11,9}^i & 0 & -k_{11,11}^i + Lk_{11,9}^i & 0 & 0 & 0 & k_{11,9}^i & 0 & k_{11,11}^i & 0 \\ 0 & -k_{12,8}^i & 0 & 0 & 0 & -k_{12,12}^i - Lk_{12,8}^i & 0 & k_{12,8}^i & 0 & 0 & 0 & k_{12,12}^i \end{bmatrix}$$

Μητρώο στιβαρότητας μέλους χωρικού πλαισίου σταθερής διατομής

Λαμβάνοντας υπόψη τις εκφράσεις των δεικτών και τη δομή του μητρώου στιβαρότητας, **το τοπικό μητρώο στιβαρότητας μέλους χωρικού πλαισίου σταθερής διατομής, από ισότροπο, γραμμικώς ελαστικό υλικό λαμβάνει τη μορφή**

$$[k^i] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_3}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_3}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_3}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_3}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_2}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_2}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_2}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_2}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_2}{L^2} & 0 & \frac{4EI_2}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_2}{L^2} & 0 & \frac{2EI_2}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_3}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_3}{L} & 0 & -\frac{6EI_3}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_3}{L} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_3}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_3}{L^2} & 0 & \frac{12EI_3}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_3}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_2}{L^3} & 0 & \frac{6EI_2}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_2}{L^3} & 0 & \frac{6EI_2}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_2}{L^2} & 0 & \frac{2EI_2}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_2}{L^2} & 0 & \frac{4EI_2}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_3}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_3}{L} & 0 & -\frac{6EI_3}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_3}{L} \end{bmatrix}$$

Παραγωγή τοπικών μητρώων στιβαρότητας στοιχείων υπόλοιπων τύπων φορέων

$$[k^i] = \begin{bmatrix} [k_{jj}^i] & [k_{jk}^i] \\ [k_{kj}^i] & [k_{kk}^i] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & -\frac{E^i A^i}{L^i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & \frac{E^i A^i}{L^i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επίπεδο δικτύωμα

$$[k^i] = \begin{bmatrix} [k_{jj}^i] & [k_{jk}^i] \\ [k_{kj}^i] & [k_{kk}^i] \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A^i E^i / L^i & 0 & 0 & -A^i E^i / L^i & 0 & 0 \\ 0 & 12E^i I^i / L^{i3} & 6E^i I^i / L^{i2} & 0 & -12E^i I^i / L^{i3} & 6E^i I^i / L^{i2} \\ 0 & 6E^i I^i / L^{i2} & 4E^i I^i / L^i & 0 & -6E^i I^i / L^{i2} & 2E^i I^i / L^i \\ -A^i E^i / L^i & 0 & 0 & A^i E^i / L^i & 0 & 0 \\ 0 & -12E^i I^i / L^{i3} & -6E^i I^i / L^{i2} & 0 & 12E^i I^i / L^{i3} & -6E^i I^i / L^{i2} \\ 0 & 6E^i I^i / L^{i2} & 2E^i I^i / L^i & 0 & -6E^i I^i / L^{i2} & 4E^i I^i / L^i \end{bmatrix}$$

**Επίπεδο
πλαίσιο**

Παραγωγή τοπικών μητρώων στιβαρότητας στοιχείων υπόλοιπων τύπων φορέων

$$[k^i] = \begin{bmatrix} [k_{jj}^i] & [k_{jk}^i] \\ [k_{kj}^i] & [k_{kk}^i] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & -\frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & \frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

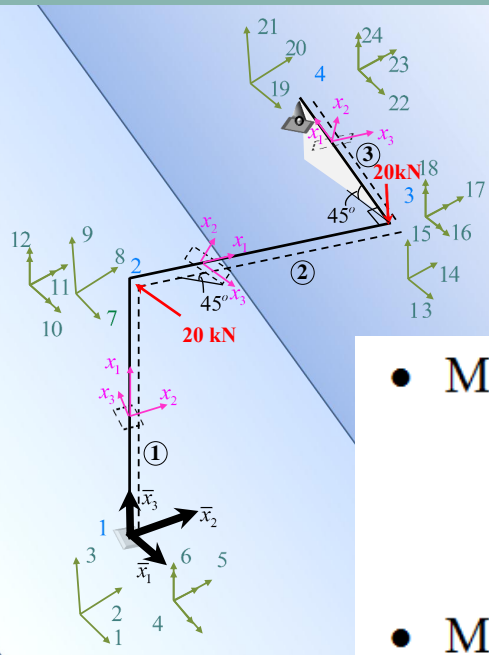
Χωρικό δικτύωμα

$$[k^i] = \begin{bmatrix} [k_{jj}^i] & [k_{jk}^i] \\ [k_{kj}^i] & [k_{kk}^i] \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 12E^i I_2^i / L^{i3} & 0 & -6E^i I_2^i / L^{i2} & -12E^i I_2^i / L^{i3} & 0 & -6E^i I_2^i / L^{i2} \\ 0 & G^i I_1^i / L^i & 0 & 0 & -G^i I_1^i / L^i & 0 \\ -6E^i I_2^i / L^{i2} & 0 & 4E^i I_2^i / L^i & 6E^i I_2^i / L^{i2} & 0 & 2E^i I_2^i / L^i \\ -12E^i I_2^i / L^{i3} & 0 & 6E^i I_2^i / L^{i2} & 12E^i I_2^i / L^{i3} & 0 & 6E^i I_2^i / L^{i2} \\ 0 & -G^i I_1^i / L^i & 0 & 0 & G^i I_1^i / L^i & 0 \\ -6E^i I_2^i / L^{i2} & 0 & 2E^i I_2^i / L^i & 6E^i I_2^i / L^{i2} & 0 & 4E^i I_2^i / L^i \end{bmatrix}$$

Εσχάρα

Εφαρμογή – Τοπικά μητρώα στιβαρότητας μελών χωρικού πλαισίου



Στοιχεία γεωμετρίας και υλικού μελών

- Μέλος (1) : $E^1 = 30 \times 10^6 \text{ kN} / \text{m}^2$, $A^1 = 0.125 \text{ m}^2$, $L^1 = 4.0 \text{ m}$
 $G^1 = 1.25 \times 10^7 \text{ kN} / \text{m}^2$, $I_1^1 = 1.79 \times 10^{-3} \text{ m}^4$, $I_2^1 = 2.6 \times 10^{-3} \text{ m}^4$,
 $I_3^1 = 6.51 \times 10^{-4} \text{ m}^4$
- Μέλος (2) : $E^2 = 30 \times 10^6 \text{ kN} / \text{m}^2$, $A^2 = 0.125 \text{ m}^2$, $L^2 = 4.0 \text{ m}$
 $G^2 = 1.25 \times 10^7 \text{ kN} / \text{m}^2$, $I_1^2 = 1.79 \times 10^{-3} \text{ m}^4$, $I_2^2 = 2.6 \times 10^{-3} \text{ m}^4$,
 $I_3^2 = 6.51 \times 10^{-4} \text{ m}^4$
- Μέλος (3) : $E^3 = 30 \times 10^6 \text{ kN} / \text{m}^2$, $A^3 = 0.125 \text{ m}^2$, $L^3 = 5.657 \text{ m}$
 $G^3 = 1.25 \times 10^7 \text{ kN} / \text{m}^2$, $I_1^3 = 1.79 \times 10^{-3} \text{ m}^4$, $I_2^3 = 2.6 \times 10^{-3} \text{ m}^4$,
 $I_3^3 = 6.51 \times 10^{-4} \text{ m}^4$

Εφαρμογή – Τοπικά μητρώα στιβαρότητας μελών χωρικού πλαισίου

Μέλος 1 =
=Μέλος 2

$[k^1] = [k^2] =$

937500.00	0	0	0	0	0	-937500.00	0	0	0	0	0
0	3662.11	0	0	0	7324.22	0	-3662.11	0	0	0	7324.22
0	0	14648.44	0	-29296.88	0	0	0	-14648.44	0	-29296.88	0
0	0	0	5587.50	0	0	0	0	0	-5587.50	0	0
0	0	-29296.88	0	78125.00	0	0	0	29296.88	0	39062.50	0
0	7324.22	0	0	0	19531.25	0	-7324.22	0	0	0	9765.63
-937500.00	0	0	0	0	0	937500.00	0	0	0	0	0
0	-3662.11	0	0	0	-7324.22	0	3662.11	0	0	0	-7324.22
0	0	-14648.44	0	29296.88	0	0	0	14648.44	0	29296.88	0
0	0	0	-5587.50	0	0	0	0	0	5587.50	0	0
0	0	-29296.88	0	39062.50	0	0	0	29296.88	0	78125.00	0
0	7324.22	0	0	0	9765.63	0	-7324.22	0	0	0	19531.25

$[k^3] =$

Μέλος 3

662907.2	0	0	0	0	0	-662907.2	0	0	0	0	0
0	1294.7	0	0	0	3662.1	0	-1294.7	0	0	0	3662.1
0	0	5178.9	0	-14648.2	0	0	0	-5178.9	0	-14648.2	0
0	0	0	3950.9	0	0	0	0	0	-3950.9	0	0
0	0	-14648.2	0	55242.3	0	0	0	14648.2	0	27621.1	0
0	3662.1	0	0	0	13810.6	0	-3662.1	0	0	0	6905.3
-662907.2	0	0	0	0	0	662907.2	0	0	0	0	0
0	-1294.7	0	0	0	-3662.1	0	1294.7	0	0	0	-3662.1
0	0	-5178.9	0	14648.2	0	0	0	5178.9	0	14648.2	0
0	0	0	-3950.9	0	0	0	0	0	3950.9	0	0
0	0	-14648.2	0	27621.1	0	0	0	14648.2	0	55242.3	0
0	3662.1	0	0	0	6905.3	0	-3662.1	0	0	0	13810.6

ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΧΩΡΙΚΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΧΩΡΙΚΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

$$\begin{bmatrix} \left\{ \bar{A}^{ij} \right\} \\ \left\{ \bar{A}^{ik} \right\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\bar{k}_{jj}^i \right] & \left[\bar{k}_{jk}^i \right] \\ \left[\bar{k}_{kj}^i \right] & \left[\bar{k}_{kk}^i \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left\{ \bar{D}^{ij} \right\} \\ \left\{ \bar{D}^{ik} \right\} \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \bar{A}^i \right\} = \left[\bar{k}^i \right] \left\{ \bar{D}^i \right\}$$

Αντικαθιστώντας στην τοπική σχέση στιβαρότητας, τις σχέσεις των ακραίων δράσεων και μετακινήσεων στο τοπικό σύστημα αξόνων συναρτήσει αυτών στο καθολικό και λαμβάνοντας υπ' όψη την ορθοκανονικότητα των μητρώων μετασχηματισμού προκύπτει ότι

$$\left\{ A^i \right\} = \left[k^i \right] \left\{ D^i \right\}$$

$$\left\{ A^i \right\} = \begin{bmatrix} \left\{ A^{ij} \right\} \\ \left\{ A^{ik} \right\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\Lambda_{SF}^{ij} \right] & [0] \\ [0] & \left[\Lambda_{SF}^{ik} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left\{ \bar{A}^{ij} \right\} \\ \left\{ \bar{A}^{ik} \right\} \end{bmatrix} = \left[\Lambda_{SF}^i \right] \left\{ \bar{A}^i \right\}$$

$$\left\{ D^i \right\} = \begin{bmatrix} \left\{ D^{ij} \right\} \\ \left\{ D^{ik} \right\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\Lambda_{SF}^{ij} \right] & [0] \\ [0] & \left[\Lambda_{SF}^{ik} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left\{ \bar{D}^{ij} \right\} \\ \left\{ \bar{D}^{ik} \right\} \end{bmatrix} = \left[\Lambda_{SF}^i \right] \left\{ \bar{D}^i \right\}$$

$$\left\{ \bar{A}^i \right\} = \left[\Lambda_{SF}^i \right]^T \left[k^i \right] \left[\Lambda_{SF}^i \right] \left\{ \bar{D}^i \right\}$$

ή

$$\left[\bar{k}^i \right] = \left[\Lambda_{SF}^i \right]^T \left[k^i \right] \left[\Lambda_{SF}^i \right]$$

Εφαρμογή – Καθολικά μητρώα στιβαρότητας μελών χωρικού πλαισίου

Μέλος 1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	14648.44	0.00	0.00	0.00	29296.88	0.00	-14648.44	0.00	0.00	0.00	29296.88	0.00
2	0.00	3662.11	0.00	-7324.22	0.00	0.00	0.00	-3662.11	0.00	-7324.22	0.00	0.00
3	0.00	0.00	937500.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-937500.00	0.00	0.00	0.00
4	0.00	-7324.22	0.00	19531.25	0.00	0.00	0.00	7324.22	0.00	9765.63	0.00	0.00
5	29296.88	0.00	0.00	0.00	78125.00	0.00	-29296.88	0.00	0.00	0.00	39062.50	0.00
6	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	5587.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-5587.50
7	-14648.44	0.00	0.00	0.00	-29296.88	0.00	14648.44	0.00	0.00	0.00	-29296.88	0.00
8	0.00	-3662.11	0.00	7324.22	0.00	0.00	0.00	3662.11	0.00	7324.22	0.00	0.00
9	0.00	0.00	-937500.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	937500.00	0.00	0.00	0.00
10	0.00	-7324.22	0.00	9765.63	0.00	0.00	0.00	7324.22	0.00	19531.25	0.00	0.00
11	29296.88	0.00	0.00	0.00	39062.50	0.00	-29296.88	0.00	0.00	0.00	78125.00	0.00
12	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-5587.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	5587.50

Μέλος 2

	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
7	9155.27	0.00	-5493.16	-10986.33	0.00	-18310.55	-9155.27	0.00	5493.16	-10986.33	0.00	-18310.55
8	0.00	937500.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-937500.00	0.00	0.00	0.00	0.00
9	-5493.16	0.00	9155.27	18310.55	0.00	10986.33	5493.16	0.00	-9155.27	18310.55	0.00	10986.33
10	-10986.33	0.00	18310.55	48828.13	0.00	29296.88	10986.33	0.00	-18310.55	24414.06	0.00	14648.44
11	0.00	0.00	0.00	0.00	5587.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-5587.50	0.00
12	-18310.55	0.00	10986.33	29296.88	0.00	48828.13	18310.55	0.00	-10986.33	14648.44	0.00	24414.06
13	-9155.27	0.00	5493.16	10986.33	0.00	18310.55	9155.27	0.00	-5493.16	10986.33	0.00	18310.55
14	0.00	-937500.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	937500.00	0.00	0.00	0.00	0.00
15	5493.16	0.00	-9155.27	-18310.55	0.00	-10986.33	-5493.16	0.00	9155.27	-18310.55	0.00	-10986.33
16	-10986.33	0.00	18310.55	24414.06	0.00	14648.44	10986.33	0.00	-18310.55	48828.13	0.00	29296.88
17	0.00	0.00	0.00	0.00	-5587.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	5587.50	0.00
18	-18310.55	0.00	10986.33	14648.44	0.00	24414.06	18310.55	0.00	-10986.33	29296.88	0.00	48828.13

Εφαρμογή – Καθολικά μητρώα στιβαρότητας μελών πλαισίου

Μέλος 3

	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
13	332100.98	0.00	-330806.26	0.00	2589.46	0.00	-332100.98	0.00	330806.26	0.00	2589.46	0.00
14	0.00	5178.88	0.00	-10357.84	0.00	-10357.84	0.00	-5178.88	0.00	-10357.84	0.00	-10357.84
15	-330806.26	0.00	332100.98	0.00	2589.46	0.00	330806.26	0.00	-332100.98	0.00	2589.46	0.00
16	0.00	-10357.84	0.00	29596.60	0.00	25645.67	0.00	10357.84	0.00	11835.10	0.00	15786.03
17	2589.46	0.00	2589.46	0.00	13810.57	0.00	-2589.46	0.00	-2589.46	0.00	6905.28	0.00
18	0.00	-10357.84	0.00	25645.67	0.00	29596.60	0.00	10357.84	0.00	15786.03	0.00	11835.10
19	-332100.98	0.00	330806.26	0.00	-2589.46	0.00	332100.98	0.00	-330806.26	0.00	-2589.46	0.00
20	0.00	-5178.88	0.00	10357.84	0.00	10357.84	0.00	5178.88	0.00	10357.84	0.00	10357.84
21	330806.26	0.00	-332100.98	0.00	-2589.46	0.00	-330806.26	0.00	332100.98	0.00	-2589.46	0.00
22	0.00	-10357.84	0.00	11835.10	0.00	15786.03	0.00	10357.84	0.00	29596.60	0.00	25645.67
23	2589.46	0.00	2589.46	0.00	6905.28	0.00	-2589.46	0.00	-2589.46	0.00	13810.57	0.00
24	0.00	-10357.84	0.00	15786.03	0.00	11835.10	0.00	10357.84	0.00	25645.67	0.00	29596.60

όπου με κόκκινους αριθμούς έχουν σημειωθεί οι βαθμοί ελευθερίας (των ακραίων δράσεων σε κατακόρυφη στήλη και των ακραίων μετακινήσεων σε οριζόντια στήλη) των κόμβων του πλαισίου που συνδέει το μέλος.

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΕΠΙΚΟΜΒΙΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ ΧΩΡΙΚΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΕΠΙΚΟΜΒΙΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ ΧΩΡΙΚΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Συνιστώσες των επικόμβιων δράσεων και επικόμβιων μετακινήσεων των N κόμβων χωρικού πλαισίου

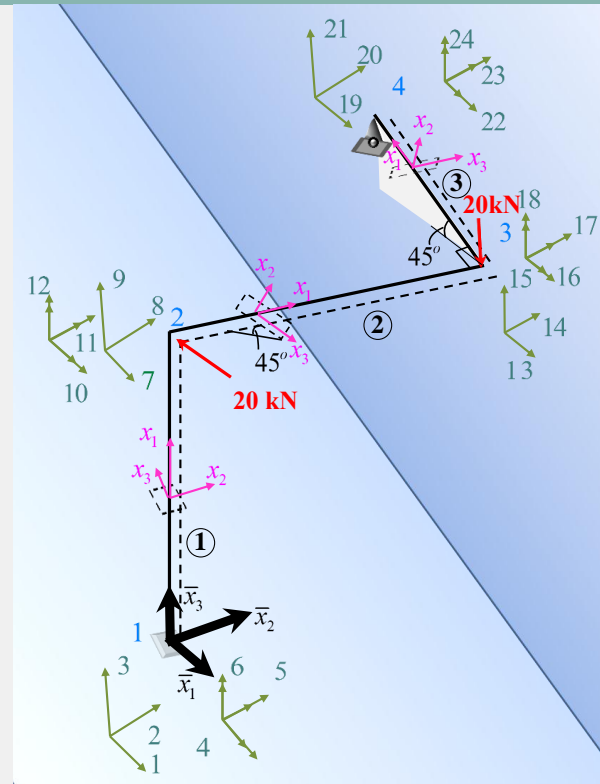
Εναλλακτικές μορφές γραφής διανυσμάτων

$$\begin{aligned}
 \{\bar{P}\} &= \begin{Bmatrix} \{\bar{P}^{(1)}\} \\ \{\bar{P}^{(2)}\} \\ \vdots \\ \{\bar{P}^{(N)}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1^{(1)} \\ \bar{P}_2^{(1)} \\ \bar{P}_3^{(1)} \\ \bar{M}_1^{(1)} \\ \bar{M}_2^{(1)} \\ \bar{M}_3^{(1)} \\ \vdots \\ \bar{P}_1^{(N)} \\ \bar{P}_2^{(N)} \\ \bar{P}_3^{(N)} \\ \bar{M}_1^{(N)} \\ \bar{M}_2^{(N)} \\ \bar{M}_3^{(N)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_3 \\ \bar{P}_4 \\ \bar{P}_5 \\ \bar{P}_6 \\ \vdots \\ \bar{P}_{6N-5} \\ \bar{P}_{6N-4} \\ \bar{P}_{6N-3} \\ \bar{P}_{6N-2} \\ \bar{P}_{6N-1} \\ \bar{P}_{6N} \end{Bmatrix} \\
 \{\bar{\Delta}\} &= \begin{Bmatrix} \{\bar{\Delta}^{(1)}\} \\ \{\bar{\Delta}^{(2)}\} \\ \vdots \\ \{\bar{\Delta}^{(N)}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(1)} \\ \bar{\Delta}_2^{(1)} \\ \bar{\Delta}_3^{(1)} \\ \bar{\Theta}_1^{(1)} \\ \bar{\Theta}_2^{(1)} \\ \bar{\Theta}_3^{(1)} \\ \vdots \\ \bar{\Delta}_1^{(N)} \\ \bar{\Delta}_2^{(N)} \\ \bar{\Delta}_3^{(N)} \\ \bar{\Theta}_1^{(N)} \\ \bar{\Theta}_2^{(N)} \\ \bar{\Theta}_3^{(N)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \Delta_6 \\ \vdots \\ \bar{\Delta}_{6N-5} \\ \bar{\Delta}_{6N-4} \\ \bar{\Delta}_{6N-3} \\ \bar{\Delta}_{6N-2} \\ \bar{\Delta}_{6N-1} \\ \bar{\Delta}_{6N} \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

Εφαρμογή – Διανύσματα ολικών επικόμβιων δράσεων και μετακινήσεων χωρικού πλασίου

$$\begin{Bmatrix} \bar{P}_1^{(4)} \\ \bar{P}_2^{(4)} \\ \bar{P}_3^{(4)} \\ \bar{M}_1^{(4)} \\ \bar{M}_2^{(4)} \\ \bar{M}_3^{(4)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_3 \\ \bar{P}_4 \\ \bar{P}_5 \\ \bar{P}_6 \\ \bar{P}_7 \\ \bar{P}_8 \\ \bar{P}_9 \\ \bar{P}_{10} \\ \bar{P}_{11} \\ \bar{P}_{12} \\ \bar{P}_{13} \\ \bar{P}_{14} \\ \bar{P}_{15} \\ \bar{P}_{16} \\ \bar{P}_{17} \\ \bar{P}_{18} \\ \bar{P}_{19} \\ \bar{P}_{20} \\ \bar{P}_{21} \\ \bar{P}_{22} \\ \bar{P}_{23} \\ \bar{P}_{24} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \\ \bar{R}_3 \\ \bar{R}_4 \\ \bar{R}_5 \\ \bar{R}_6 \\ 0 \\ -20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{R}_{21} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(1)} \\ \bar{\Delta}_2^{(1)} \\ \bar{\Delta}_3^{(1)} \\ \bar{\Theta}_1^{(1)} \\ \bar{\Theta}_2^{(1)} \\ \bar{\Theta}_3^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \bar{\Delta}_{10} \\ \bar{\Delta}_{11} \\ \bar{\Delta}_{12} \\ \bar{\Delta}_{13} \\ \bar{\Delta}_{14} \\ \bar{\Delta}_{15} \\ \bar{\Delta}_{16} \\ \bar{\Delta}_{17} \\ \bar{\Delta}_{18} \\ \bar{\Delta}_{19} \\ \bar{\Delta}_{20} \\ \bar{\Delta}_{21} \\ \bar{\Delta}_{22} \\ \bar{\Delta}_{23} \\ \bar{\Delta}_{24} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \bar{\Delta}_{10} \\ \bar{\Delta}_{11} \\ \bar{\Delta}_{12} \\ \bar{\Delta}_{13} \\ \bar{\Delta}_{14} \\ \bar{\Delta}_{15} \\ \bar{\Delta}_{16} \\ \bar{\Delta}_{17} \\ \bar{\Delta}_{18} \\ \bar{\Delta}_{19} \\ \bar{\Delta}_{20} \\ 0 \\ \bar{\Delta}_{22} \\ \bar{\Delta}_{23} \\ \bar{\Delta}_{24} \end{Bmatrix}$$



ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΧΩΡΙΚΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΧΩΡΙΚΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Μόρφωση καθολικού μητρώου στιβαρότητας φορέα χωρικού πλαισίου

$$\begin{Bmatrix} \bar{P}^{(1)} \\ \bar{P}^{(2)} \\ \vdots \\ \bar{P}^{(N)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{11}] & [\bar{K}_{12}] & \dots & [\bar{K}_{1,N}] \\ [\bar{K}_{21}] & [\bar{K}_{22}] & \dots & [\bar{K}_{2,N}] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [\bar{K}_{N,1}] & [\bar{K}_{N,2}] & \dots & [\bar{K}_{N,N}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}^{(1)} \\ \bar{\Delta}^{(2)} \\ \vdots \\ \bar{\Delta}^{(N)} \end{Bmatrix}$$
$$[\bar{K}_{nm}] = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11}^{nm} & \bar{K}_{12}^{nm} & \bar{K}_{13}^{nm} & \bar{K}_{14}^{nm} & \bar{K}_{15}^{nm} & \bar{K}_{16}^{nm} \\ \bar{K}_{21}^{nm} & \bar{K}_{22}^{nm} & \bar{K}_{23}^{nm} & \bar{K}_{24}^{nm} & \bar{K}_{25}^{nm} & \bar{K}_{26}^{nm} \\ \bar{K}_{31}^{nm} & \bar{K}_{32}^{nm} & \bar{K}_{33}^{nm} & \bar{K}_{34}^{nm} & \bar{K}_{35}^{nm} & \bar{K}_{36}^{nm} \\ \bar{K}_{41}^{nm} & \bar{K}_{42}^{nm} & \bar{K}_{43}^{nm} & \bar{K}_{44}^{nm} & \bar{K}_{45}^{nm} & \bar{K}_{46}^{nm} \\ \bar{K}_{51}^{nm} & \bar{K}_{52}^{nm} & \bar{K}_{53}^{nm} & \bar{K}_{54}^{nm} & \bar{K}_{55}^{nm} & \bar{K}_{56}^{nm} \\ \bar{K}_{61}^{nm} & \bar{K}_{62}^{nm} & \bar{K}_{63}^{nm} & \bar{K}_{64}^{nm} & \bar{K}_{65}^{nm} & \bar{K}_{66}^{nm} \end{bmatrix}$$

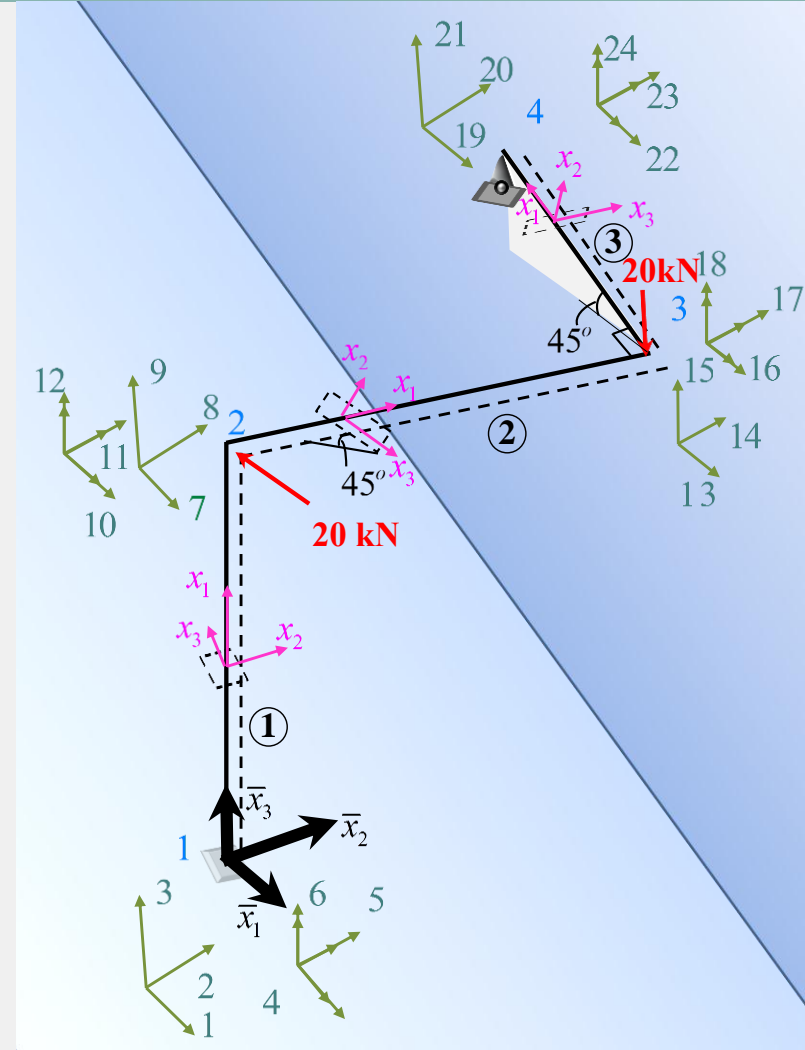
$$\begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_3 \\ \vdots \\ \bar{P}_{6N-2} \\ \bar{P}_{6N-1} \\ \bar{P}_{6N} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} & \bar{K}_{13} & \dots & \bar{K}_{1,6N-2} & \bar{K}_{1,6N-1} & \bar{K}_{1,6N} \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} & \bar{K}_{23} & \dots & \bar{K}_{2,6N-2} & \bar{K}_{2,6N-1} & \bar{K}_{2,6N} \\ \bar{K}_{31} & \bar{K}_{32} & \bar{K}_{33} & \dots & \bar{K}_{3,6N-2} & \bar{K}_{3,6N-1} & \bar{K}_{3,6N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{K}_{6N-2,1} & \bar{K}_{6N-2,2} & \bar{K}_{6N-2,3} & \vdots & \bar{K}_{6N-2,6N-2} & \bar{K}_{6N-2,6N-1} & \bar{K}_{6N-2,6N} \\ \bar{K}_{6N-1,1} & \bar{K}_{6N-1,2} & \bar{K}_{6N-1,3} & \dots & \bar{K}_{6N-1,6N-2} & \bar{K}_{6N-1,6N-1} & \bar{K}_{6N-1,6N} \\ \bar{K}_{6N,1} & \bar{K}_{6N,2} & \bar{K}_{6N,3} & \dots & \bar{K}_{6N,6N-2} & \bar{K}_{6N,6N-1} & \bar{K}_{6N,6N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \vdots \\ \bar{\Delta}_{6N-2} \\ \bar{\Delta}_{6N-1} \\ \bar{\Delta}_{6N} \end{Bmatrix}$$

**Καθολικό
μητρώο
στιβαρό-
τητας
φορέα**

Εφαρμογή – Καθολικό μητρώο στιβαρότητας χωρικού πλαισίου

Σύνθεση στο καθολικό μητρώο στιβαρότητας του πλαισίου

$$\left[\bar{K} \right] = \begin{array}{c} \text{κόμβος 1} \\ \text{κόμβος 2} \\ \text{κόμβος 3} \\ \text{κόμβος 4} \end{array} \left\{ \begin{array}{c|c|c|c} \text{κόμβος 1} & \text{κόμβος 2} & \text{κόμβος 3} & \text{κόμβος 4} \\ \hline \begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^{-1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^{-1} \end{bmatrix} & & \\ \hline \begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^{-1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \bar{k}_{kk}^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^{-2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^{-2} \end{bmatrix} & \\ \hline & \begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^{-2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \bar{k}_{kk}^{-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^{-3} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^{-3} \end{bmatrix} \\ \hline & & \begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^{-3} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \bar{k}_{kk}^{-3} \end{bmatrix} \end{array} \right.$$



Εφαρμογή – Καθολικό μητρώο στιβαρότητας χωρικού πλαισίου

Σύνθεση στο καθολικό μητρώο στιβαρότητας του πλαισίου

$$[\bar{K}] = \begin{matrix} & \left. \begin{matrix} \text{κόμβος 1} \\ \text{κόμβος 2} \\ \text{κόμβος 3} \\ \text{κόμβος 4} \end{matrix} \right\} & \begin{bmatrix} \text{κόμβος 1} & \text{κόμβος 2} & \text{κόμβος 3} & \text{κόμβος 4} \\ \left[\begin{matrix} \bar{k}_{jj}^{-1} \end{matrix} \right] & \left[\begin{matrix} \bar{k}_{jk}^{-1} \end{matrix} \right] & & \\ \left[\begin{matrix} \bar{k}_{kj}^{-1} \end{matrix} \right] & \left[\begin{matrix} \bar{k}_{kk}^{-1} \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} \bar{k}_{jj}^{-2} \end{matrix} \right] & \left[\begin{matrix} \bar{k}_{jk}^{-2} \end{matrix} \right] & \\ & \left[\begin{matrix} \bar{k}_{kj}^{-2} \end{matrix} \right] & \left[\begin{matrix} \bar{k}_{kk}^{-2} \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} \bar{k}_{jj}^{-3} \end{matrix} \right] & \left[\begin{matrix} \bar{k}_{jk}^{-3} \end{matrix} \right] \\ & & \left[\begin{matrix} \bar{k}_{kj}^{-3} \end{matrix} \right] & \left[\begin{matrix} \bar{k}_{kk}^{-3} \end{matrix} \right] \end{bmatrix} & \end{matrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{\alpha\alpha} & \bar{K}_{\alpha b} \\ \bar{K}_{ba} & \bar{K}_{bb} \end{bmatrix}$$

Καθολικό μητρώο στιβαρότητας πλαισίου

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	14648.44	0.00	0.00	0.00	29296.88	0.00	-14648.44	0.00	0.00	0.00	29296.88	0.00
2	0.00	3662.11	0.00	-7324.22	0.00	0.00	0.00	-3662.11	0.00	-7324.22	0.00	0.00
3	0.00	0.00	937500.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-937500.00	0.00	0.00	0.00
4	0.00	-7324.22	0.00	19531.25	0.00	0.00	0.00	7324.22	0.00	9765.63	0.00	0.00
5	29296.88	0.00	0.00	0.00	78125.00	0.00	-29296.88	0.00	0.00	0.00	39062.50	0.00
6	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	5587.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-5587.50
7	-14648.44	0.00	0.00	0.00	-29296.88	0.00	23803.71	0.00	-5493.16	-10986.33	-29296.88	-18310.55
8	0.00	-3662.11	0.00	7324.22	0.00	0.00	0.00	941162.11	0.00	7324.22	0.00	0.00
9	0.00	0.00	-937500.00	0.00	0.00	0.00	-5493.16	0.00	946655.27	18310.55	0.00	10986.33
10	0.00	-7324.22	0.00	9765.63	0.00	0.00	-10986.33	7324.22	18310.55	68359.38	0.00	29296.88
11	29296.88	0.00	0.00	0.00	39062.50	0.00	-29296.88	0.00	0.00	0.00	83712.50	0.00
12	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-5587.50	-18310.55	0.00	10986.33	29296.88	0.00	54415.63

Εφαρμογή – Καθολικό μητρώο στιβαρότητας χωρικού πλαισίου

		13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} \bar{K}_{\alpha\alpha} & \bar{K}_{\alpha b} \\ \bar{K}_{b\alpha} & \bar{K}_{bb} \end{bmatrix}$	1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
	2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
	3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
	4	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
	5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
	6	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
	7	-9155.27	0.00	5493.16	-10986.33	0.00	-18310.55	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	8	0.00	-937500.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	9	5493.16	0.00	-9155.27	18310.55	0.00	10986.33	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	10	10986.33	0.00	-18310.55	24414.06	0.00	14648.44	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	11	0.00	0.00	0.00	0.00	-5587.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	12	18310.55	0.00	-10986.33	14648.44	0.00	24414.06	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
		13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
$[\bar{K}_{bb}] =$	13	341256.26	0.00	-336299.43	10986.33	2589.46	18310.55	-332100.98	0.00	330806.26	0.00	2589.46	0.00	
	14	0.00	942678.88	0.00	-10357.84	0.00	-10357.84	0.00	-5178.88	0.00	-10357.84	0.00	-10357.84	
	15	-336299.43	0.00	341256.26	-18310.55	2589.46	-10986.33	330806.26	0.00	-332100.98	0.00	2589.46	0.00	
	16	10986.33	-10357.84	-18310.55	78424.72	0.00	54942.55	0.00	10357.84	0.00	11835.10	0.00	15786.03	
	17	2589.46	0.00	2589.46	0.00	19398.07	0.00	-2589.46	0.00	-2589.46	0.00	6905.28	0.00	
	18	18310.55	-10357.84	-10986.33	54942.55	0.00	78424.72	0.00	10357.84	0.00	15786.03	0.00	11835.10	
	19	-332100.98	0.00	330806.26	0.00	-2589.46	0.00	332100.98	0.00	-330806.26	0.00	-2589.46	0.00	
	20	0.00	-5178.88	0.00	10357.84	0.00	10357.84	0.00	5178.88	0.00	10357.84	0.00	10357.84	
	21	330806.26	0.00	-332100.98	0.00	-2589.46	0.00	-330806.26	0.00	332100.98	0.00	-2589.46	0.00	
	22	0.00	-10357.84	0.00	11835.10	0.00	15786.03	0.00	10357.84	0.00	29596.60	0.00	25645.67	
	23	2589.46	0.00	2589.46	0.00	6905.28	0.00	-2589.46	0.00	-2589.46	0.00	13810.57	0.00	
	24	0.00	-10357.84	0.00	15786.03	0.00	11835.10	0.00	10357.84	0.00	25645.67	0.00	29596.60	

ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΗ (ΑΝΑΔΙΑΤΑΞΗ) ΚΑΘΟΛΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ

ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΗ (ΑΝΑΔΙΑΤΑΞΗ) ΚΑΘΟΛΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ

Τροποποιημένα (λόγω αναδιάταξης) διανύσματα επικόμβιων δράσεων και μετακινήσεων πλαισίου

$$\{\bar{P}_m\} = \begin{bmatrix} \{\bar{P}_f\} \\ \{\bar{P}_s\} \end{bmatrix} = [V] \{\bar{P}\} \quad \{\bar{\Delta}_m\} = \begin{bmatrix} \{\bar{\Delta}_f\} \\ \{\bar{\Delta}_s\} \end{bmatrix} = [V] \{\bar{\Delta}\}$$

Τροποποιημένο (λόγω αναδιάταξης) καθολικό μητρώο στιβαρότητας πλαισίου

$$[\bar{K}_m] = [V] [\bar{K}] [V]^T$$

Επίλυση $\{\bar{P}_m\} = [\bar{K}_m] \{\bar{\Delta}_m\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \{\bar{P}_f\} \\ \{\bar{P}_s\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{ff}] & [\bar{K}_{fs}] \\ [\bar{K}_{sf}] & [\bar{K}_{ss}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\bar{\Delta}_f\} \\ \{\bar{\Delta}_s\} \end{bmatrix} \Rightarrow$

Επικόμβιες μετακινήσεις κατά τους ελεύθερους και επικόμβιες δράσεις (αντιδράσεις) κατά τους δεσμευμένους β.ε.

$$\{\bar{\Delta}_f\} = [\bar{K}_{ff}]^{-1} \left(\{\bar{P}_f\} - [\bar{K}_{fs}] \{\bar{\Delta}_s\} \right) \quad \{\bar{P}_s\} = [\bar{K}_{sf}] \{\bar{\Delta}_f\} + [\bar{K}_{ss}] \{\bar{\Delta}_s\}$$

Εφαρμογή – Τροποποίηση σχέσης στιβαρότητας χωρικού πλαισίου λόγω αναδιάταξης

**Τροποποιημένο
(λόγω αναδιάταξης)
καθολικό μητρώο
στιβαρότητας
πλαίσου**

$[\bar{K}_{fs}] =$

-14648.44	0.00	0.00	0.00	-29296.88	0.00	0.00
0.00	-3662.11	0.00	7324.22	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	-937500.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	-7324.22	0.00	9765.63	0.00	0.00	0.00
29296.88	0.00	0.00	0.00	39062.50	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-5587.50	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	330806.26
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-332100.98
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-2589.46
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-330806.26
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-2589.46
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

$$[\bar{K}_m] = [V][\bar{K}][V]^T = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{ff}] & [\bar{K}_{fs}] \\ [\bar{K}_{sf}] & [\bar{K}_{ss}] \end{bmatrix}$$

Εφαρμογή – Τροποποίηση σχέσης στιβαρότητας χωρικού πλαισίου λόγω αναδιάταξης

Τροποποιημένο (λόγω αναδιάταξης) καθολικό μητρώο στιβαρότητας πλαισίου

$$[\bar{K}_{sf}] = \begin{bmatrix} -14648.44 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 29296.88 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & -3662.11 & 0.00 & -7324.22 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & -937500.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 7324.22 & 0.00 & 9765.63 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ -29296.88 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 39062.50 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -5587.50 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 330806.26 & 0.00 & -332100.98 & 0.00 & -2589.46 & 0.00 & -330806.26 & 0.00 & 0.00 & -2589.46 & 0.00 \end{bmatrix}$$

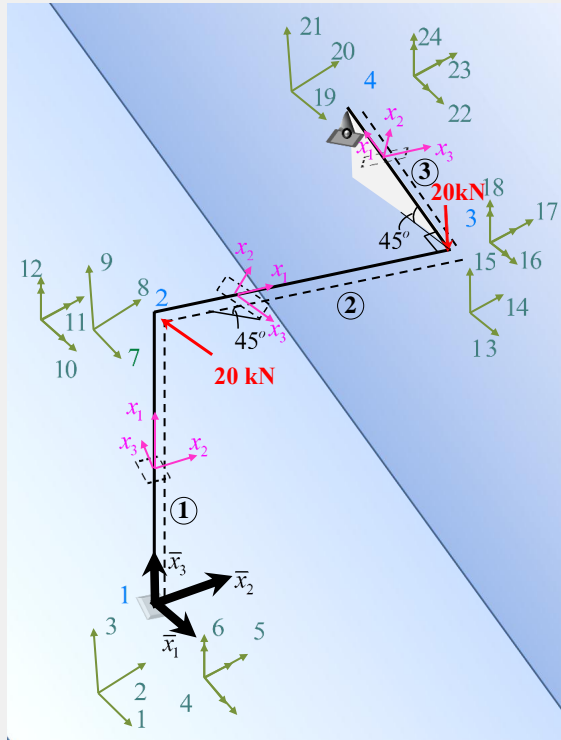
$$[\bar{K}_{ss}] = \begin{bmatrix} 14648.44 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 29296.88 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 3662.11 & 0.00 & -7324.22 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 937500.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & -7324.22 & 0.00 & 19531.25 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 29296.88 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 78125.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 5587.50 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 332100.98 \end{bmatrix}$$

Εφαρμογή – Τροποποίηση σχέσης στιβαρότητας χωρικού πλαισίου λόγω αναδιάταξης

Τροποποιημένο (λόγω αναδιάταξης) καθολικό μητρώο στιβαρότητας πλαισίου

$$[\bar{K}_{ff}] = \begin{bmatrix} 23803.71 & 0.00 & -5493.16 & -10986.33 & -29296.88 & -18310.55 & -9155.27 & 0.00 & 5493.16 & -10986.33 & 0.00 & -18310.55 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 941162.11 & 0.00 & 7324.22 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -937500.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ -5493.16 & 0.00 & 946655.27 & 18310.55 & 0.00 & 10986.33 & 5493.16 & 0.00 & -9155.27 & 18310.55 & 0.00 & 10986.33 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ -10986.33 & 7324.22 & 18310.55 & 68359.38 & 0.00 & 29296.88 & 10986.33 & 0.00 & -18310.55 & 24414.06 & 0.00 & 14648.44 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ -29296.88 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 83712.50 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -5587.50 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ -18310.55 & 0.00 & 10986.33 & 29296.88 & 0.00 & 54415.63 & 18310.55 & 0.00 & -10986.33 & 14648.44 & 0.00 & 24414.06 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ -9155.27 & 0.00 & 5493.16 & 10986.33 & 0.00 & 18310.55 & 341256.26 & 0.00 & -336299.43 & 10986.33 & 2589.46 & 18310.55 & -332100.98 & 0.00 & 0.00 & 2589.46 & 0.00 \\ 0.00 & -937500.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 942678.88 & 0.00 & -10357.84 & 0.00 & -10357.84 & 0.00 & -5178.88 & -10357.84 & 0.00 & -10357.84 \\ 5493.16 & 0.00 & -9155.27 & -18310.55 & 0.00 & -10986.33 & -336299.43 & 0.00 & 341256.26 & -18310.55 & 2589.46 & -10986.33 & 330806.26 & 0.00 & 0.00 & 2589.46 & 0.00 \\ -10986.33 & 0.00 & 18310.55 & 24414.06 & 0.00 & 14648.44 & 10986.33 & -10357.84 & -18310.55 & 78424.72 & 0.00 & 54942.55 & 0.00 & 10357.84 & 11835.10 & 0.00 & 15786.03 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -5587.50 & 0.00 & 2589.46 & 0.00 & 2589.46 & 0.00 & 19398.07 & 0.00 & -2589.46 & 0.00 & 0.00 & 6905.28 & 0.00 \\ -18310.55 & 0.00 & 10986.33 & 14648.44 & 0.00 & 24414.06 & 18310.55 & -10357.84 & -10986.33 & 54942.55 & 0.00 & 78424.72 & 0.00 & 10357.84 & 15786.03 & 0.00 & 11835.10 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -332100.98 & 0.00 & 330806.26 & 0.00 & -2589.46 & 0.00 & 332100.98 & 0.00 & 0.00 & -2589.46 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -5178.88 & 0.00 & 10357.84 & 0.00 & 10357.84 & 0.00 & 5178.88 & 10357.84 & 0.00 & 10357.84 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -10357.84 & 0.00 & 11835.10 & 0.00 & 15786.03 & 0.00 & 10357.84 & 29596.60 & 0.00 & 25645.67 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 2589.46 & 0.00 & 2589.46 & 0.00 & 6905.28 & 0.00 & -2589.46 & 0.00 & 0.00 & 13810.57 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -10357.84 & 0.00 & 15786.03 & 0.00 & 11835.10 & 0.00 & 10357.84 & 25645.67 & 0.00 & 29596.60 \end{bmatrix}$$

Εφαρμογή – Επίλυση σχέσης στιβαρότητας χωρικού πλαισίου – Ελεύθερες μετακινήσεις, αντιδράσεις



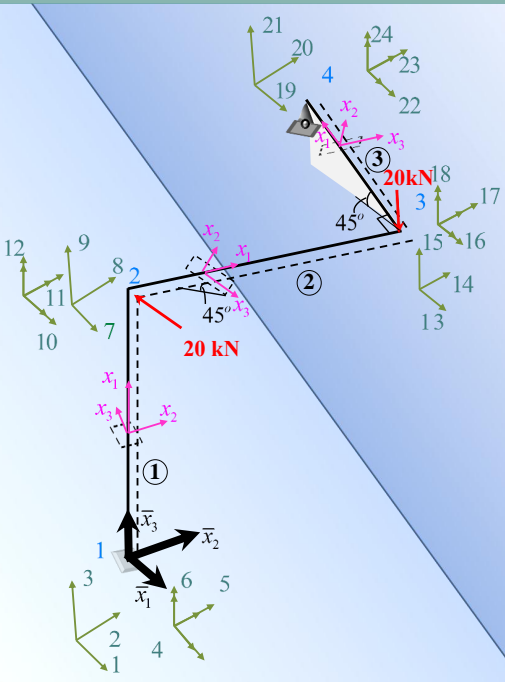
Επίλυση –
Επικόμβιες μετακινήσεις
κατά τους ελεύθερους και
επικόβιες δράσεις
(αντιδράσεις) κατά τους
δεσμευμένους β.ε.

$$\{\bar{\Delta}_f\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \bar{\Delta}_{10} \\ \bar{\Delta}_{11} \\ \bar{\Delta}_{12} \\ \bar{\Delta}_{13} \\ \bar{\Delta}_{14} \\ \bar{\Delta}_{15} \\ \bar{\Delta}_{16} \\ \bar{\Delta}_{17} \\ \bar{\Delta}_{18} \\ \bar{\Delta}_{19} \\ \bar{\Delta}_{20} \\ \bar{\Delta}_{22} \\ \bar{\Delta}_{23} \\ \bar{\Delta}_{24} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.001565 \\ 0.017184 \\ 0.017184 \\ -0.000011 \\ -0.008592 \\ -0.000100 \\ 0.000000 \\ -0.005861 \\ 0.017184 \\ -0.041539 \\ -0.011277 \\ 0.006709 \\ 0.001611 \\ 0.035663 \\ 0.055848 \\ -0.011277 \\ 0.012220 \\ 0.001611 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{P}_s\} = \begin{Bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \\ \bar{R}_3 \\ \bar{R}_4 \\ \bar{R}_5 \\ \bar{R}_6 \\ \bar{R}_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 20.00 \\ 0.00 \\ 10.49 \\ 41.95 \\ 41.95 \\ 0.00 \\ 9.51 \end{Bmatrix}$$

ΕΣΩΤΕΡΙΚΑ ΕΝΤΑΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ ΜΕΛΩΝ ΧΩΡΙΚΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Εφαρμογή - ΕΣΩΤΕΡΙΚΑ ΕΝΤΑΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ ΜΕΛΩΝ ΧΩΡΙΚΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ



Μέλος 1

$$\{A^i\} = [k^i] [\Lambda_{SF}^i] \{\bar{D}^i\}$$

$$\begin{Bmatrix} F_1^{1j} \\ F_2^{1j} \\ F_3^{1j} \\ F_4^{1j} \\ F_5^{1j} \\ F_6^{1j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10.49 \\ 0.00 \\ -20.00 \\ 0.00 \\ 41.95 \\ -41.95 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1^{1k} \\ F_2^{1k} \\ F_3^{1k} \\ F_4^{1k} \\ F_5^{1k} \\ F_6^{1k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10.49 \\ 0.00 \\ 20.00 \\ 0.00 \\ 38.05 \\ 41.95 \end{Bmatrix}$$

Μέλος 2

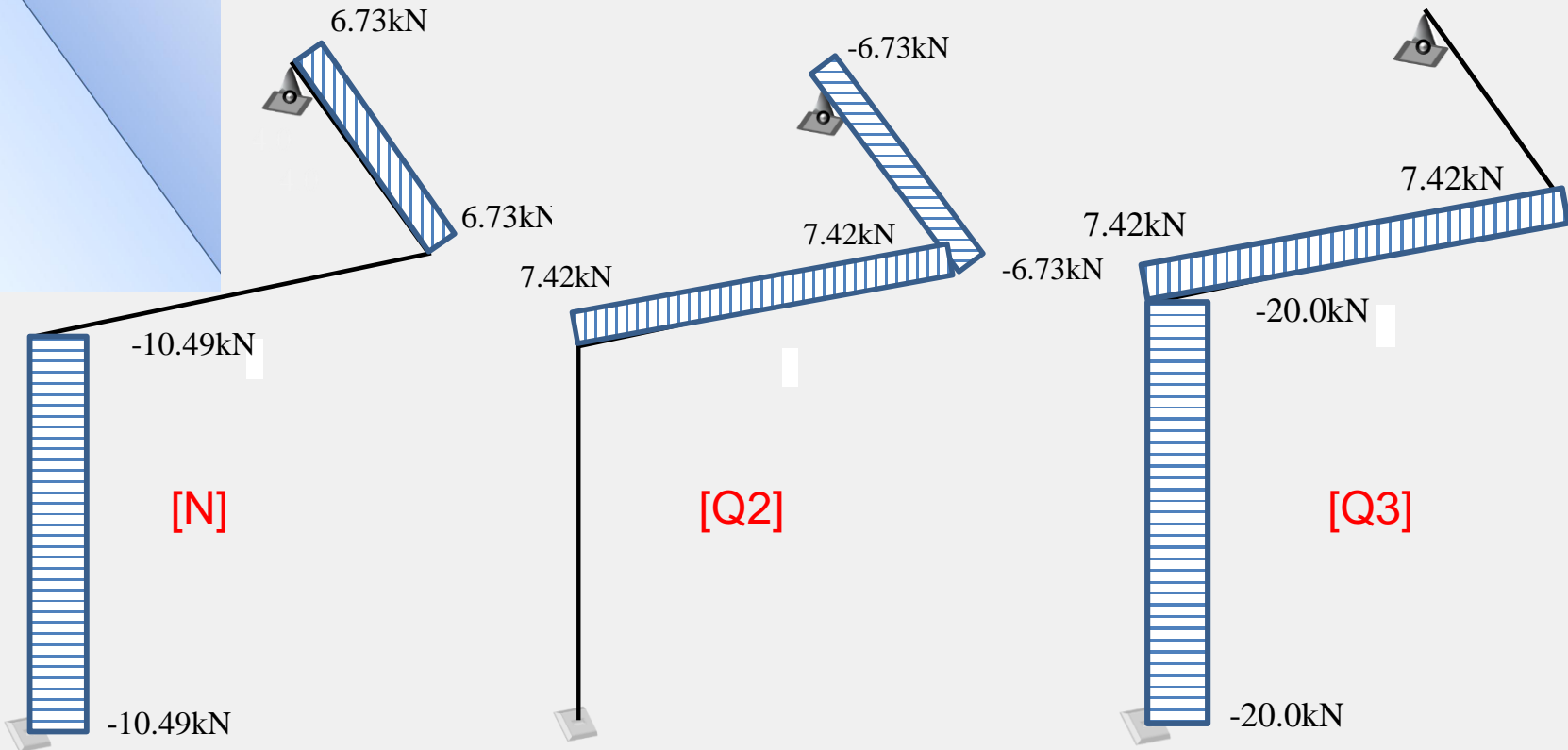
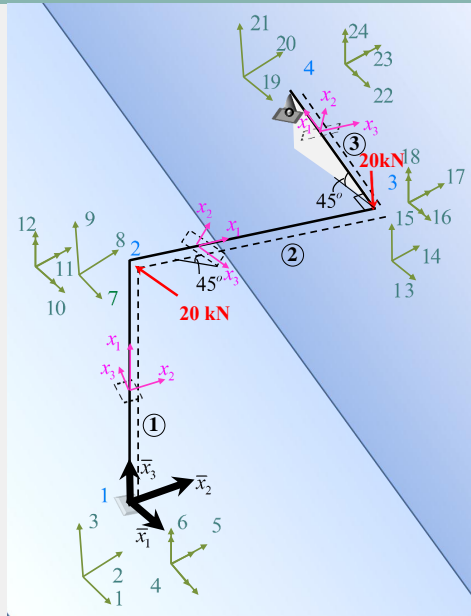
$$\begin{Bmatrix} F_1^{2j} \\ F_2^{2j} \\ F_3^{2j} \\ F_4^{2j} \\ F_5^{2j} \\ F_6^{2j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.00 \\ 7.42 \\ -7.42 \\ -38.05 \\ 29.67 \\ 29.67 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1^{2k} \\ F_2^{2k} \\ F_3^{2k} \\ F_4^{2k} \\ F_5^{2k} \\ F_6^{2k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.00 \\ -7.42 \\ 7.42 \\ 38.05 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{Bmatrix}$$

Μέλος 3

$$\begin{Bmatrix} F_1^{3j} \\ F_2^{3j} \\ F_3^{3j} \\ F_4^{3j} \\ F_5^{3j} \\ F_6^{3j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6.73 \\ -6.73 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ -38.05 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1^{3k} \\ F_2^{3k} \\ F_3^{3k} \\ F_4^{3k} \\ F_5^{3k} \\ F_6^{3k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6.73 \\ 6.73 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{Bmatrix}$$

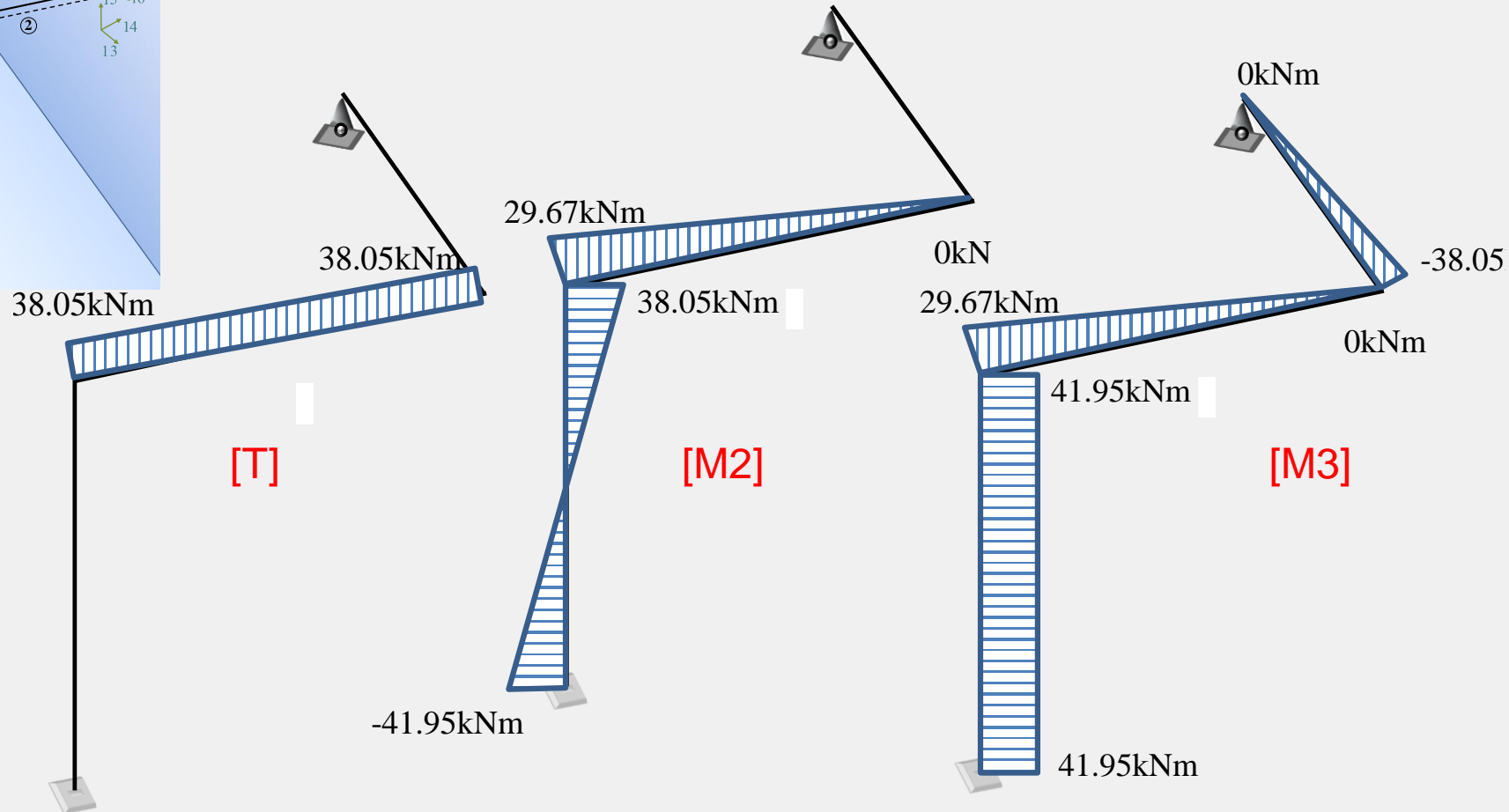
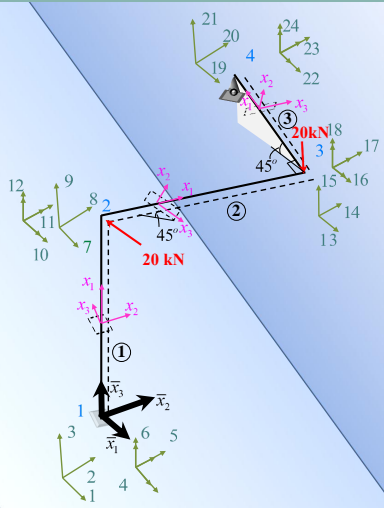
Εφαρμογή - ΕΣΩΤΕΡΙΚΑ ΕΝΤΑΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ ΜΕΛΩΝ ΧΩΡΙΚΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Διαγράμματα εσωτερικών εντατικών μεγεθών μελών πλαισίου



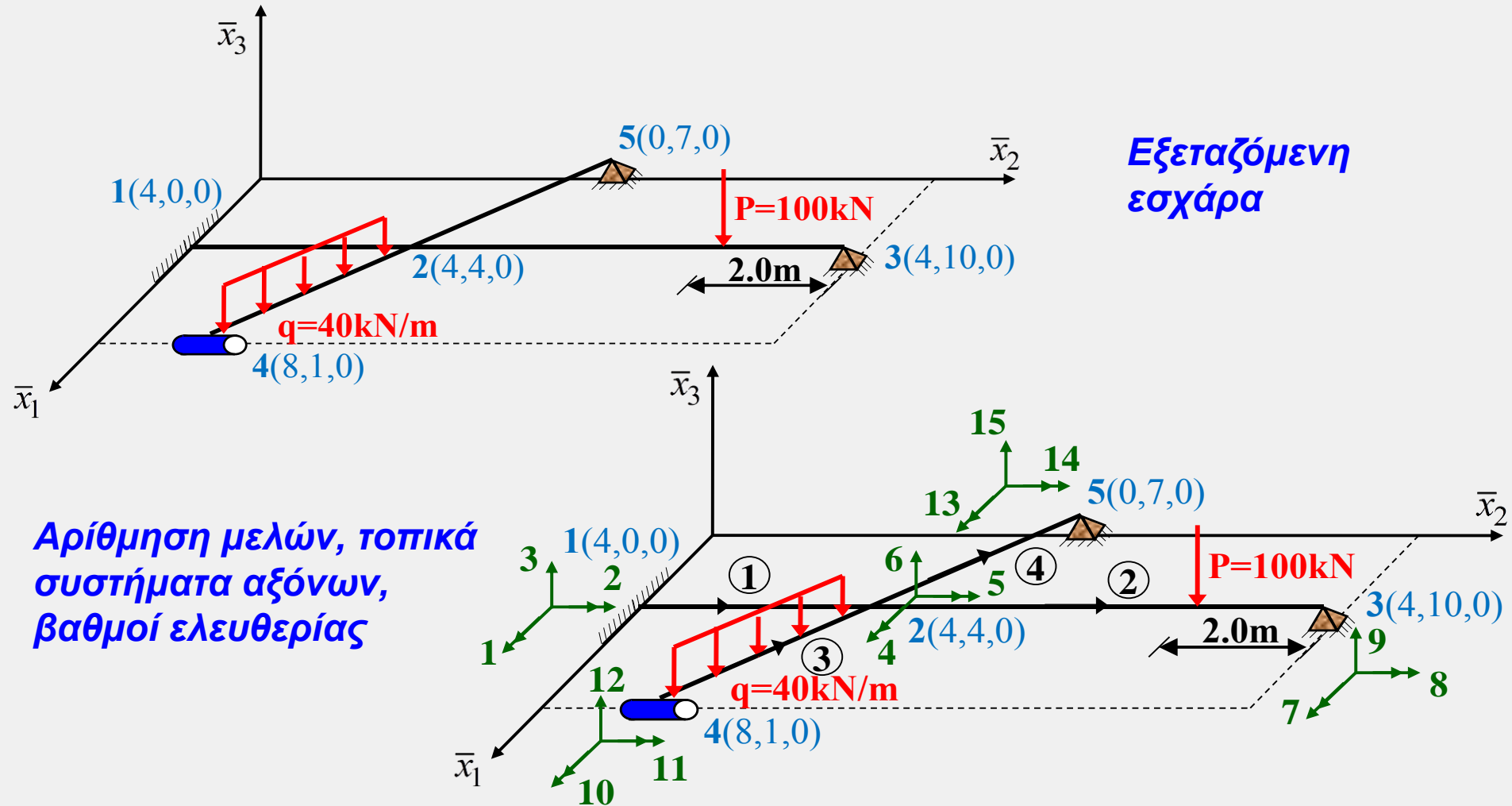
Εφαρμογή - ΕΣΩΤΕΡΙΚΑ ΕΝΤΑΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ ΜΕΛΩΝ ΧΩΡΙΚΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Διαγράμματα εσωτερικών εντατικών μεγεθών μελών πλαισίου



ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΣΧΑΡΑΣ

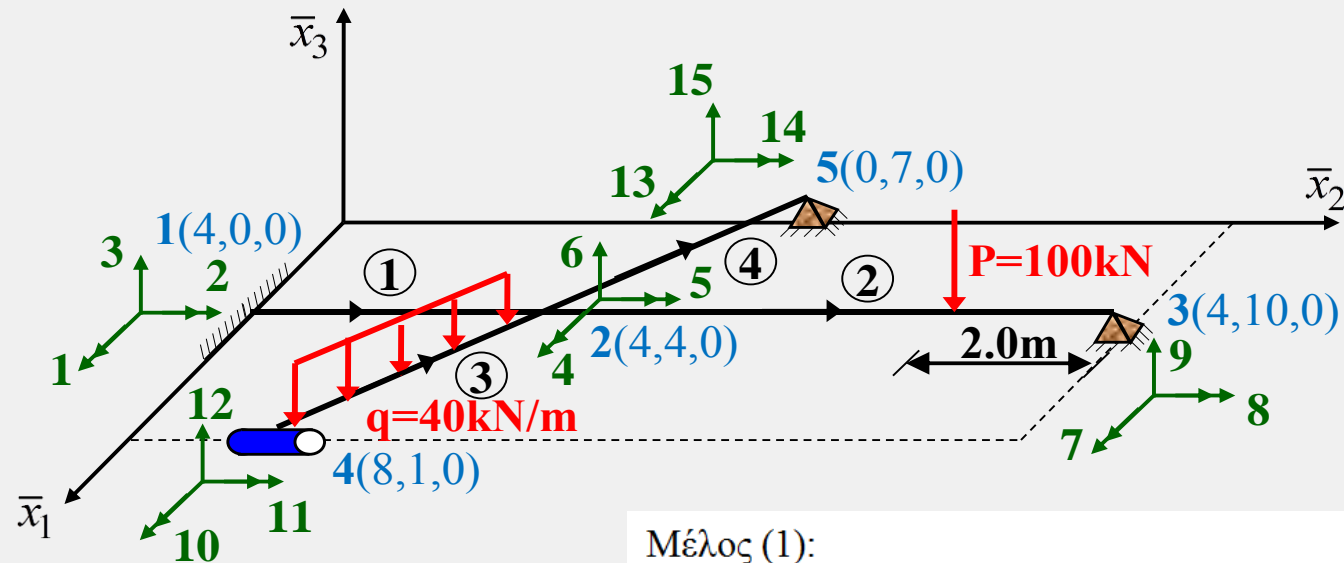
ΕΦΑΡΜΟΓΗ



**Εξεταζόμενη
εσχάρα**

**Αρίθμηση μελών, τοπικά
συστήματα αξόνων,
βαθμοί ελευθερίας**

ΕΦΑΡΜΟΓΗ



**Στοιχεία
γεωμετρίας και
υλικού μελών**

Μέλος (1):

$$E^1 = 2.1 \times 10^7 \text{ kN} / \text{m}^2, \nu^1 = 0.15, I_1^1 = 0.0037 \text{ m}^4, I_2^1 = 0.0054 \text{ m}^4, L^1 = 4.0 \text{ m}$$

Μέλος (2):

$$E^2 = 2.1 \times 10^7 \text{ kN} / \text{m}^2, \nu^2 = 0.15, I_1^2 = 0.0037 \text{ m}^4, I_2^2 = 0.0054 \text{ m}^4, L^2 = 6.0 \text{ m}$$

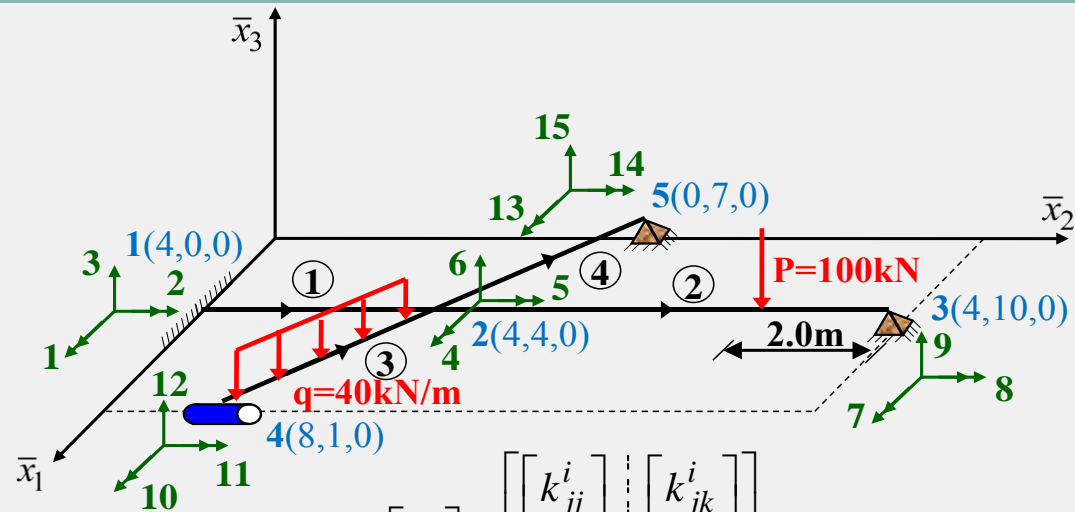
Μέλος (3):

$$E^3 = 2.1 \times 10^7 \text{ kN} / \text{m}^2, \nu^3 = 0.15, I_1^3 = 0.0037 \text{ m}^4, I_2^3 = 0.0054 \text{ m}^4, L^3 = 5.0 \text{ m}$$

Μέλος (4):

$$E^4 = 2.1 \times 10^7 \text{ kN} / \text{m}^2, \nu^4 = 0.15, I_1^4 = 0.0037 \text{ m}^4, I_2^4 = 0.0054 \text{ m}^4, L^4 = 5.0 \text{ m}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

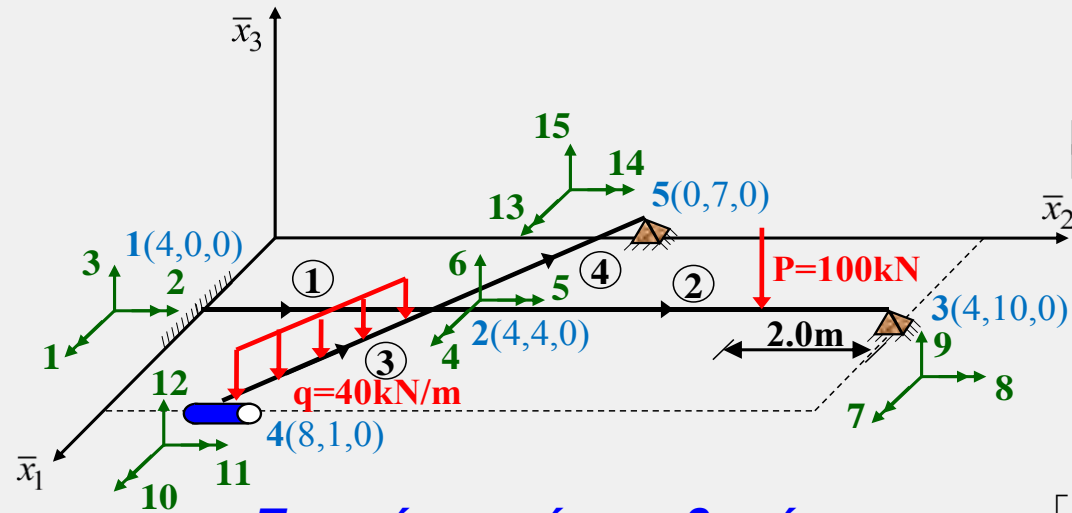


Τοπικά μητρώα στιβαρότητας μελών εσχάρας

$$[k^i] = \begin{bmatrix} [k_{jj}^i] & [k_{jk}^i] \\ [k_{kj}^i] & [k_{kk}^i] \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 12E^i I_2^i / L^{i3} & 0 & -6E^i I_2^i / L^{i2} & -12E^i I_2^i / L^{i3} & 0 & -6E^i I_2^i / L^{i2} \\ 0 & G^i I_1^i / L^i & 0 & 0 & -G^i I_1^i / L^i & 0 \\ -6E^i I_2^i / L^{i2} & 0 & 4E^i I_2^i / L^i & 6E^i I_2^i / L^{i2} & 0 & 2E^i I_2^i / L^i \\ -12E^i I_2^i / L^{i3} & 0 & 6E^i I_2^i / L^{i2} & 12E^i I_2^i / L^{i3} & 0 & 6E^i I_2^i / L^{i2} \\ 0 & -G^i I_1^i / L^i & 0 & 0 & G^i I_1^i / L^i & 0 \\ -6E^i I_2^i / L^{i2} & 0 & 2E^i I_2^i / L^i & 6E^i I_2^i / L^{i2} & 0 & 4E^i I_2^i / L^i \end{bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ



Τοπικά μητρώα στιβαρότητας μελών εσχάρας

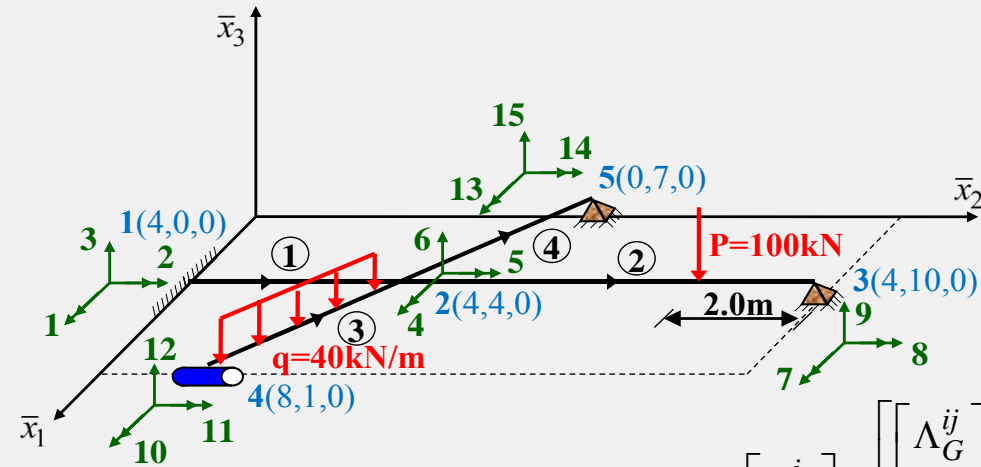
$$[k^3] = EI_2 \begin{bmatrix} 12 & 10 & 11 & 6 & 4 & 5 \\ 0.096 & & & & & \\ 0 & 0.059 & & & & \\ 0.240 & 0 & 0.8 & & & \\ -0.096 & 0 & 0.240 & 0.096 & & \\ 0 & -0.059 & 0 & 0 & 0.059 & \\ 0.240 & 0 & 0.4 & 0.240 & 0 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$[k^1] = EI_2 \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 \\ 0.1875 & & & & & \\ 0 & 0.074 & & & & \\ 0.375 & 0 & 1 & & & \\ -0.1875 & 0 & 0.375 & 0.1875 & & \\ 0 & -0.074 & 0 & 0 & 0.074 & \\ 0.375 & 0 & 0.5 & 0.375 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[k^2] = EI_2 \begin{bmatrix} 6 & 4 & 5 & 9 & 7 & 8 \\ 0.055 & & & & & \\ 0 & 0.049 & & & & \\ 0.166 & 0 & 0.666 & & & \\ -0.055 & 0 & 0.166 & 0.055 & & \\ 0 & -0.049 & 0 & 0 & 0.049 & \\ 0.166 & 0 & 0.333 & 0.166 & 0 & 0.666 \end{bmatrix}$$

$$[k^4] = EI_2 \begin{bmatrix} 6 & 4 & 5 & 15 & 13 & 14 \\ 0.096 & & & & & \\ 0 & 0.059 & & & & \\ 0.240 & 0 & 0.8 & & & \\ -0.096 & 0 & 0.240 & 0.096 & & \\ 0 & -0.059 & 0 & 0 & 0.059 & \\ 0.240 & 0 & 0.4 & 0.240 & 0 & 0.8 \end{bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ



Μητρώα μετασχηματισμού μελών εσχάρας

$$[\Lambda_G^i] = \begin{bmatrix} [\Lambda_G^{ij}] & [0] \\ [0] & [\Lambda_G^{ik}] \end{bmatrix} =$$

$$\theta^{1j} = \theta^{1k} = \theta^{2j} = \theta^{2k} = 90^\circ$$

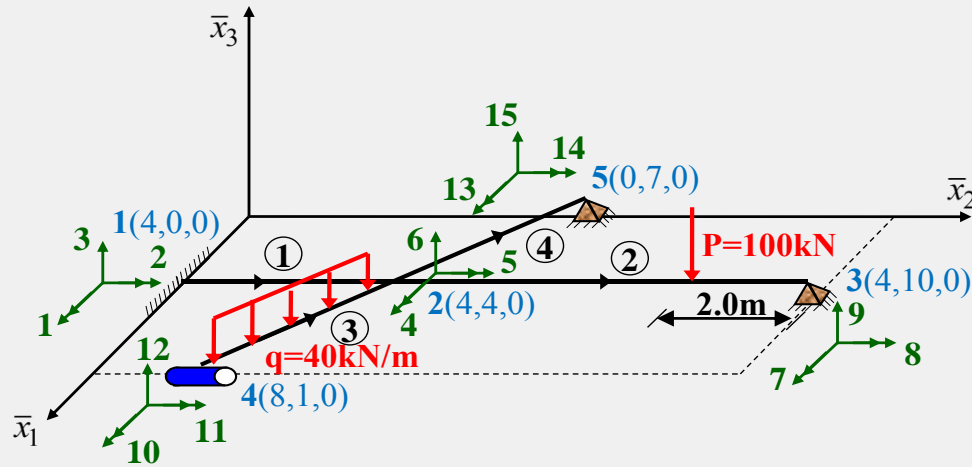
$$\theta^{3j} = \theta^{3k} = \theta^{4j} = \theta^{4k} = 143.13^\circ$$

$$[\Lambda_G^1] = [\Lambda_G^2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & [0] \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & -1 & 0 & \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & [0] & & 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\Lambda_G^3] = [\Lambda_G^4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & [0] \\ 0 & -0.8 & 0.6 & \\ 0 & -0.6 & -0.8 & \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & [0] & & 0 & -0.8 & 0.6 \\ & & & 0 & -0.6 & -0.8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & [0] \\ 0 & \cos \theta^{ij} & \sin \theta^{ij} & \\ 0 & -\sin \theta^{ij} & \cos \theta^{ij} & \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & [0] & & 0 & \cos \theta^{ik} & \sin \theta^{ik} \\ & & & 0 & -\sin \theta^{ik} & \cos \theta^{ik} \end{bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ



Καθολικά μητρώα
στιβαρότητας μελών εσχάρας

$$[\bar{k}^i] = [\Lambda_G^i]^T [k^i] [\Lambda_G^i]$$

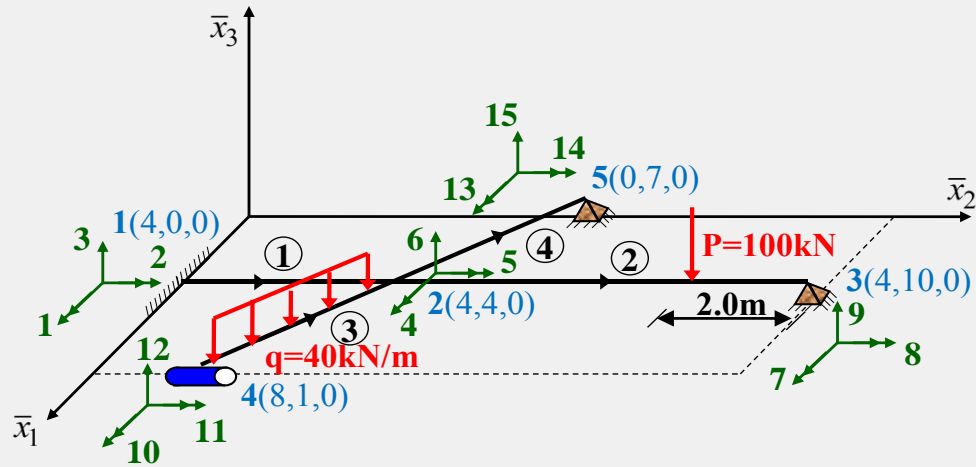
$$[\bar{k}^1] = EI_2$$

	3	1	2	6	4	5	
3	0.1875						3
1	0.375	1					1
2	0	0	0.074				2
6	-0.1875	-0.375	0	0.1875			6
4	0.375	0.5	0	-0.375	1		4
5	0	0	-0.074	0	0	0.074	5

$$[\bar{k}^2] = EI_2$$

	6	4	5	9	7	8	
6	0.055						6
4	0.166	0.666					4
5	0	0	0.049				5
9	-0.055	-0.166	0	0.055			9
7	0.166	0.333	0	-0.166	0.666		7
8	0	0	-0.049	0	0	0.049	8

ΕΦΑΡΜΟΓΗ



Καθολικά μητρώα
στιβαρότητας μελών εσχάρας

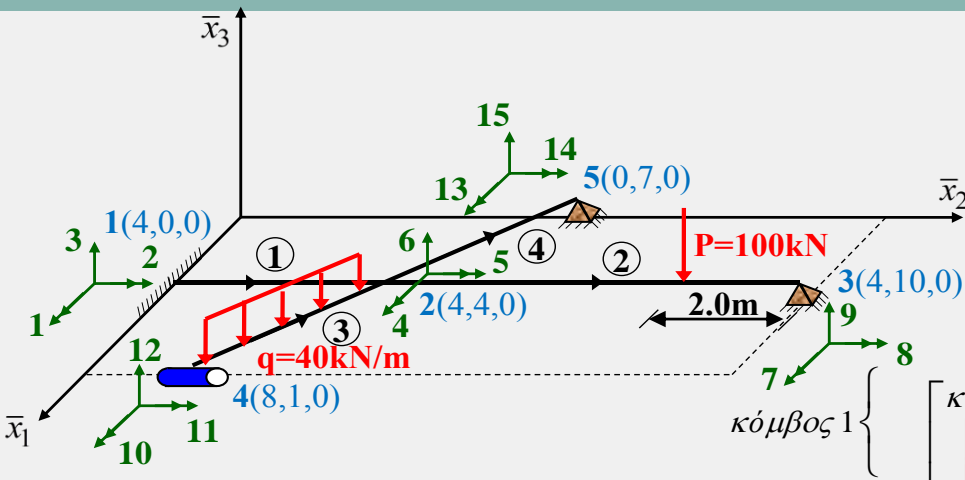
$$[\bar{k}^i] = [\Lambda_G^i]^T [k^i] [\Lambda_G^i]$$

$$[\bar{k}^3] = EI_2$$

	12	10	11	6	4	5	
12	0.096						12
10	0.144	0.325					10
11	0.192	0.356	0.533				11
6	-0.096	-0.144	-0.192	0.096			6
4	0.144	0.106	0.220	-0.144	0.325		4
5	0.192	0.220	0.235	-0.192	0.356	0.533	5

	6	4	5	15	13	14	
6	0.096						6
4	0.144	0.325					4
5	0.192	0.356	0.533				5
15	-0.096	-0.144	-0.192	0.096			15
13	0.144	0.106	0.220	-0.144	0.325		13
14	0.192	0.220	0.235	-0.192	0.356	0.533	14

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

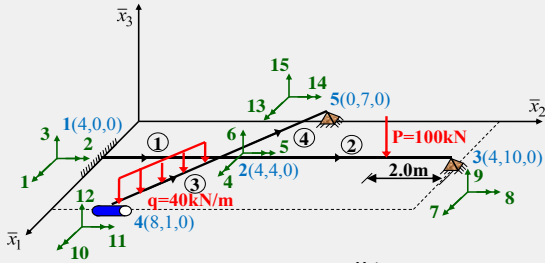


Σύνθεση στο
καθολικό μητρώο
στιβαρότητας της
εσχάρας

$$[\bar{K}] = \begin{matrix} & \left. \begin{matrix} \text{κόμβος 1} \\ \text{κόμβος 2} \\ \text{κόμβος 3} \\ \text{κόμβος 4} \\ \text{κόμβος 5} \end{matrix} \right\} & \begin{matrix} \text{κόμβος 1} & \text{κόμβος 2} & \text{κόμβος 3} & \text{κόμβος 4} & \text{κόμβος 5} \\ \begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^{-1} \\ \bar{k}_{kj}^{-1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^{-1} \\ \bar{k}_{kj}^{-1} + \bar{k}_{kk}^{-2} + \bar{k}_{jj}^{-2} \\ \bar{k}_{jk}^{-2} \\ \bar{k}_{jk}^{-3} \\ \bar{k}_{kj}^{-4} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{k}_{jk}^{-2} \\ \bar{k}_{kk}^{-2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{k}_{kj}^{-3} \\ 0 \\ \bar{k}_{jj}^{-3} \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{k}_{jk}^{-4} \\ 0 \\ 0 \\ \bar{k}_{kk}^{-4} \end{bmatrix} \end{matrix} \end{matrix}$$

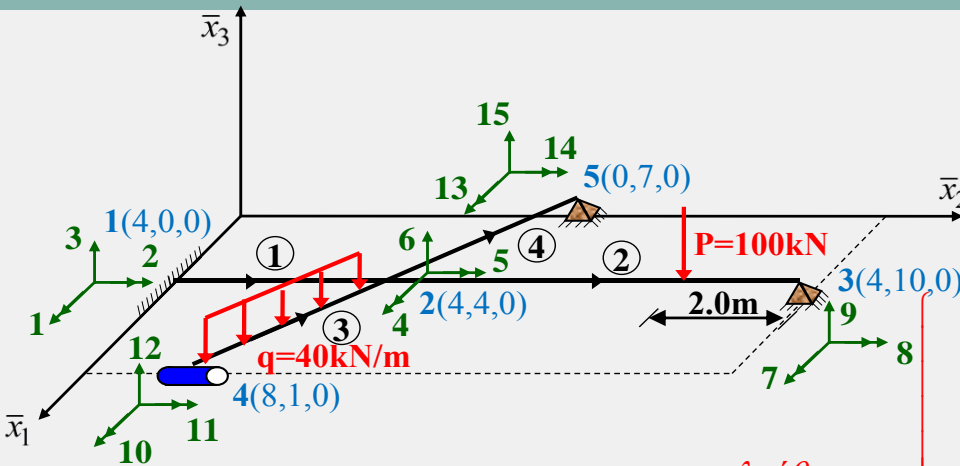
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Καθολικό μητρώο στιβαρότητας εσχάρας



	#1	#2	#3	#4	#5										
	3	1	2	6	4	5	9	7	8	12	10	11	15	13	14
$[K] = 7 EI_2$	0.187														
3															
1	0.375	1.0													
2	0	0	0.074												
6	-0.187	-0.375	0	0.434											
4	0.375	0.5	0	-0.209	2.316										
5	0	0	-0.074	0	0.710	1.189									
9	0	0	0	-0.055	-0.166	0	0.055								
7	0	0	0	0.166	0.333	0	-0.166	0.666							
8	0	0	0	0	0	-0.049	0	0	0.049						
12	0	0	0	-0.096	0.144	0.192	0	0	0	0.096					
10	0	0	0	-0.144	0.106	0.220	0	0	0	0.144	0.325				
11	0	0	0	-0.192	0.220	0.234	0	0	0	0.192	0.355	0.533			
15	0	0	0	-0.096	-0.144	-0.192	0	0	0	0	0	0	0.096		
13	0	0	0	0.144	0.106	0.220	0	0	0	0	0	0	-0.144	0.325	
14	0	0	0	0.192	0.220	0.234	0	0	0	0	0	0	-0.192	0.355	0.533

ΕΦΑΡΜΟΓΗ



ελεύθεροι
βαθμοί (free)

$$[\bar{K}_m] = [V][\bar{K}][V]^T = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{ff}] & [\bar{K}_{fs}] \\ [\bar{K}_{sf}] & [\bar{K}_{ss}] \end{bmatrix}$$

δεσμευμένοι
βαθμοί
(supported)

Μητρώο
αναδιάταξης
[V] εσχάρας

6	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	5
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	9
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	7
3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12
2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10
9	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	11
12	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	13
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	14

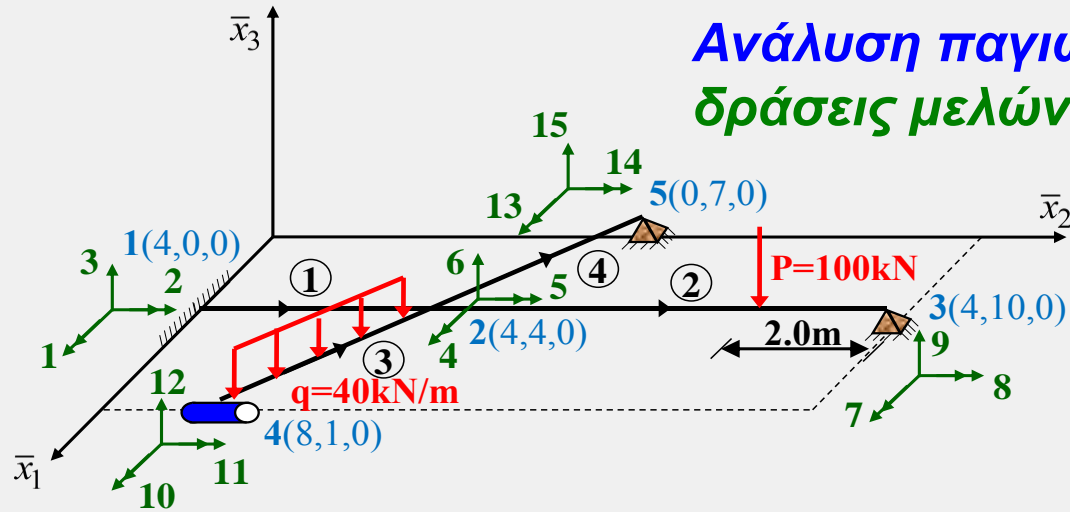
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

$$[\bar{K}_m] = [V][\bar{K}][V]^T = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{ff}] & [\bar{K}_{fs}] \\ [\bar{K}_{sf}] & [\bar{K}_{ss}] \end{bmatrix} = \text{Τροποποιημένο (λόγω αναδιάταξης) καθολικό μητρώο στιβαρότητας εσχάρας}$$

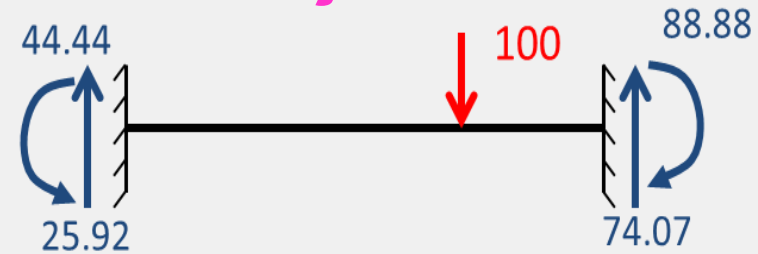
	6	4	5	7	8	11	13	14	3	1	2	9	12	10	15	
$= EI_2$	0.434															6
	-0.209	2.316														4
	0	0.710	1.189													5
	-0.166	0.333	0	0.666												7
	0	0	-0.049	0	0.049											8
	-0.192	0.220	0.234	0	0	0.533										11
	0.144	0.106	0.220	0	0	0	0.325									13
	0.192	0.220	0.234	0	0	0	0.355	0.533								14
	-0.187	0.375	0	0	0	0	0	0	0.187							3
	-0.375	0.5	0	0	0	0	0	0	0.375	1.0						1
	0	0	-0.074	0	0	0	0	0	0	0	0.074					2
	-0.055	-0.166	0	0.166	0	0	0	0	0	0	0	0.055				9
	-0.096	0.144	0.192	0	0	0.192	0	0	0	0	0	0	0.096			12
	-0.144	0.106	0.220	0	0	0.355	0	0	0	0	0	0	0.144	0.325		10
	-0.096	-0.144	-0.192	0	0	0	-0.144	-0.192	0	0	0	0	0	0	0.096	15

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ανάλυση παγιωμένου φορέα – Τοπικές ακραίες δράσεις μελών



Μέλος 2 :



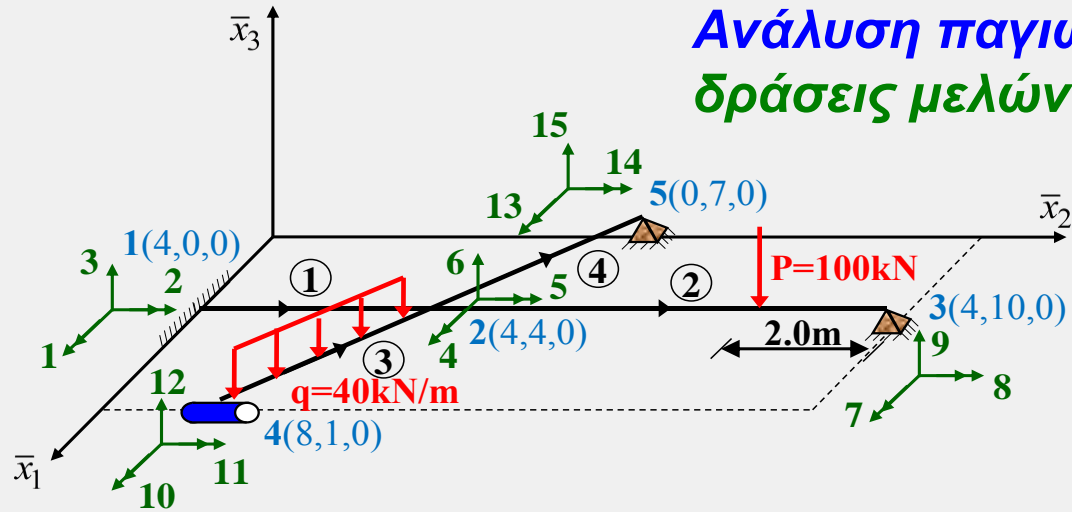
Μέλος 1 : αφόρτιστο

$$\{A_r^1\} = \begin{bmatrix} \{A_r^{1j}\} \\ \{A_r^{1k}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_3^{1j} \\ M_1^{1j} \\ M_2^{1j} \\ F_3^{1k} \\ M_1^{1k} \\ M_2^{1k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\{A_r^2\} = \begin{bmatrix} \{A_r^{2j}\} \\ \{A_r^{2k}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_3^{2j} \\ M_1^{2j} \\ M_2^{2j} \\ F_3^{2k} \\ M_1^{2k} \\ M_2^{2k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25.92 \\ 0 \\ -44.44 \\ 74.07 \\ 0 \\ 88.88 \end{bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ανάλυση παγιωμένου φορέα – Τοπικές ακραίες δράσεις μελών



Μέλος 3 :



Μέλος 4 : αφόρτιστο

$$\{A_r^4\} = \begin{bmatrix} \{A_r^{4j}\} \\ \{A_r^{4k}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_3^{4j} \\ M_1^{4j} \\ M_2^{4j} \\ F_3^{4k} \\ M_1^{4k} \\ M_2^{4k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\{A_r^3\} = \begin{bmatrix} \{A_r^{3j}\} \\ \{A_r^{3k}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_3^{3j} \\ M_1^{3j} \\ M_2^{3j} \\ F_3^{3k} \\ M_1^{3k} \\ M_2^{3k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ -83.33 \\ 100 \\ 0 \\ 83.33 \end{bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ανάλυση παγιωμένου φορέα – Καθολικές ακραίες δράσεις μελών

Μέλος 1 : αφόρτιστο

$$\left\{ \bar{A}_r^{-1} \right\} = \left[\Lambda_G^1 \right]^T \left\{ A_r^1 \right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

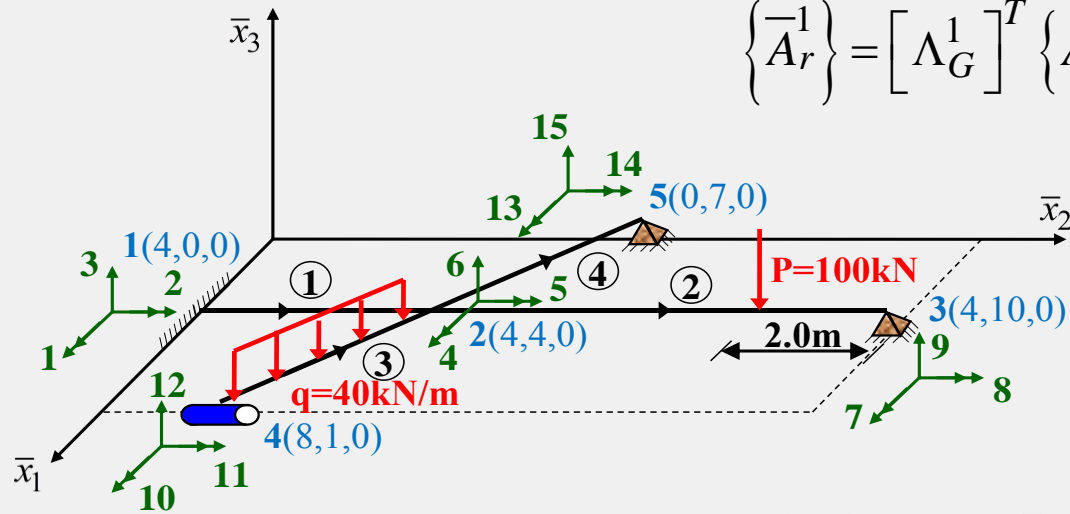
Μέλος 2 :

$$\left\{ \bar{A}_r^{-2} \right\} = \left[\Lambda_G^2 \right]^T \left\{ A_r^2 \right\} = \begin{Bmatrix} 25.92 \\ 44.44 \\ 0 \\ \dots \\ 74.07 \\ -88.88 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Μέλος 4 : αφόρτιστο

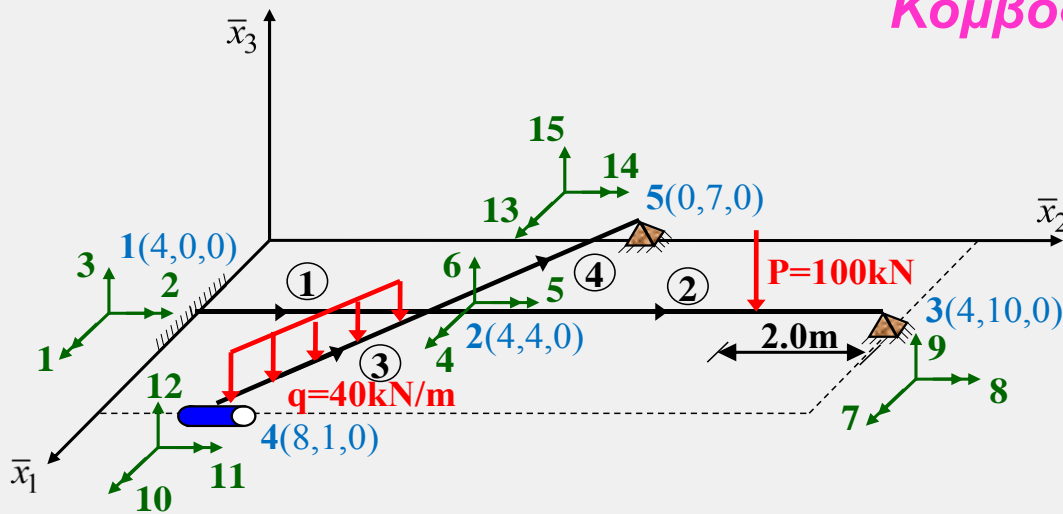
$$\left\{ \bar{A}_r^{-3} \right\} = \left[\Lambda_G^3 \right]^T \left\{ A_r^3 \right\} = \begin{Bmatrix} 100 \\ 50 \\ 66.66 \\ \dots \\ 100 \\ -50 \\ -66.66 \end{Bmatrix} \quad \left\{ \bar{A}_r^{-4} \right\} = \left[\Lambda_G^4 \right]^T \left\{ A_r^4 \right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Μέλος 3 :



ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ανάλυση παγιωμένου φορέα – Καθολικές
ακραίες δράσεις μελών – Δράσεις παγίωσης



Κόμβος 1 : $\{\bar{S}^{(1)}\} = \{\bar{A}_r^{1j}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

Κόμβος 2 :

$$\{\bar{S}^2\} = [\bar{A}_r^{1k}] + [\bar{A}_r^{2j}] + [\bar{A}_r^{3k}] + [\bar{A}_r^{4j}] = \begin{Bmatrix} 125.92 \\ -5.56 \\ -66.66 \end{Bmatrix}$$

Κόμβος 3 :

$$\{\bar{S}^3\} = [\bar{A}_r^{2k}] = \begin{Bmatrix} 74.07 \\ -88.88 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

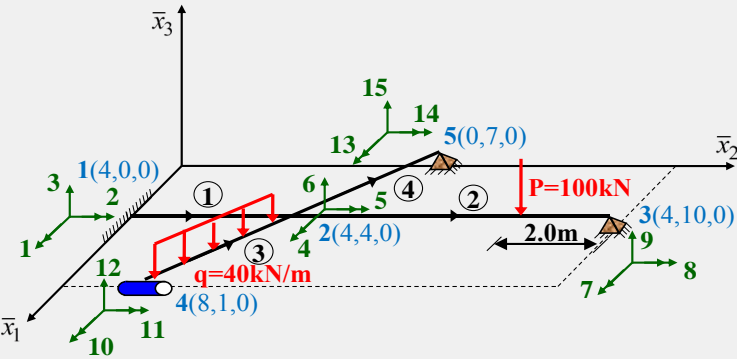
Κόμβος 4 :

$$\{\bar{S}^4\} = [\bar{A}_r^{3j}] = \begin{Bmatrix} 100 \\ 50 \\ 66.66 \end{Bmatrix}$$

Κόμβος 5 :

$$\{\bar{S}^5\} = [\bar{A}_r^{4k}] = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ



$$\{\bar{P}_m\} = \{\bar{P}_m^{nodal} - \bar{S}_m\} = \begin{bmatrix} \{\bar{P}_f\} \\ \{\bar{P}_s\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}_6 \\ \bar{M}_4 \\ \bar{M}_5 \\ \bar{M}_7 \\ \bar{M}_8 \\ \bar{M}_8 \\ \bar{M}_{11} \\ \bar{M}_{13} \\ \bar{M}_{14} \\ \bar{P}_3 \\ \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \\ \bar{P}_9 \\ \bar{P}_{12} \\ \bar{M}_{10} \\ \bar{P}_{15} \end{bmatrix}$$

**Τροποποιημένο
(λόγω αναδιάταξης)
διάνυσμα επικόμβιων
δράσεων εσχάρας**

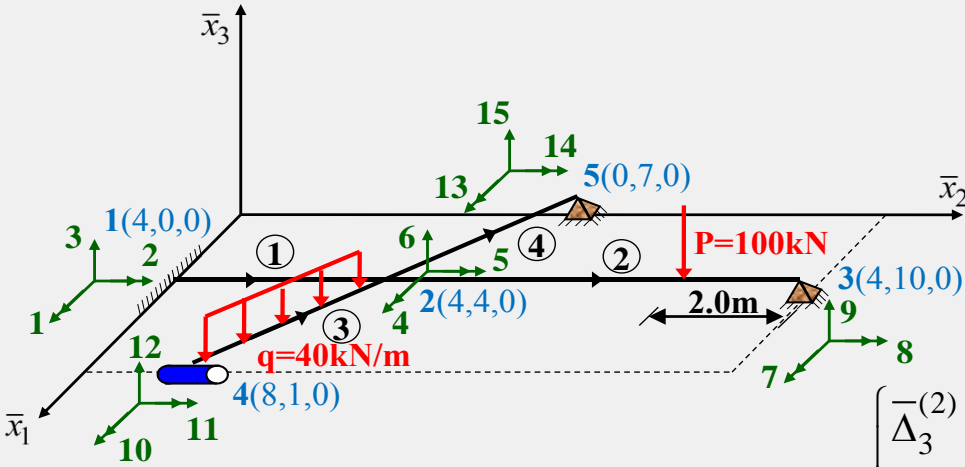
\bar{P}_6	-125.92	6
\bar{M}_4	5.56	4
\bar{M}_5	66.66	5
\bar{M}_7	88.88	7
\bar{M}_8	0	8
\bar{M}_8	-66.66	11
\bar{M}_{11}	0	13
\bar{M}_{13}	0	14
\bar{M}_{14}		14
\bar{P}_3	$\bar{R}_3^{(1)}$	3
\bar{M}_1	$\bar{M}_1^{(1)}$	1
\bar{M}_2	$\bar{M}_2^{(1)}$	2
\bar{P}_9	$\bar{R}_3^{(3)} - 74.07$	9
\bar{P}_{12}	$\bar{R}_3^{(4)} - 100$	12
\bar{M}_{10}	$\bar{M}_1^{(4)} - 50$	10
\bar{P}_{15}	$\bar{R}_3^{(5)}$	15

$$\{\bar{\Delta}_{mm}\} = \begin{bmatrix} \{\bar{\Delta}_f\} \\ \{\bar{\Delta}_s\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_{11} \\ \bar{\Delta}_{13} \\ \bar{\Delta}_{14} \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \bar{\Delta}_{12} \\ \bar{\Delta}_{10} \\ \bar{\Delta}_{15} \end{bmatrix}$$

**2 Τροποποιημένο
(λόγω αναδιάταξης)
διάνυσμα επικόμβιων μετακινήσεων
εσχάρας**

$\bar{\Delta}_6$	$\bar{\Delta}_3^{-(2)}$	6
$\bar{\Delta}_4$	$\bar{\Delta}_3^{-(2)}$	4
$\bar{\Delta}_5$	$\bar{\Theta}_1^{-(2)}$	5
$\bar{\Delta}_7$	$\bar{\Theta}_2^{-(2)}$	7
$\bar{\Delta}_8$	$\bar{\Theta}_1^{-(3)}$	8
$\bar{\Delta}_{11}$	$\bar{\Theta}_2^{-(3)}$	11
$\bar{\Delta}_{13}$	$\bar{\Theta}_1^{-(4)}$	13
$\bar{\Delta}_{14}$	$\bar{\Theta}_1^{-(5)}$	14
$\bar{\Delta}_3$	$\bar{\Theta}_1^{-(5)}$	3
$\bar{\Delta}_1$	0	1
$\bar{\Delta}_2$	0	2
$\bar{\Delta}_9$	0	9
$\bar{\Delta}_{12}$	0	12
$\bar{\Delta}_{10}$	0	10
$\bar{\Delta}_{15}$	0	15

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

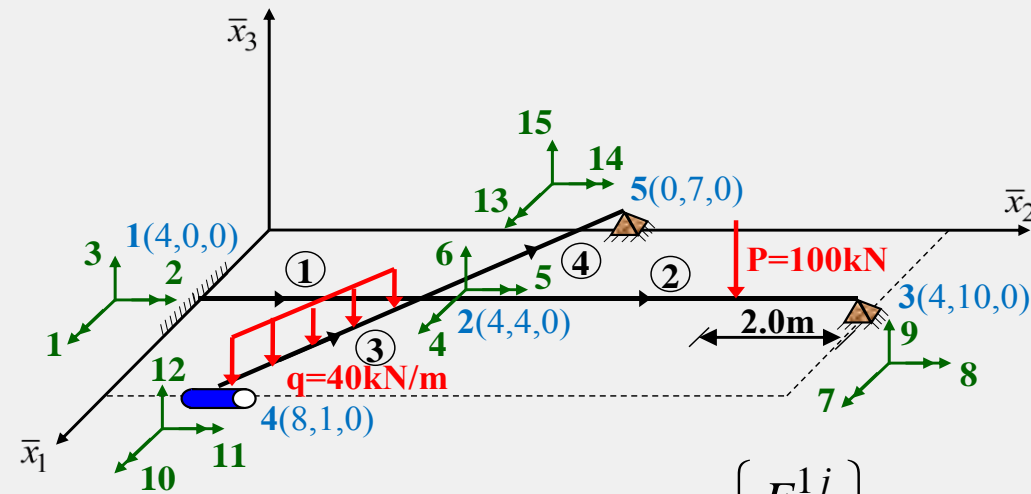


Επίλυση –
Επικόμβιες μετακινήσεις
κατά τους ελεύθερους και
επικόβιες δράσεις
(αντιδράσεις) κατά τους
δεσμευμένους β.ε.

$$\{\bar{\Delta}_f\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_3^{-(2)} \\ \bar{\Theta}_1^{-(2)} \\ \bar{\Theta}_2^{-(2)} \\ \bar{\Theta}_1^{-(3)} \\ \bar{\Theta}_2^{-(3)} \\ \bar{\Theta}_1^{-(4)} \\ \bar{\Theta}_1^{-(5)} \\ \bar{\Theta}_2^{-(5)} \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI_2} \begin{Bmatrix} -898.934 \\ -198.196 \\ 218.101 \\ 456.622 \\ 218.101 \\ -462.84 \\ -85.057 \\ 366.525 \end{Bmatrix} \quad \{\bar{P}_s\} = \begin{Bmatrix} \bar{R}_3^{-(1)} \\ \bar{M}_1^{-(1)} \\ \bar{M}_2^{-(1)} \\ \bar{R}_3^{-(3)} \\ \bar{R}_3^{-(4)} \\ \bar{M}_1^{-(4)} \\ \bar{R}_3^{-(5)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 93.777 \\ 238.002 \\ -16.139 \\ 6.542 \\ 10.767 \\ -7.888 \\ 14.837 \end{Bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Εσωτερικά εντατικά μεγέθη μελών εσχάρας



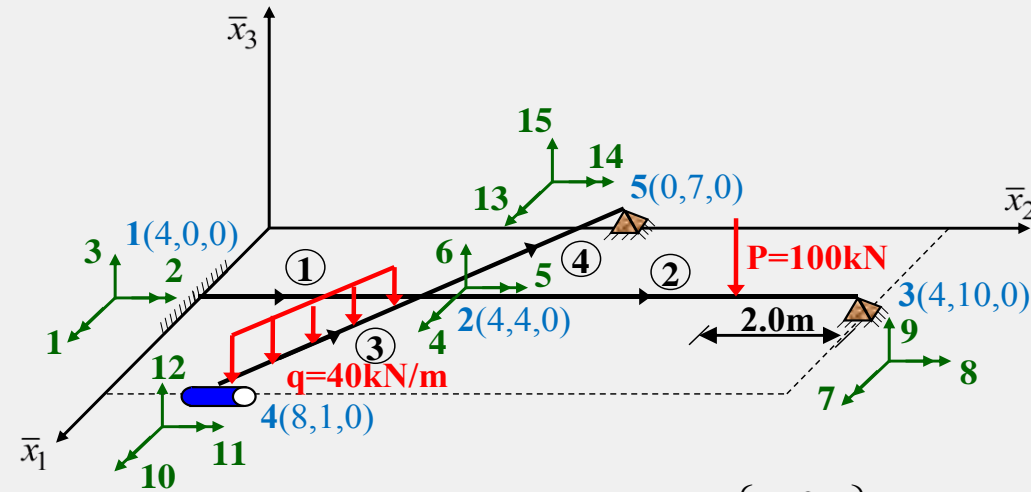
$$\{A^i\} = \{A_r^i\} + [k^i][\Lambda_G^i]\{\bar{D}^i\}$$

Μέλος 1 :

$$\{A^1\} = \{A_r^1\} + [k^1][\Lambda_G^1]\{\bar{D}^1\} = \begin{Bmatrix} F_3^{1j} \\ M_1^{1j} \\ M_2^{1j} \\ F_3^{1k} \\ M_1^{1k} \\ M_2^{1k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + [k^1][\Lambda_G^1] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -898.934 \\ -198.196 \\ 218.101 \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{EI_2} = \begin{Bmatrix} 93.777 \\ -16.139 \\ -238.002 \\ -93.777 \\ 16.139 \\ -138.99 \end{Bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Εσωτερικά εντατικά μεγέθη μελών εσχάρας



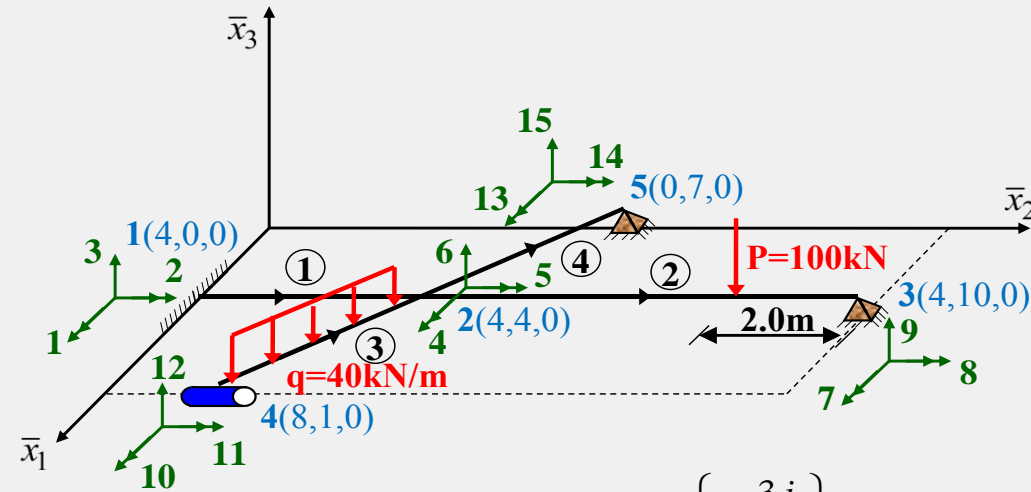
$$\{A^i\} = \{A_r^i\} + [k^i][\Lambda_G^i]\{\bar{D}^i\}$$

Μέλος 2 :

$$\{A^2\} = \{A_r^2\} + [k^2][\Lambda_G^2]\{\bar{D}^2\} = \begin{Bmatrix} F_3^{2j} \\ M_1^{2j} \\ M_2^{2j} \\ F_3^{2k} \\ M_1^{2k} \\ M_2^{2k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 25.92 \\ 0 \\ -44.44 \\ 74.07 \\ 0 \\ 88.88 \end{Bmatrix} + [k^2][\Lambda_G^2] \begin{Bmatrix} -898.934 \\ -198.196 \\ 218.101 \\ 0 \\ 456.622 \\ 218.101 \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{EI_2} = \begin{Bmatrix} 19.383 \\ 0 \\ 84.722 \\ 80.617 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Εσωτερικά εντατικά μεγέθη μελών εσχάρας



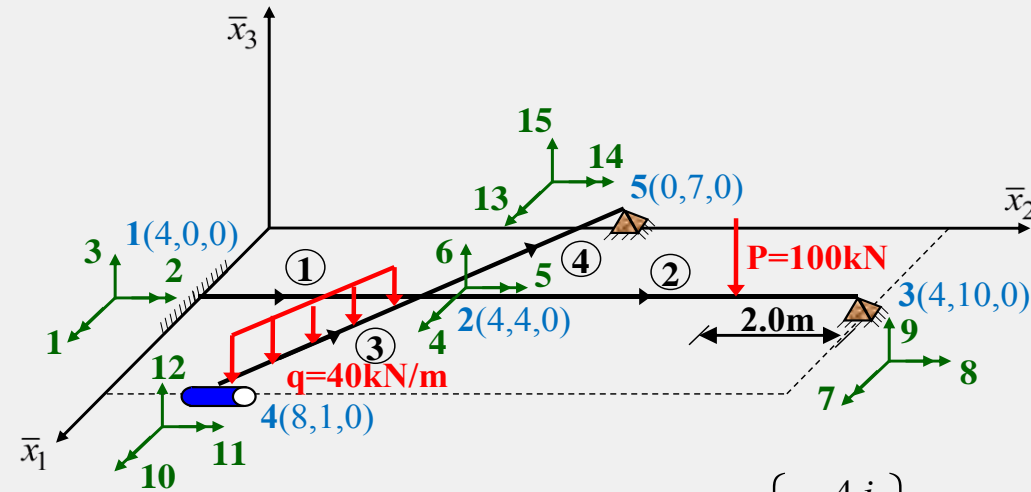
$$\{A^i\} = \{A_r^i\} + [k^i][\Lambda_G^i]\{\bar{D}^i\}$$

Μέλος 3 :

$$\{A^3\} = \{A_r^3\} + [k^3][\Lambda_G^3]\{\bar{D}^3\} = \begin{Bmatrix} F_3^{3j} \\ M_1^{3j} \\ M_2^{3j} \\ F_3^{3k} \\ M_1^{3k} \\ M_2^{3k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 100 \\ 0 \\ -83.33 \\ 100 \\ 0 \\ 83.33 \end{Bmatrix} + [k^3][\Lambda_G^3] \begin{Bmatrix} 0 \\ -462.84 \\ 0 \\ -898.934 \\ -198.196 \\ 218.101 \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{EI_2} = \begin{Bmatrix} 110.767 \\ -33.148 \\ -25.085 \\ 89.233 \\ 33.148 \\ -28.752 \end{Bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Εσωτερικά εντατικά μεγέθη μελών εσχάρας

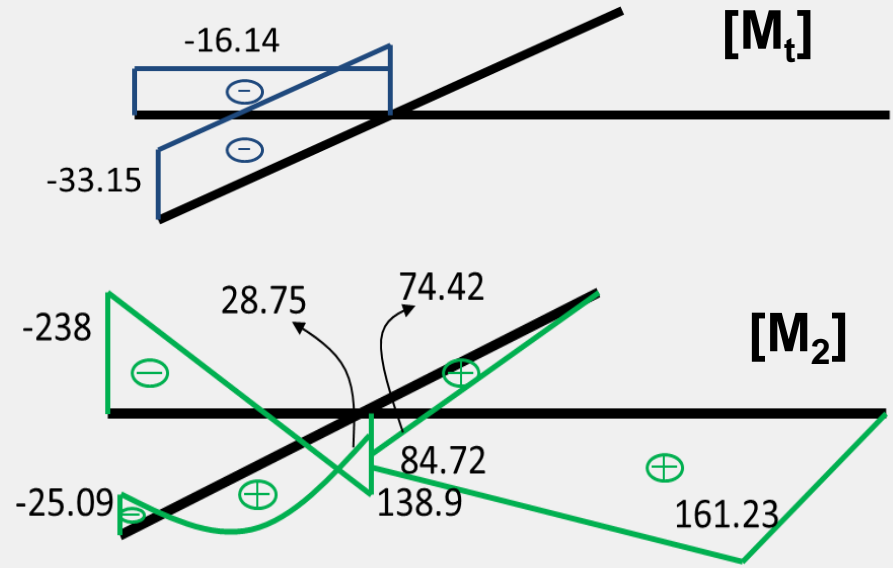
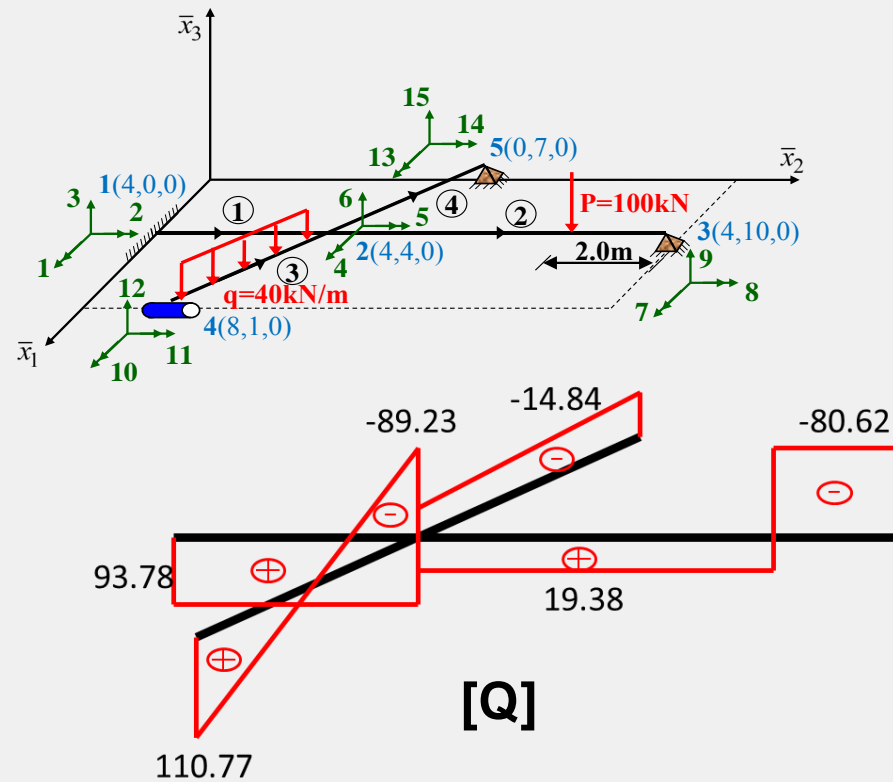


$$\{A^i\} = \{A_r^i\} + [k^i][\Lambda_G^i]\{\bar{D}^i\}$$

Μέλος 4 :

$$\{A^4\} = \{A_r^4\} + [k^4][\Lambda_G^4]\{\bar{D}^4\} = \begin{Bmatrix} F_3^{4j} \\ M_1^{4j} \\ M_2^{4j} \\ F_3^{4k} \\ M_1^{4k} \\ M_2^{4k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + [k^4][\Lambda_G^4] \begin{Bmatrix} -898.934 \\ -198.196 \\ 218.101 \\ 0 \\ -85.057 \\ 366.525 \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{EI_2} = \begin{Bmatrix} -14.837 \\ 0.122 \\ 74.419 \\ 14.837 \\ -0.122 \\ -0.229 \end{Bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ



Διαγράμματα
εσωτερικών
εντατικών μεγεθών
μελών εσχάρας

Παραμορφωμένη
εικόνα εσχάρας

