



ΕΠΙΠΕΔΑ ΠΛΑΙΣΙΑ

Ε.Ι. Σαπουντζάκης
Καθηγητής ΕΜΠ

**ΑΝΑΛΥΣΗ ΡΑΒΔΩΤΩΝ ΦΟΡΕΩΝ ΜΕ
ΜΗΤΡΩΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ**

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή
2. Παρουσίαση επίπεδου πλαισίου
3. Διανύσματα ακραίων δράσεων στοιχείου επίπεδου πλαισίου
4. Διανύσματα ακραίων μετακινήσεων στοιχείου επίπεδου πλαισίου
5. Μητρώο μετασχηματισμού στοιχείου επίπεδου πλαισίου
6. Τοπικό μητρώο στιβαρότητας στοιχείου επίπεδου πλαισίου
7. Καθολικό μητρώο στιβαρότητας στοιχείου επίπεδου πλαισίου

Περιεχόμενα

8. Διανύσματα επικόμβιων δράσεων και μετακινήσεων επίπεδου πλαισίου
9. Καθολικό μητρώο στιβαρότητας επίπεδου πλαισίου
10. Τροποποίηση (αναδιάταξη) καθολικού μητρώου στιβαρότητας επίπεδου πλαισίου λόγω στήριξης -Μητρώο Αναδιάταξης
11. Τροποποίηση καθολικού μητρώου στιβαρότητας επίπεδου πλαισίου λόγω κεκλιμένης στήριξης - Ελαστική στήριξη
12. Επίπεδο πλαίσιο υποβαλλόμενο σε ενδιάμεσα φορτία
13. Εσωτερικά εντατικά μεγέθη μελών επίπεδου πλαισίου

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι **δομικοί φορείς** αποτελούνται από συζευγμένα μεταξύ τους **γραμμικά στοιχεία** (οριζόντιες δοκοί, κατακόρυφα υποστυλώματα, ράβδοι - ελκυστήρες), **επιφανειακά στοιχεία** (πλάκες ορόφων, ανωδομές γεφυρών, τοιχεία) και **στοιχεία όγκου** (θεμέλια υποστυλωμάτων, φρεάτια θεμελίωσης μεσοβάθρων).

Ο **συνδυασμός γραμμικών στοιχείων** συνδεδεμένων μεταξύ τους μέσω κυρίως μονολιθικών συνδέσεων (χωρίς να αποκλείονται και κάποιες εσωτερικές ελευθερώσεις) δημιουργεί δομικούς φορείς που ονομάζονται **πλαισιακοί φορείς** ή απλώς **πλαίσια** ενώ η στήριξη των φορέων αυτών στο έδαφος θεμελίωσης μπορεί να γίνει με πολλούς διαφορετικούς τρόπους. Λόγω της ύπαρξης των μονολιθικών συνδέσεων σε πλαισιακούς φορείς υπό τυχούσα εξωτερική φόρτιση **κυριαρχεί η καμπτική επιπόνηση**.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ



Στην πράξη συχνά συναντώνται **φορείς**, οι οποίοι **συνθέτονται από στοιχεία ενός μόνου τύπου**, π.χ. γραμμικά στοιχεία ή και μικτοί φορείς τμήματα των οποίων (υποφορείς) αποτελούνται από στοιχεία του ίδιου τύπου. **Το χαρακτηριστικό στοιχείο επίπεδου ολόσωμου γραμμικού φορέα είναι η δοκός**. Ως δοκός νοείται το ευθύγραμμο δομικό στοιχείο, του οποίου η οριζόντια διαμήκης διεύθυνση, η οποία αποτελεί τον άξονα της δοκού, έχει διάσταση κατά πολύ μεγαλύτερη από αυτές των δύο εγκάρσιων διευθύνσεων.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ



Οι δοκοί καταπονούνται με φορτία τόσο κατά μήκος όσο και κάθετα στο διαμήκη άξονα τους, με πιο κοινά τα **συγκεντρωμένα** και τα **κατανεμημένα φορτία**. Η διατομή μιας δοκού (απλής, συνεχούς ή σύνθετης) **δεν είναι απαραίτητα συμπαγής**, αλλά στην περίπτωση μεγάλων ανοιγμάτων μπορεί να είναι κοίλη περιλαμβάνοντας κυκλικά ή ορθογωνικά **κενά** (μορφή απλού ή πολλαπλού κιβωτίου, η οποία συναντάται συχνά στη γεφυροποιία).

ΕΙΣΑΓΩΓΗ



Η ποικιλία των πιθανών **συνδυασμών γραμμικών στοιχείων** προς δημιουργία επίπεδων πλαισίων είναι πολύ μεγάλη. Παρουσιάζεται **πασσαλότοιχος αντιστήριξης** πρανών αποτελούμενος από κατακόρυφους πασσάλους μονολιθικά συνδεδεμένους στην κορυφή τους με κεφαλόδεσμο και **μεσόβαθρο γέφυρας** αποτελούμενο από κατακόρυφους στύλους μονολιθικά συνδεδεμένους στην κορυφή τους με δοκό έδρασης της ανωδομής, μορφώνοντας έτσι αντίστοιχους πλαισιακούς φορείς.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Κατά την ανάλυση μιας πλαισιακής κατασκευής, η οποία αποτελείται από υποστυλώματα και δοκούς, χρησιμοποιούνται στοιχεία δοκών τόσο για τις δοκούς όσο και για υποστυλώματα. Η ανάλυση επίπεδου ολόσωμου φορέα έχει ως στόχο τον υπολογισμό των μετακινήσεων (μετατοπίσεις, στροφές) των κόμβων του, των αντιδράσεων των στηρίξεων του και των εσωτερικών εντατικών μεγεθών σε κάθε διατομή των δομικών στοιχείων του. Στην περίπτωση δοκού ολόσωμου φορέα στο επίπεδο Oxy , τα εσωτερικά εντατικά μεγέθη είναι η αξονική δύναμη $N(x)$, η τέμνουσα δύναμη $Q_y(x)$ και η καμπτική ροπή $M_z(x)$, τα οποία δίνονται από τις σχέσεις

$$N(x) = \iint_A \sigma_{xx} dA \quad Q_y(x) = \iint_A \tau_{xy} dA \quad M_z(x) = \iint_A \sigma_{xx} y dA$$

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Έτσι, γνωρίζοντας ότι τα εσωτερικά εντατικά μεγέθη διατομής είναι ουσιαστικά οι συνισταμένες δυνάμεις και ροπές των ορθών και διατμητικών τάσεων που ασκούνται στη διατομή, εύκολα συμπεραίνεται ότι **μετά τον υπολογισμό των εσωτερικών εντατικών μεγεθών μπορεί να ακολουθήσει ο προσδιορισμός των αντίστοιχων εσωτερικών τάσεων** κάνοντας κάποιες θεωρήσεις σχετικά με την κατανομή των τάσεων αυτών στη διατομή της δοκού. **Ο υπολογισμός των εσωτερικών τάσεων αποτελεί και το κριτήριο ελέγχου της αντοχής του φορέα.**

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Έτσι, γνωρίζοντας ότι τα εσωτερικά εντατικά μεγέθη διατομής είναι ουσιαστικά οι συνισταμένες δυνάμεις και ροπές των ορθών και διατμητικών τάσεων που ασκούνται στη διατομή, εύκολα συμπεραίνεται ότι **μετά τον υπολογισμό των εσωτερικών εντατικών μεγεθών μπορεί να ακολουθήσει ο προσδιορισμός των αντίστοιχων εσωτερικών τάσεων** κάνοντας κάποιες θεωρήσεις σχετικά με την κατανομή των τάσεων αυτών στη διατομή της δοκού. **Ο υπολογισμός των εσωτερικών τάσεων αποτελεί και το κριτήριο ελέγχου της αντοχής του φορέα.**

Έτσι, **κατά την αναλυτική επίλυση** επίπεδου ολόσωμου φορέα επιδιώκεται ο **υπολογισμός και η γραφική απεικόνιση των εσωτερικών εντατικών μεγεθών των μελών του**. Για τη χάραξη των διαγραμμάτων των εσωτερικών εντατικών μεγεθών συνήθως είναι αρκετή η γνώση κάποιων χαρακτηριστικών τιμών τους με βάση τις οποίες μπορούν εύκολα αυτά να σχεδιαστούν.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Επίσης, επειδή συνήθως ενδιαφέρουν **τα μέγιστα εντατικά μεγέθη** **κάθε μέλους φορέα υποβαλλόμενου σε διάφορες φορτίσεις** είναι ιδιαίτερα χρήσιμη και κοινή στην πράξη, η κατασκευή και χρήση **περιβαλλουσών διαγραμμάτων εντατικών μεγεθών**. Οι **περιβάλλουσες** εντατικών μεγεθών **είναι καμπύλες ή ευθείες** που απεικονίζουν τις μέγιστες τιμές των εντατικών μεγεθών κατά μήκος δομικού μέλους, λαμβάνοντας υπόψη τις διάφορες περιπτώσεις και συνδυασμούς επιβαλλόμενων φορτίσεων, στις οποίες αυτό υποβάλλεται.

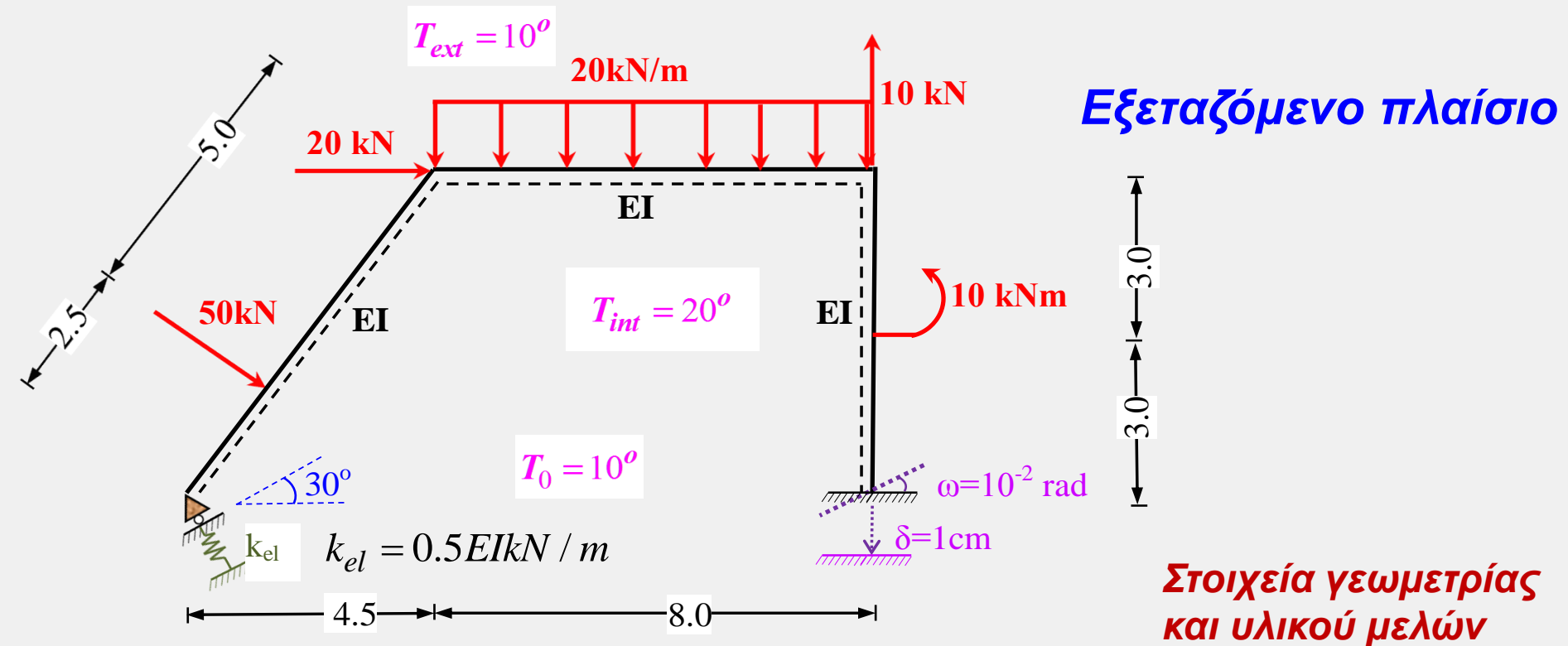
ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Επίσης, επειδή συνήθως ενδιαφέρουν **τα μέγιστα εντατικά μεγέθη** **κάθε μέλους φορέα υποβαλλόμενου σε διάφορες φορτίσεις** είναι ιδιαίτερα χρήσιμη και κοινή στην πράξη, η κατασκευή και χρήση **περιβαλλουσών διαγραμμάτων εντατικών μεγεθών**. Οι **περιβάλλουσες** εντατικών μεγεθών **είναι καμπύλες ή ευθείες** που απεικονίζουν τις μέγιστες τιμές των εντατικών μεγεθών κατά μήκος δομικού μέλους, λαμβάνοντας υπόψη τις διάφορες περιπτώσεις και συνδυασμούς επιβαλλόμενων φορτίσεων, στις οποίες αυτό υποβάλλεται.

Για την ανάλυση επίπεδων ολόσωμων φορέων, οι οποίοι συνθέτονται αποκλειστικά από γραμμικά στοιχεία χρησιμοποιείται **η Μέθοδος Άμεσης Στιβαρότητας**. Χαρακτηρίζοντας ως “επίπεδους” τους φορείς αυτούς, θεωρείται ότι όλα τα μέλη του φορέα ανήκουν σε ένα επίπεδο καθώς επίσης και η φόρτιση του φορέα ενεργεί στο επίπεδο αυτό.

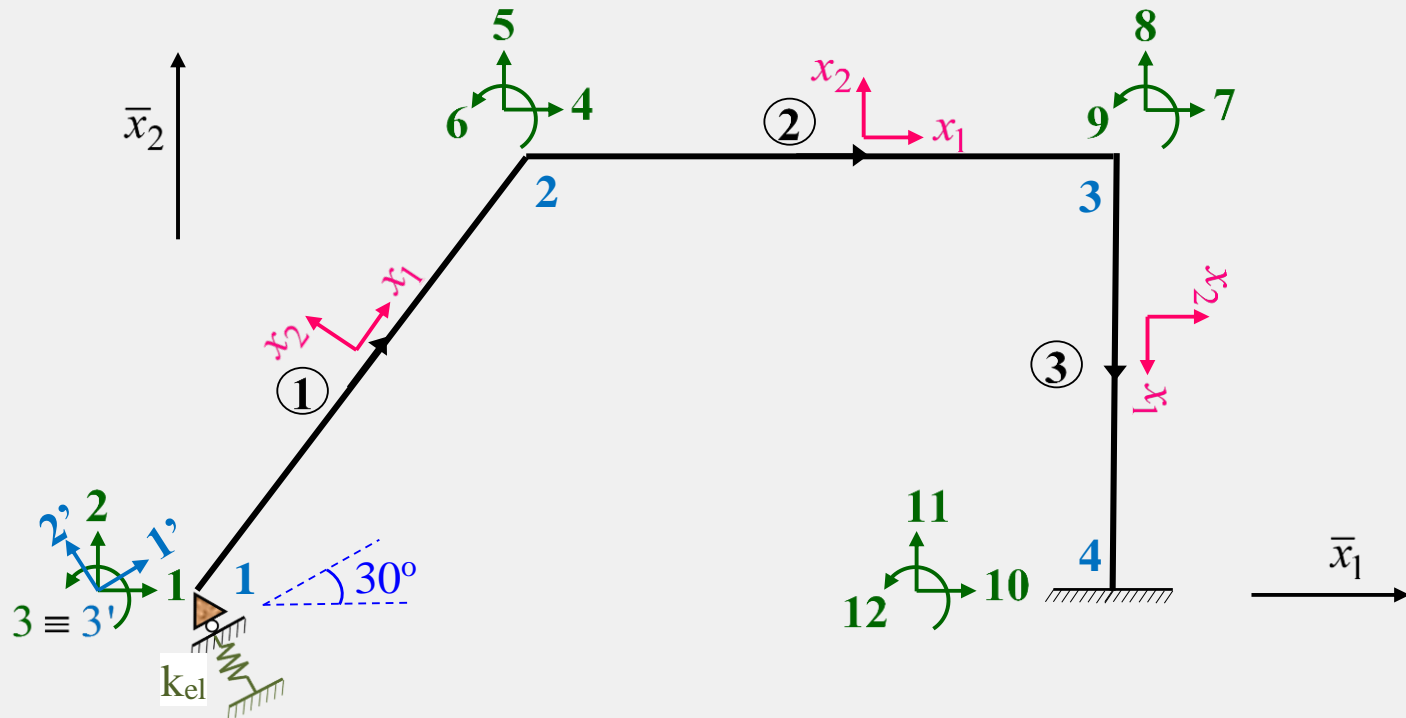
ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ



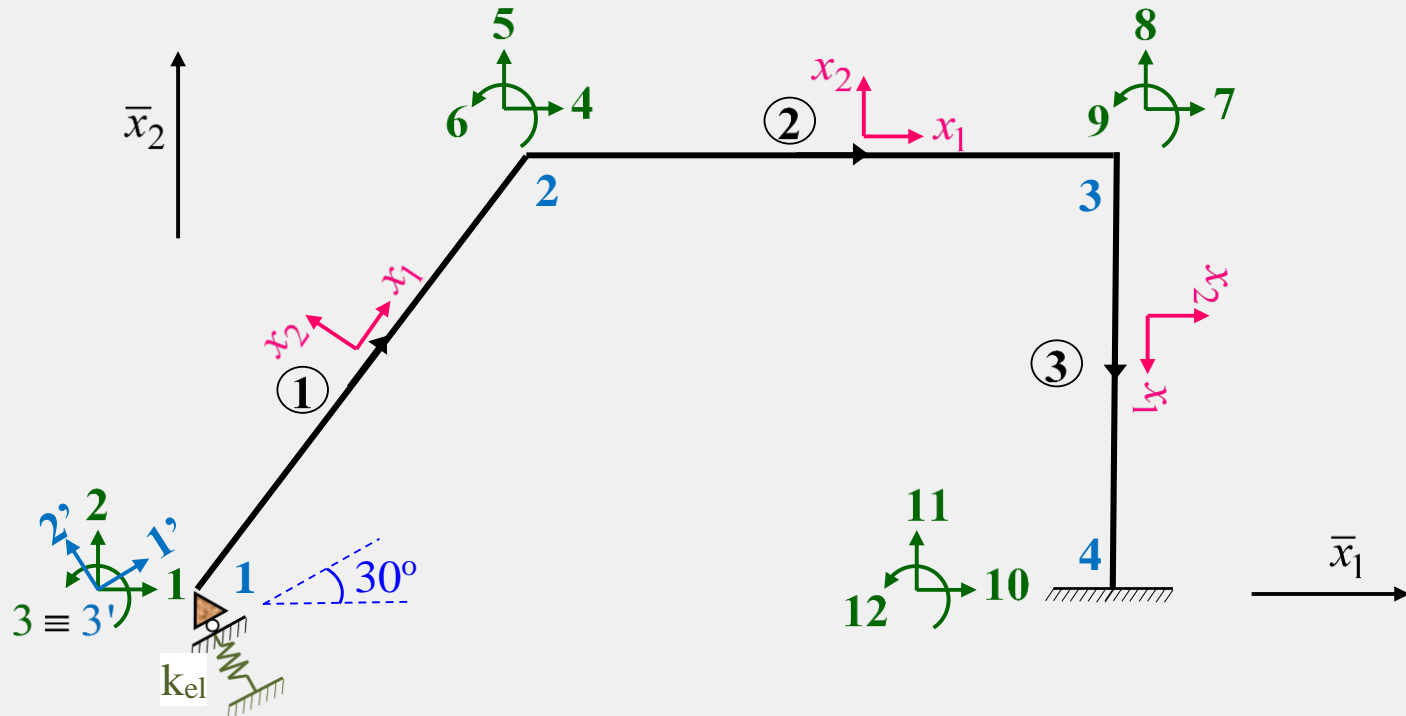
Τα μέλη του πλαισίου είναι κατασκευασμένα από ομογενές και ισότροπο υλικό ($E = 2.1 \times 10^8 \text{ kN} / \text{m}^2$) και είναι διατομής $A = 0.12 \text{ m}^2$ με ύψος διατομής $h = 0.45 \text{ m}$ και ροπή αδράνειας $I = 0.0016 \text{ m}^4$.

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ



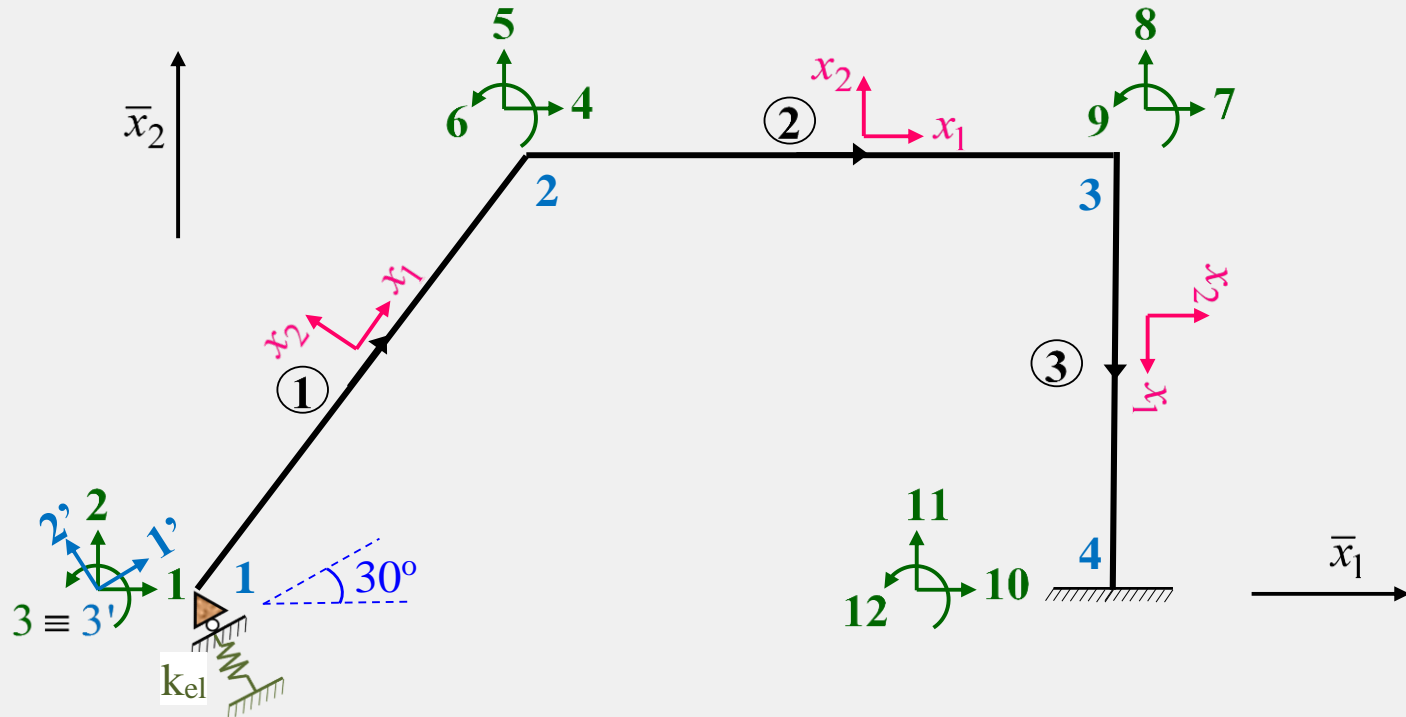
Σημείο εκκίνησης για την ανάλυση του επίπεδου πλαισίου αποτελεί η **αρίθμηση των κόμβων και των μελών** του. Επίσης, επιλέγεται το δεξιόστροφο ορθογώνιο ως **καθολικό σύστημα αξόνων**, ως προς το οποίο θα γίνει η ανάλυση του φορέα και ο υπολογισμός των **κινηματικών μεγεθών** των κόμβων του και των **αντιδράσεων** των στηρίξεων του.

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ



Ακολουθως, εισάγεται **τοπικό σύστημα αναφοράς** για κάθε ένα από τα στοιχεία που συνθέτουν το πλαίσιο. Για τον καθορισμό του συστήματος αυτού, σε κάθε μέλος ορίζεται ως άξονας x_1 αυτός που έχει διεύθυνση εκείνη του μέλους και φορά από τον κόμβο με μικρότερο προς τον κόμβο με μεγαλύτερο αύξοντα αριθμό.

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

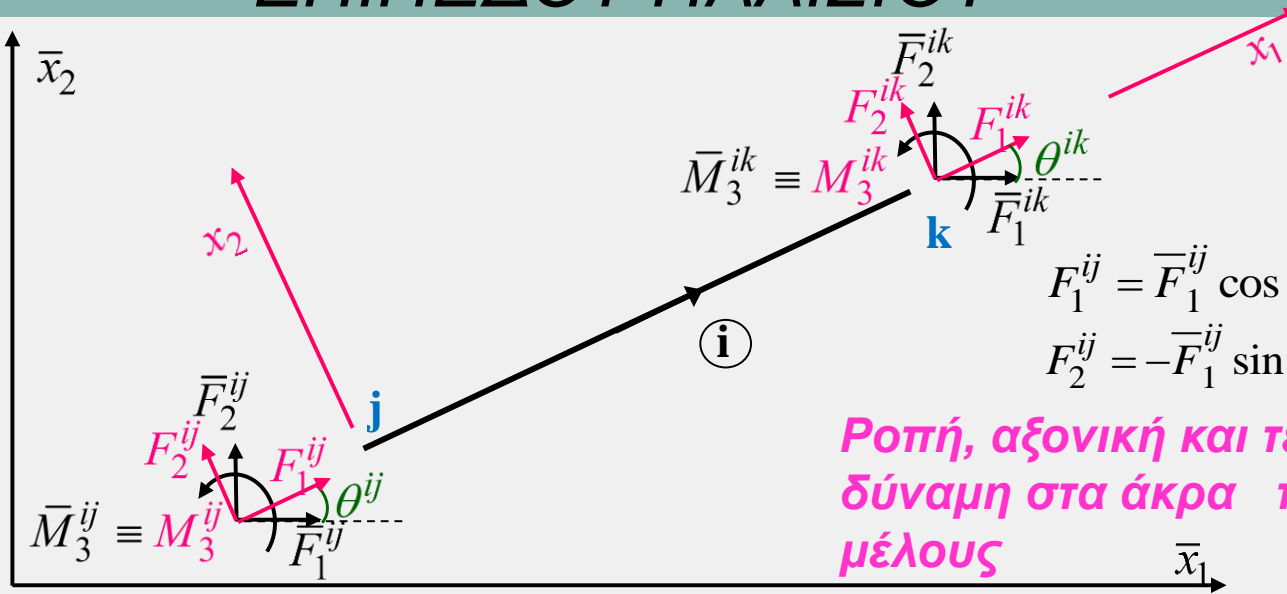


Τέλος, καθορίζονται οι **βαθμοί ελευθερίας κίνησης των κόμβων** του (κινηματική αοριστία), όπου στο βήμα αυτό **αμελείται ο τρόπος στήριξης του πλαισίου**. Έτσι, γνωρίζοντας ότι **κάθε κόμβος διαθέτει τρεις βαθμούς ελευθερίας κίνησης**, οι βαθμοί ελευθερίας κίνησης του φορέα θα είναι $3N$, όπου N ο αριθμός των κόμβων (nodes) του πλαισίου.

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΑΚΡΑΙΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΑΚΡΑΙΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

**Τοπικό και
καθολικό
διάνυσμα
ακραίων
δράσεων**



$$F_1^{ij} = \bar{F}_1^{ij} \cos \theta^{ij} + \bar{F}_2^{ij} \sin \theta^{ij}$$

$$F_2^{ij} = -\bar{F}_1^{ij} \sin \theta^{ij} + \bar{F}_2^{ij} \cos \theta^{ij}$$

**Ροπή, αξονική και τέμνουσα
δύναμη στα άκρα του
μέλους**

άκρου j

άκρου k

$$\{A^{ij}\} = \begin{Bmatrix} F_1^{ij} \\ F_2^{ij} \\ M_3^{ij} \end{Bmatrix}$$

$$\{A^{ik}\} = \begin{Bmatrix} F_1^{ik} \\ F_2^{ik} \\ M_3^{ik} \end{Bmatrix}$$

$$\{A^i\} = \begin{Bmatrix} \{A^{ij}\} \\ \{A^{ik}\} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} F_1^{ij} \\ F_2^{ij} \\ M_3^{ij} \\ F_1^{ik} \\ F_2^{ik} \\ M_3^{ik} \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{A}^i\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{A}^{ij}\} \\ \{\bar{A}^{ik}\} \end{Bmatrix}$$

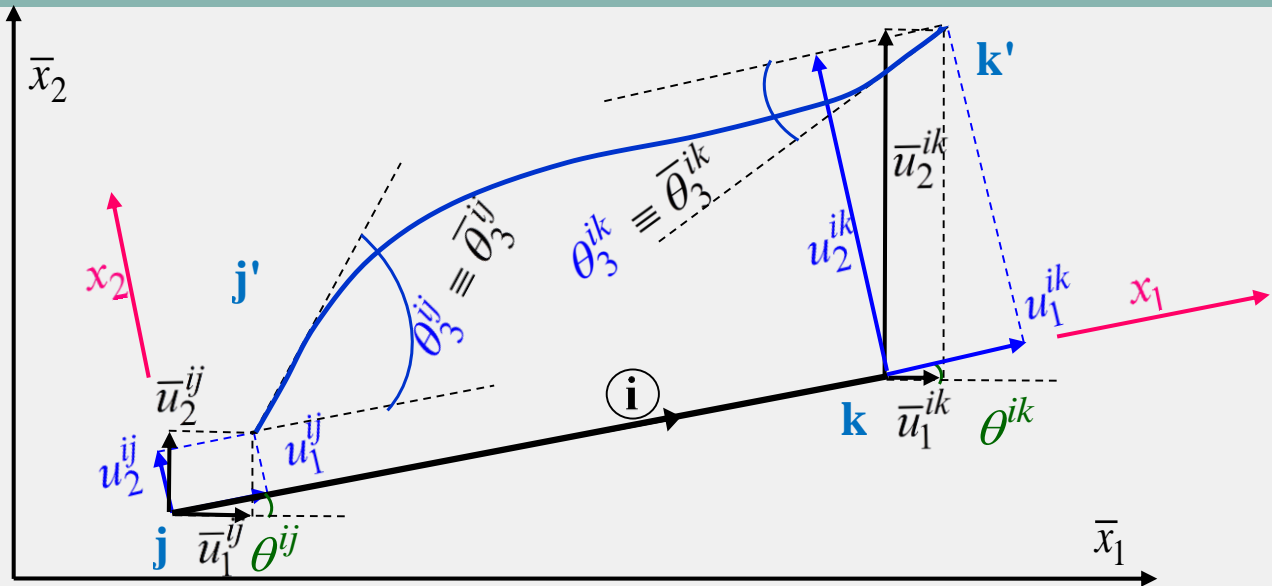
**όλου του
στοιχείου**

$$= \begin{Bmatrix} \bar{F}_1^{ij} \\ \bar{F}_2^{ij} \\ \bar{M}_3^{ij} \\ \bar{F}_1^{ik} \\ \bar{F}_2^{ik} \\ \bar{M}_3^{ik} \end{Bmatrix}$$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΑΚΡΑΙΩΝ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΑΚΡΑΙΩΝ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Τοπικό και καθολικό διάνυσμα ακραίων μετακινήσεων



$\{D^{ij}\} = \begin{Bmatrix} u_1^{ij} \\ u_2^{ij} \\ g_3^{ij} \end{Bmatrix}$
 άκρου j

$\{D^{ik}\} = \begin{Bmatrix} u_1^{ik} \\ u_2^{ik} \\ g_3^{ik} \end{Bmatrix}$
 άκρου k

$\{D^i\} = \begin{bmatrix} \{D^{ij}\} \\ \{D^{ik}\} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1^{ij} \\ u_2^{ij} \\ g_3^{ij} \\ u_1^{ik} \\ u_2^{ik} \\ g_3^{ik} \end{Bmatrix}$

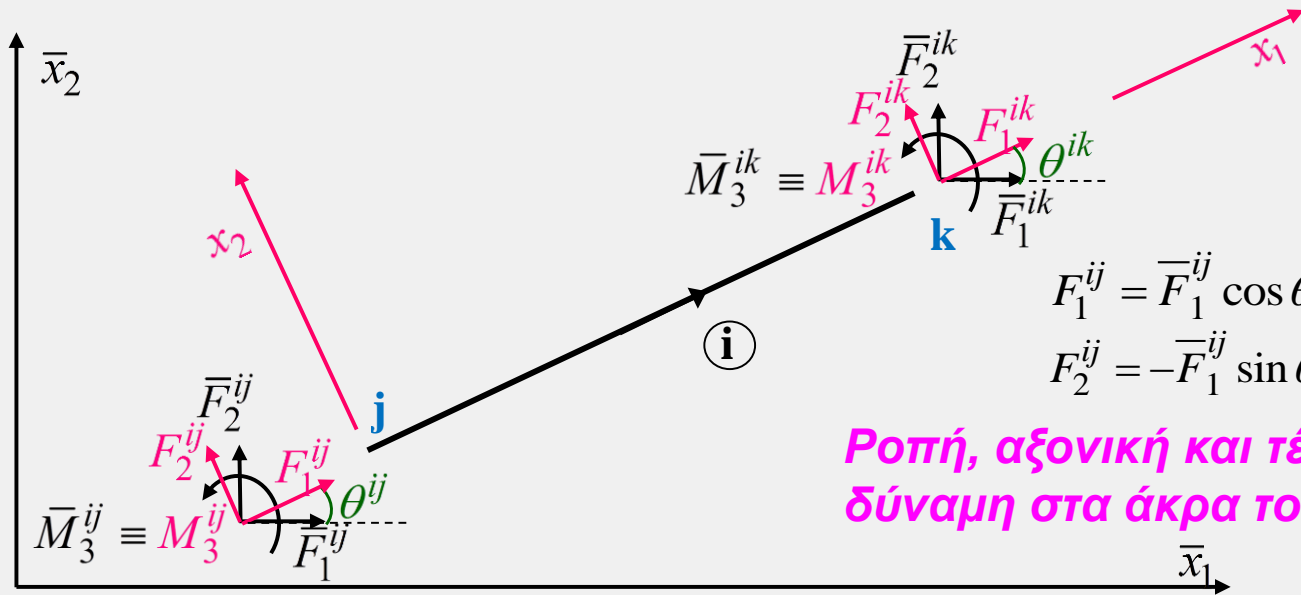
όλου του στοιχείου

$\{\bar{D}^i\} = \begin{bmatrix} \{\bar{D}^{ij}\} \\ \{\bar{D}^{ik}\} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} -ij \\ u_1 \\ -ij \\ u_2 \\ -ij \\ g_3 \\ -ik \\ u_1 \\ -ik \\ u_2 \\ -ik \\ g_3 \end{Bmatrix}$

ΜΗΤΡΩΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

ΜΗΤΡΩΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Στο άκρο j
μέλους
επίπεδου
πλασίου



$$F_1^{ij} = \bar{F}_1^{ij} \cos \theta^{ij} + \bar{F}_2^{ij} \sin \theta^{ij}$$

$$F_2^{ij} = -\bar{F}_1^{ij} \sin \theta^{ij} + \bar{F}_2^{ij} \cos \theta^{ij}$$

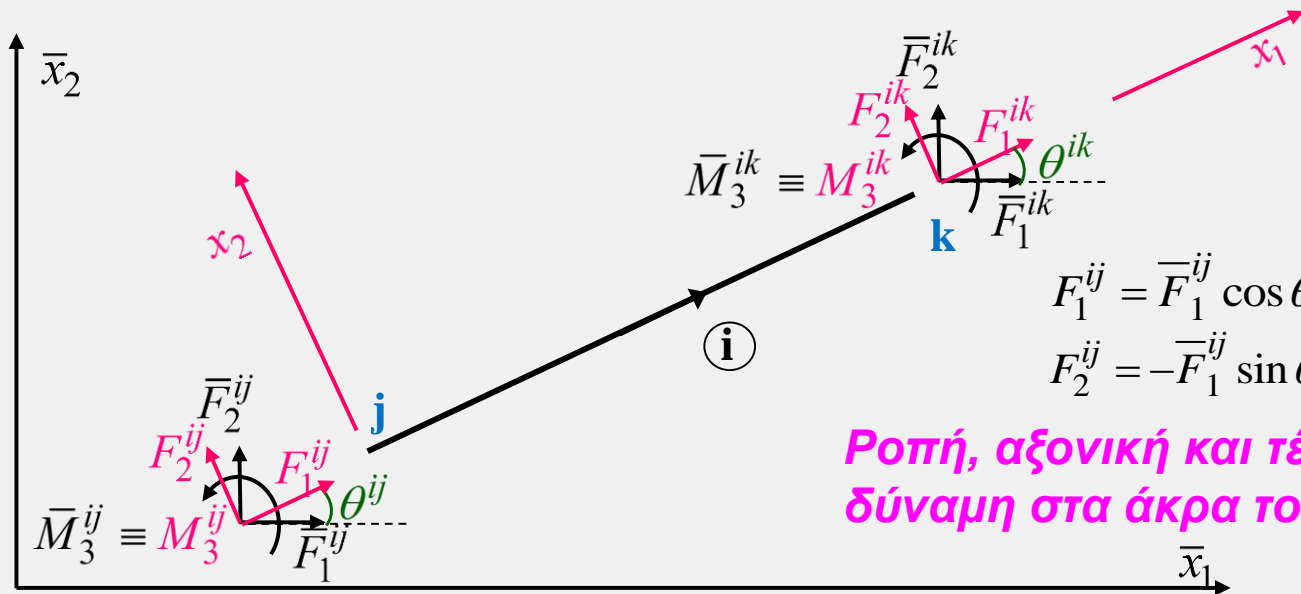
Ροπή, αξονική και τέμνουσα
δύναμη στα άκρα του μέλους

$$\{A^{ij}\} = \begin{Bmatrix} F_1^{ij} \\ F_2^{ij} \\ M_3^{ij} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta^{ij} & \sin \theta^{ij} & 0 \\ -\sin \theta^{ij} & \cos \theta^{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{F}_1^{ij} \\ \bar{F}_2^{ij} \\ \bar{M}_3^{ij} \end{Bmatrix} = [\Lambda_{PF}^{ij}] \{A^{ij}\}$$

όπου $[\Lambda_{PF}^{ij}] = \begin{bmatrix} \cos \theta^{ij} & \sin \theta^{ij} & 0 \\ -\sin \theta^{ij} & \cos \theta^{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ΜΗΤΡΩΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

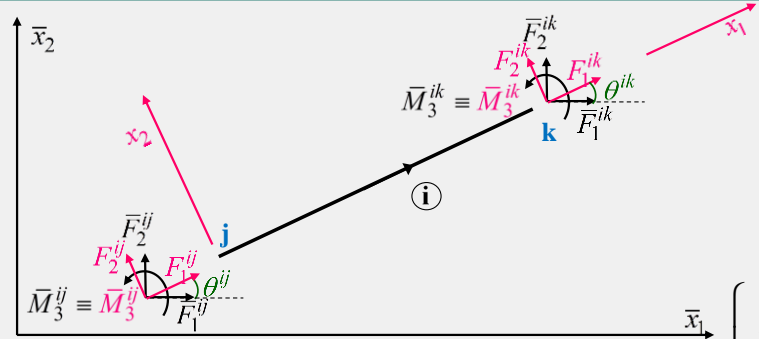
Παρομοίως
στο άκρο k
μέλους
επίπεδου
πλασίου



$$\left\{ A^{ik} \right\} = \left\{ \begin{matrix} F_1^{ik} \\ F_2^{ik} \\ M_3^{ik} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} \cos \theta^{ik} & \sin \theta^{ik} & 0 \\ -\sin \theta^{ik} & \cos \theta^{ik} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \bar{F}_1^{ik} \\ \bar{F}_2^{ik} \\ \bar{M}_3^{ik} \end{matrix} \right\} = \left[\Lambda_{PF}^{ik} \right] \left\{ \bar{A}^{ik} \right\}$$

όπου $\left[\Lambda_{PF}^{ik} \right] = \begin{bmatrix} \cos \theta^{ik} & \sin \theta^{ik} & 0 \\ -\sin \theta^{ik} & \cos \theta^{ik} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ΜΗΤΡΩΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ



ή συνολικά και στα δύο
άκρα μέλους επίπεδου
πλασιίου

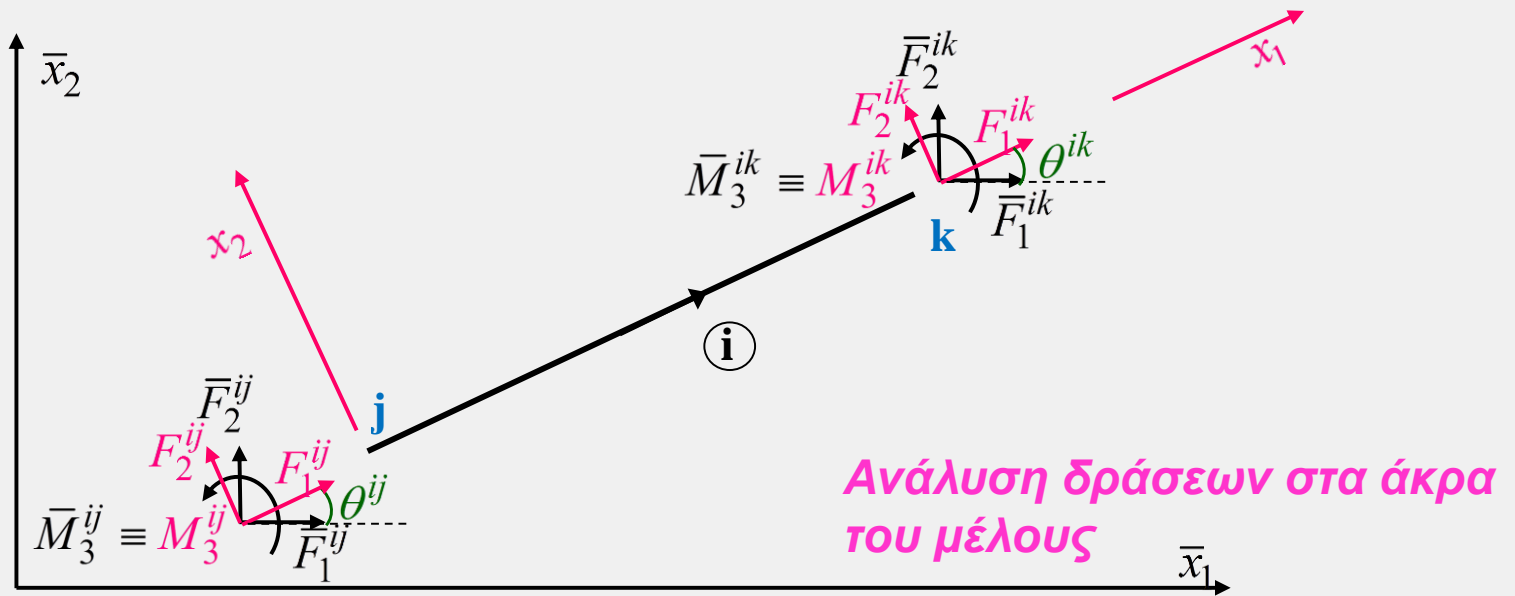
$$\{A^i\} = \begin{bmatrix} \{A^{ij}\} \\ \{A^{ik}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^{ij} \\ F_2^{ij} \\ M_3^{ij} \\ F_1^{ik} \\ F_2^{ik} \\ M_3^{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta^{ij} & \sin \theta^{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta^{ij} & \cos \theta^{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos \theta^{ik} & \sin \theta^{ik} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta^{ik} & \cos \theta^{ik} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{F}_1^{ij} \\ \bar{F}_2^{ij} \\ \bar{M}_3^{ij} \\ \bar{F}_1^{ik} \\ \bar{F}_2^{ik} \\ \bar{M}_3^{ik} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} [\Lambda_{PF}^{ij}] & [0] \\ [0] & [\Lambda_{PF}^{ik}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\bar{A}^{ij}\} \\ \{\bar{A}^{ik}\} \end{bmatrix} = [\Lambda_{PF}^i] \{\bar{A}^i\}$$

Μητρώο
μετασχηματισμού
μέλους επίπεδου
πλασιίου

ΜΗΤΡΩΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

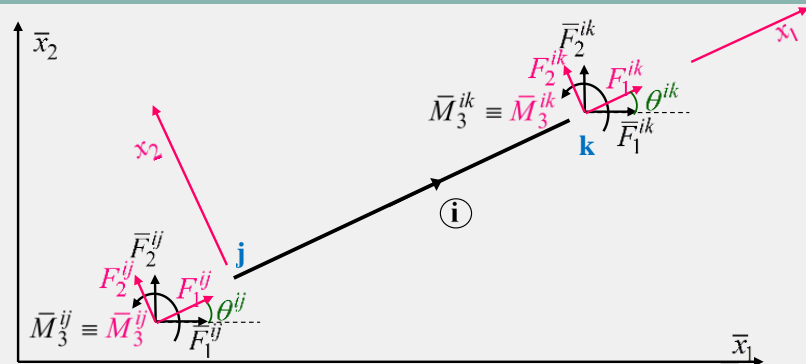
Αντίστροφα,
στο άκρο j
(ή k) μέλους
επίπεδου
πλαisiού



$$\left\{ \bar{A}^{ij} \right\} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_1^{ij} \\ \bar{F}_2^{ij} \\ \bar{M}_3^{ij} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta^{ij} & -\sin \theta^{ij} & 0 \\ \sin \theta^{ij} & \cos \theta^{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1^{ij} \\ F_2^{ij} \\ M_3^{ij} \end{Bmatrix} = \left[\Lambda_{PF}^{ij} \right]^T \left\{ A^{ij} \right\}$$

$$\left[\Lambda_{PF}^{ij} \right]^{-1} = \left[\Lambda_{PF}^{ij} \right]^T \quad \text{όπου} \quad \left[\Lambda_{PF}^{ij} \right] = \begin{bmatrix} \cos \theta^{ij} & \sin \theta^{ij} & 0 \\ -\sin \theta^{ij} & \cos \theta^{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ΜΗΤΡΩΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ



και συνολικά και στα δύο
άκρα μέλους επίπεδου
πλασιού

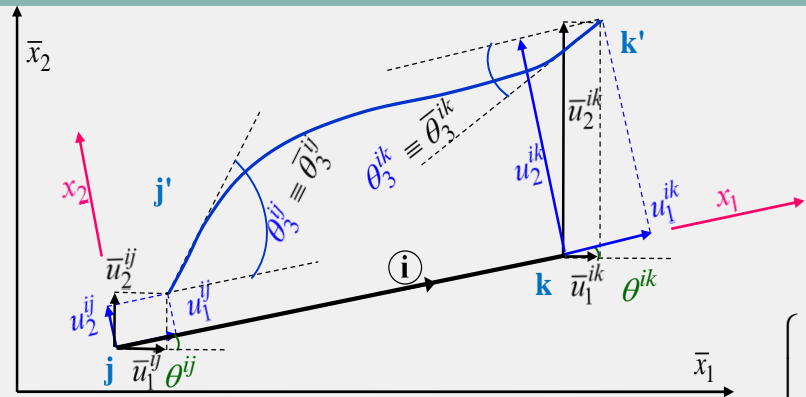
**Αντίστροφος
μετασχηματισμός
για μέλος
επίπεδου
πλασιού**

$$\begin{Bmatrix} \bar{A}^i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{A}^{ij} \\ \bar{A}^{ik} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Lambda_{PF}^{ij}]^T & [0] \\ [0] & [\Lambda_{PF}^{ik}]^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A^{ij} \\ A^{ik} \end{Bmatrix} = [\Lambda_{PF}^i]^T \{A^i\}$$

ΌΠΟΥ $[\Lambda_{PF}^i] = \begin{bmatrix} [\Lambda_{PF}^{ij}] & [0] \\ [0] & [\Lambda_{PF}^{ik}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta^{ij} & \sin \theta^{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta^{ij} & \cos \theta^{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta^{ik} & \sin \theta^{ik} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta^{ik} & \cos \theta^{ik} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$[\Lambda_{PF}^i]^{-1} = [\Lambda_{PF}^i]^T$$

ΜΗΤΡΩΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ



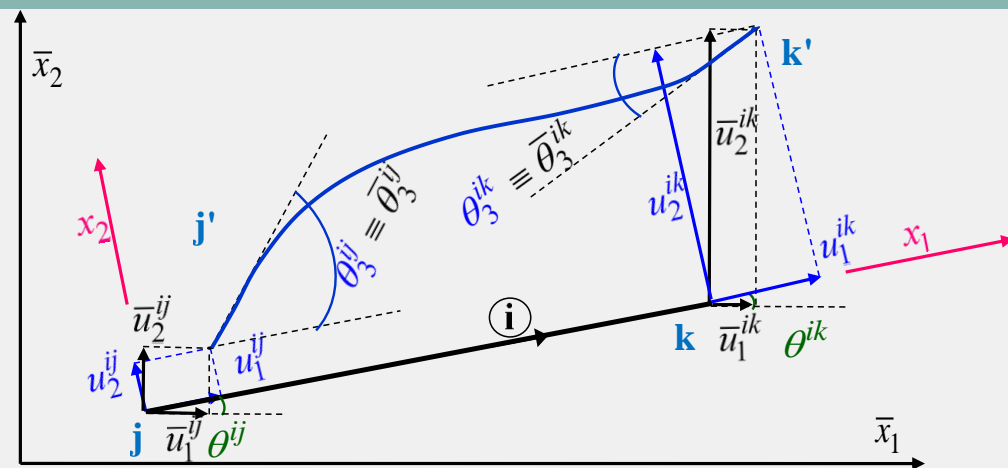
**‘Όμοια για τα διανύσματα
ακραίων μετακινήσεων
θα ισχύει**

$$\{D^i\} = \begin{Bmatrix} \{D^{ij}\} \\ \{D^{ik}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1^{ij} \\ u_2^{ij} \\ g_3^{ij} \\ u_1^{ik} \\ u_2^{ik} \\ g_3^{ik} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta^{ij} & \sin \theta^{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta^{ij} & \cos \theta^{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos \theta^{ik} & \sin \theta^{ik} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta^{ik} & \cos \theta^{ik} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -ij \\ u_1 \\ -ij \\ u_2 \\ -ij \\ g_3 \\ -ik \\ u_1 \\ -ik \\ u_2 \\ -ik \\ g_3 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} [\Lambda_{PF}^{ij}] & [0] \\ [0] & [\Lambda_{PF}^{ik}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{D}^{ij}\} \\ \{\bar{D}^{ik}\} \end{Bmatrix} = [\Lambda_{PF}^i] \{\bar{D}^i\}$$

**Μητρώο
μετασχηματισμού
μέλους επίπεδου
πλασιίου**

ΜΗΤΡΩΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ



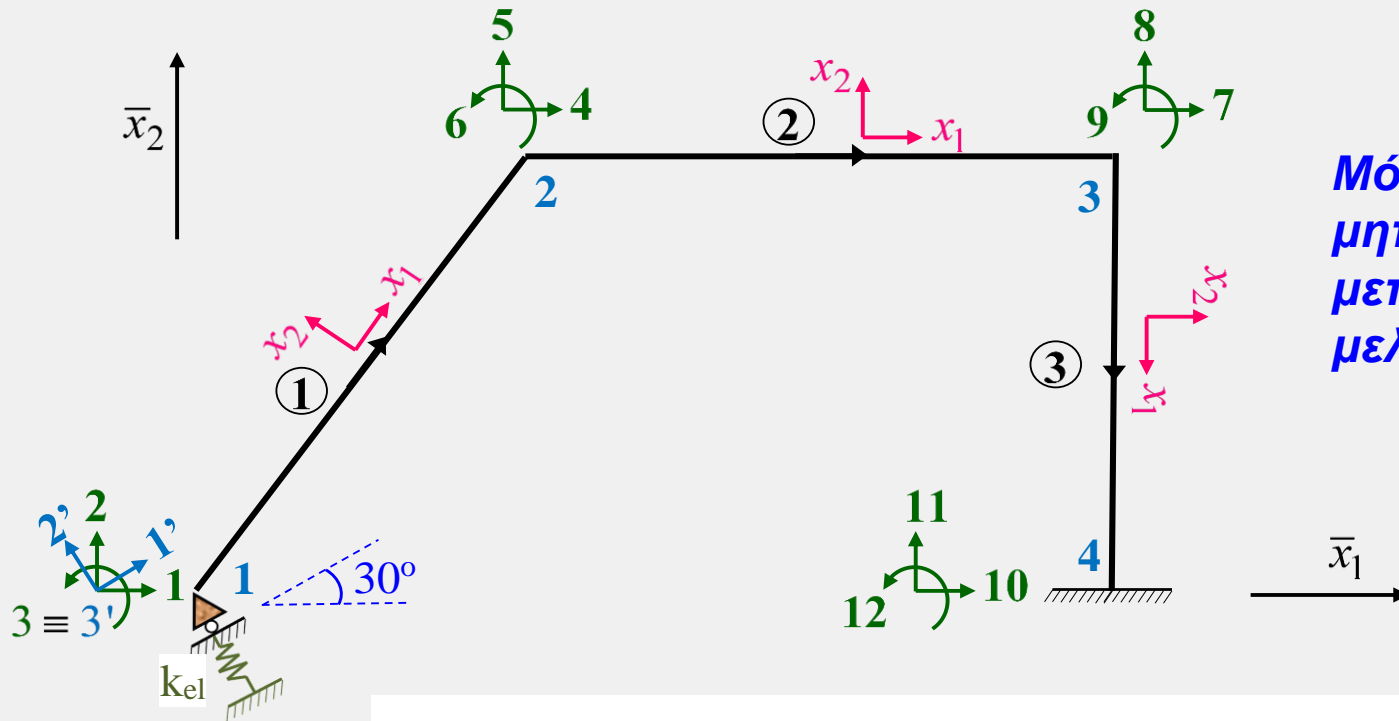
ή αντίστροφα

$$\left\{ \bar{D}^i \right\} = \begin{bmatrix} \left\{ \bar{D}^{ij} \right\} \\ \left\{ \bar{D}^{ik} \right\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\Lambda_{PF}^{ij} \right]^T & [0] \\ [0] & \left[\Lambda_{PF}^{ik} \right]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left\{ D^{ij} \right\} \\ \left\{ D^{ik} \right\} \end{bmatrix} = \left[\Lambda_{PF}^i \right]^T \left\{ D^i \right\}$$

$$\left[\Lambda_{PF}^i \right]^{-1} = \left[\Lambda_{PF}^i \right]^T$$

Ανάστροφο
μητρώου
μετασχηματισμού
μέλους επίπεδου
πλαίσιου

Εφαρμογή -ΜΗΤΡΩΑ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΜΕΛΩΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ



Μόρφωση
μητρώων
μετασχηματισμού
μελών

$\left[\Lambda_{PF}^i \right]$

- Μέλος (1): $\theta^{1j} = \theta^{1k} = \theta^1 = 53.13^\circ \Rightarrow \cos \theta^1 = 0.6, \sin \theta^1 = 0.8$
- Μέλος (2): $\theta^{2j} = \theta^{2k} = \theta^2 = 0^\circ \Rightarrow \cos \theta^2 = 1., \sin \theta^2 = 0.$
- Μέλος (3): $\theta^{3j} = \theta^{3k} = \theta^3 = 270^\circ \Rightarrow \cos \theta^3 = 0., \sin \theta^3 = -1.$

ΤΟΠΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

ΤΟΠΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Μόρφωση τοπικού μητρώου στιβαρότητας μέλους επίπεδου πλαισίου

$$\{A^i\} = [k^i] \{D^i\}$$

$$\begin{bmatrix} \{A^{ij}\} \\ \{A^{ik}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_{jj}^i] & [k_{jk}^i] \\ [k_{kj}^i] & [k_{kk}^i] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{D^{ij}\} \\ \{D^{ik}\} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_1^{ij} \\ F_2^{ij} \\ M_3^{ij} \\ F_1^{ik} \\ F_2^{ik} \\ M_3^{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^i & k_{12}^i & k_{13}^i & k_{14}^i & k_{15}^i & k_{16}^i \\ k_{21}^i & k_{22}^i & k_{23}^i & k_{24}^i & k_{25}^i & k_{26}^i \\ k_{31}^i & k_{32}^i & k_{33}^i & k_{34}^i & k_{35}^i & k_{36}^i \\ k_{41}^i & k_{42}^i & k_{43}^i & k_{44}^i & k_{45}^i & k_{46}^i \\ k_{51}^i & k_{52}^i & k_{53}^i & k_{54}^i & k_{55}^i & k_{56}^i \\ k_{61}^i & k_{62}^i & k_{63}^i & k_{64}^i & k_{65}^i & k_{66}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{ij} \\ u_2^{ij} \\ g_3^{ij} \\ u_1^{ik} \\ u_2^{ik} \\ g_3^{ik} \end{bmatrix}$$

$$F_1^{ij} = k_{11}^i \cdot u_1^{ij} + k_{12}^i \cdot u_2^{ij} + k_{13}^i \cdot g_3^{ij} + k_{14}^i \cdot u_1^{ik} + k_{15}^i \cdot u_2^{ik} + k_{16}^i \cdot g_3^{ik}$$

το τυχόν στοιχείο k_{mn}^i του τοπικού μητρώου στιβαρότητας του μέλους i δηλώνει την αναπτυσσόμενη τοπική ακραία δράση κατά τον τοπικό βαθμό ελευθερίας m όταν επιβληθεί μοναδιαία και μοναδική ακραία μετακίνηση κατά τον τοπικό βαθμό ελευθερίας n του μέλους i , δηλαδή με ταυτόχρονο μηδενισμό των υπόλοιπων τοπικών βαθμών ελευθερίας του μέλους.

ΤΟΠΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

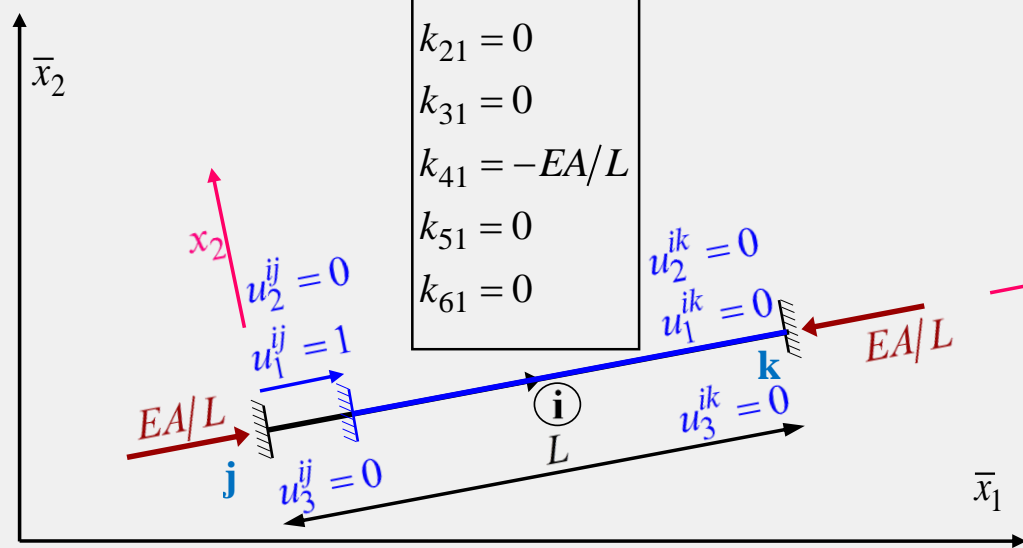
Μόρφωση τοπικού μητρώου στιβαρότητας μέλους επίπεδου πλαισίου

$$\{A^i\} = [k^i] \{D^i\}$$

$$\begin{matrix} k_{11} = EA/L \\ k_{21} = 0 \\ k_{31} = 0 \\ k_{41} = -EA/L \\ k_{51} = 0 \\ k_{61} = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} \{A^{ij}\} \\ \{A^{ik}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_{jj}^i] & [k_{jk}^i] \\ [k_{kj}^i] & [k_{kk}^i] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{D^{ij}\} \\ \{D^{ik}\} \end{bmatrix}$$

το τυχόν στοιχείο k_{mn}^i του τοπικού μητρώου στιβαρότητας του μέλους i δηλώνει την αναπτυσσόμενη τοπική ακραία δράση κατά τον τοπικό βαθμό ελευθερίας m όταν επιβληθεί μοναδιαία και μοναδική ακραία μετακίνηση κατά τον τοπικό βαθμό ελευθερίας n του μέλους i , δηλαδή με ταυτόχρονο μηδενισμό των υπόλοιπων τοπικών βαθμών ελευθερίας του μέλους.



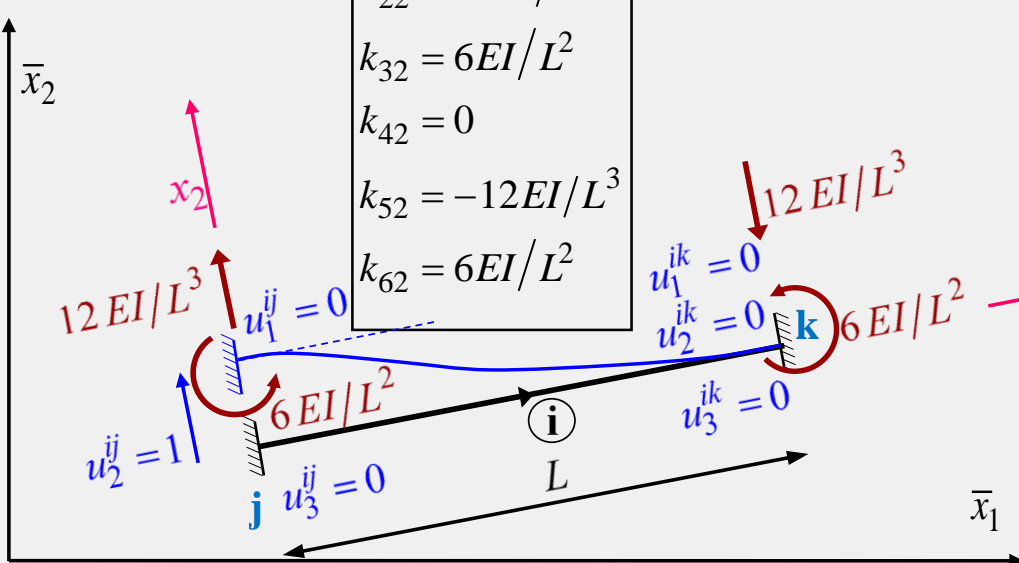
Μοναδιαία μετατόπιση u_1 στο άκρο j μέλους i επίπεδου πλαισίου.

ΤΟΠΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Μόρφωση τοπικού μητρώου στιβαρότητας μέλους επίπεδου πλαισίου

$$\{A^i\} = [k^i] \{D^i\}$$

$$\begin{matrix} k_{12} = 0 \\ k_{22} = 12EI/L^3 \\ k_{32} = 6EI/L^2 \\ k_{42} = 0 \\ k_{52} = -12EI/L^3 \\ k_{62} = 6EI/L^2 \end{matrix}$$



Μοναδιαία μετατόπιση u_2 στο άκρο j μέλους i επίπεδου πλαισίου.

$$\begin{bmatrix} \{A^{ij}\} \\ \{A^{ik}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_{jj}^i] & [k_{jk}^i] \\ [k_{kj}^i] & [k_{kk}^i] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{D^{ij}\} \\ \{D^{ik}\} \end{bmatrix}$$

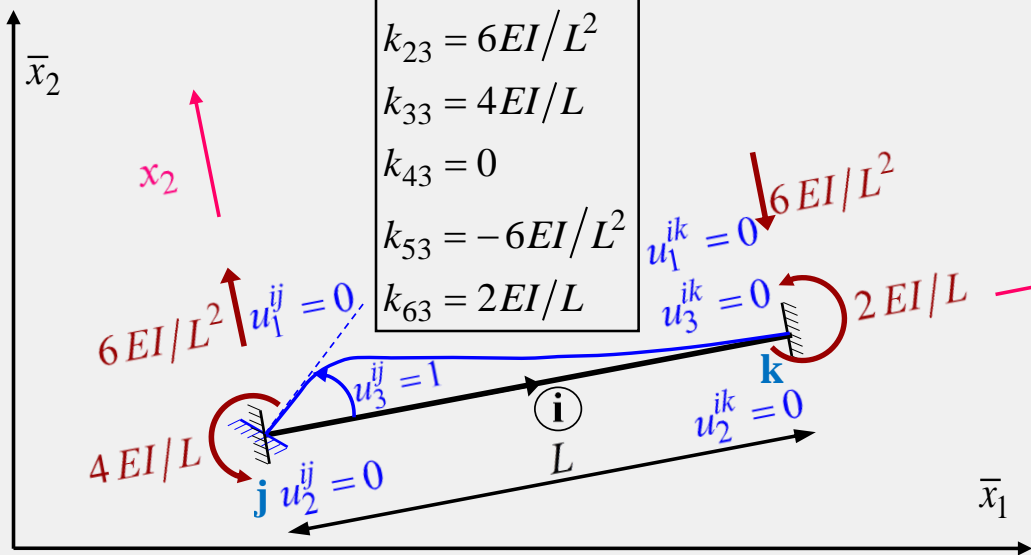
το τυχόν στοιχείο k_{mn}^i του τοπικού μητρώου στιβαρότητας του μέλους i δηλώνει την αναπτυσσόμενη τοπική ακραία δράση κατά τον τοπικό βαθμό ελευθερίας m όταν επιβληθεί μοναδιαία και μοναδική ακραία μετακίνηση κατά τον τοπικό βαθμό ελευθερίας n του μέλους i , δηλαδή με ταυτόχρονο μηδενισμό των υπόλοιπων τοπικών βαθμών ελευθερίας του μέλους.

ΤΟΠΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Μόρφωση τοπικού μητρώου στιβαρότητας μέλους επίπεδου πλαισίου

$$\{A^i\} = [k^i] \{D^i\}$$

$$\begin{matrix} k_{13} = 0 \\ k_{23} = 6EI/L^2 \\ k_{33} = 4EI/L \\ k_{43} = 0 \\ k_{53} = -6EI/L^2 \\ k_{63} = 2EI/L \end{matrix}$$



Μοναδιαία στροφή u_3 στο άκρο j μέλους i επίπεδου πλαισίου.

$$\begin{bmatrix} \{A^{ij}\} \\ \{A^{ik}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_{jj}^i] & [k_{jk}^i] \\ [k_{kj}^i] & [k_{kk}^i] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{D^{ij}\} \\ \{D^{ik}\} \end{bmatrix}$$

το τυχόν στοιχείο k_{mn}^i του τοπικού μητρώου στιβαρότητας του μέλους i δηλώνει την αναπτυσσόμενη τοπική ακραία δράση κατά τον τοπικό βαθμό ελευθερίας m όταν επιβληθεί μοναδιαία και μοναδική ακραία μετακίνηση κατά τον τοπικό βαθμό ελευθερίας n του μέλους i , δηλαδή με ταυτόχρονο μηδενισμό των υπόλοιπων τοπικών βαθμών ελευθερίας του μέλους.

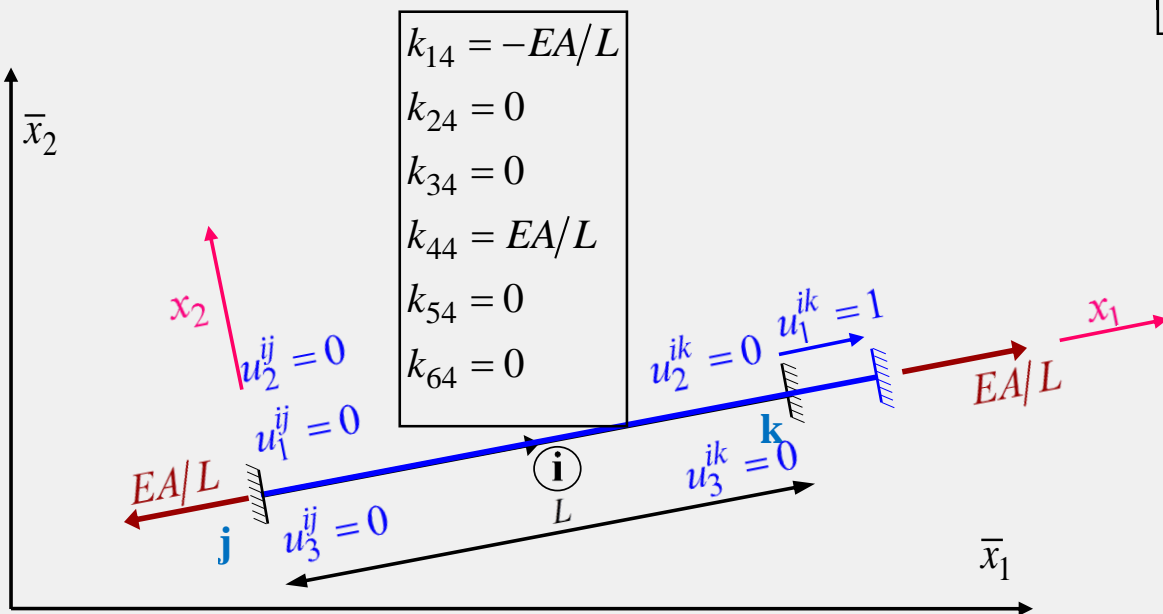
ΤΟΠΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Μόρφωση τοπικού μητρώου στιβαρότητας μέλους επίπεδου πλαισίου

$$\{A^i\} = [k^i] \{D^i\}$$

$$\begin{bmatrix} \{A^{ij}\} \\ \{A^{ik}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_{jj}^i] & [k_{jk}^i] \\ [k_{kj}^i] & [k_{kk}^i] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{D^{ij}\} \\ \{D^{ik}\} \end{bmatrix}$$

το τυχόν στοιχείο k_{mn}^i του τοπικού μητρώου στιβαρότητας του μέλους i δηλώνει την αναπτυσσόμενη τοπική ακραία δράση κατά τον τοπικό βαθμό ελευθερίας m όταν επιβληθεί μοναδιαία και μοναδική ακραία μετακίνηση κατά τον τοπικό βαθμό ελευθερίας n του μέλους i , δηλαδή με ταυτόχρονο μηδενισμό των υπόλοιπων τοπικών βαθμών ελευθερίας του μέλους.



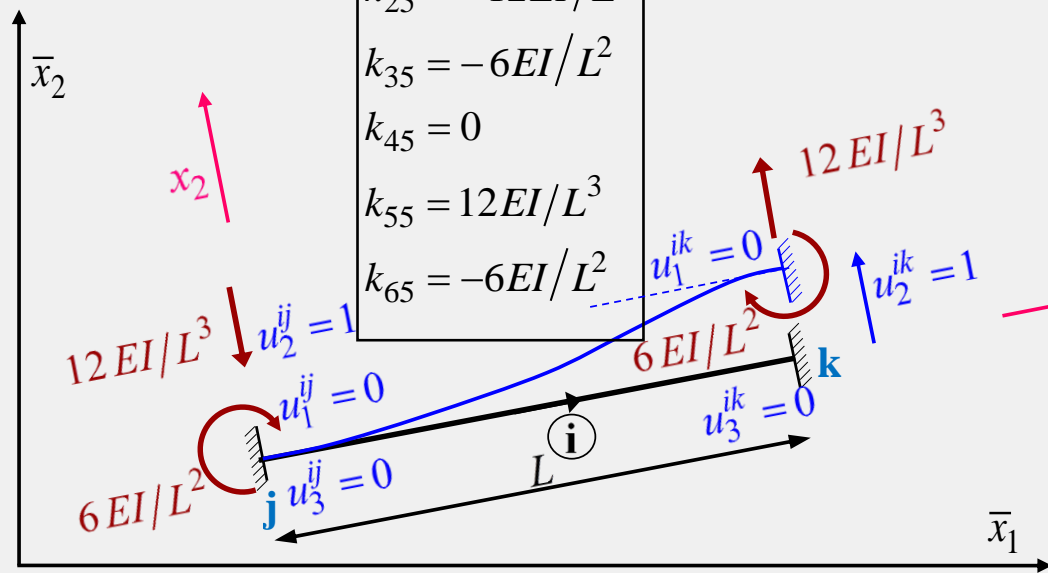
Μοναδιαία μετατόπιση u_1 στο άκρο k μέλους i επίπεδου πλαισίου.

ΤΟΠΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Μόρφωση τοπικού μητρώου στιβαρότητας μέλους επίπεδου πλαισίου

$$\{A^i\} = [k^i] \{D^i\}$$

$$\begin{aligned} k_{15} &= 0 \\ k_{25} &= -12EI/L^3 \\ k_{35} &= -6EI/L^2 \\ k_{45} &= 0 \\ k_{55} &= 12EI/L^3 \\ k_{65} &= -6EI/L^2 \end{aligned}$$



Μοναδιαία μετατόπιση u_2 στο άκρο k μέλους i επίπεδου πλαισίου.

$$\begin{bmatrix} \{A^{ij}\} \\ \{A^{ik}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_{jj}^i] & [k_{jk}^i] \\ [k_{kj}^i] & [k_{kk}^i] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{D^{ij}\} \\ \{D^{ik}\} \end{bmatrix}$$

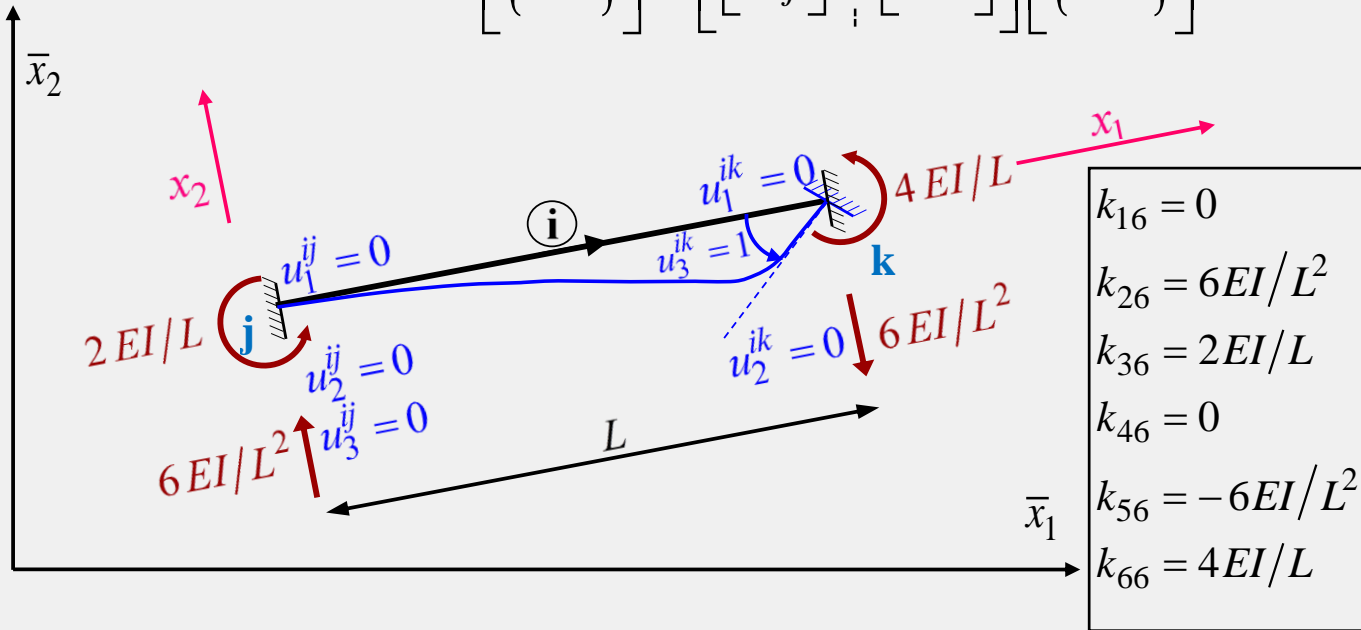
το τυχόν στοιχείο k_{mn}^i του τοπικού μητρώου στιβαρότητας του μέλους i δηλώνει την αναπτυσσόμενη τοπική ακραία δράση κατά τον τοπικό βαθμό ελευθερίας m όταν επιβληθεί μοναδιαία και μοναδική ακραία μετακίνηση κατά τον τοπικό βαθμό ελευθερίας n του μέλους i , δηλαδή με ταυτόχρονο μηδενισμό των υπόλοιπων τοπικών βαθμών ελευθερίας του μέλους.

ΤΟΠΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Μόρφωση τοπικού μητρώου στιβαρότητας μέλους επίπεδου πλαισίου

$$\begin{Bmatrix} A^i \\ A^{ik} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{jj}^i & k_{jk}^i \\ k_{kj}^i & k_{kk}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D^{ij} \\ D^{ik} \end{Bmatrix}$$

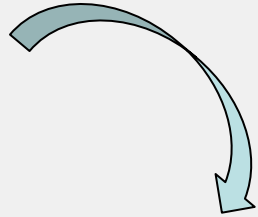
το τυχόν στοιχείο k_{mn}^i του τοπικού μητρώου στιβαρότητας του μέλους i δηλώνει την αναπτυσσόμενη τοπική ακραία δράση κατά τον τοπικό βαθμό ελευθερίας m όταν επιβληθεί μοναδιαία και μοναδική ακραία μετακίνηση κατά τον τοπικό βαθμό ελευθερίας n του μέλους i , δηλαδή με ταυτόχρονο μηδενισμό των υπόλοιπων τοπικών βαθμών ελευθερίας του μέλους.



Μοναδιαία στροφή u_3 στο άκρο k μέλους i επίπεδου πλαισίου.

ΤΟΠΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Μόρφωση τοπικού μητρώου στιβαρότητας μέλους επίπεδου πλαισίου



$$\{A^i\} = [k^i] \{D^i\}$$

**Τοπικό μητρώο
στιβαρότητας
μέλους**

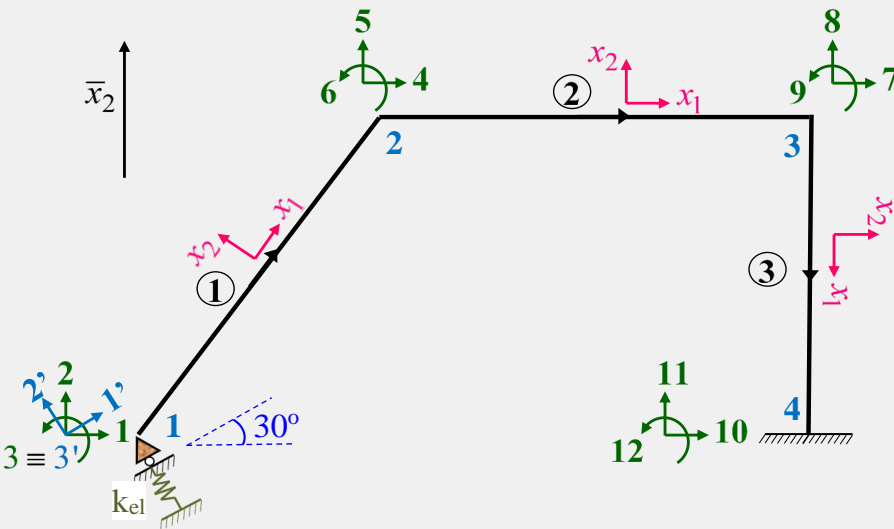
$$[k^i] = \begin{bmatrix} [k_{jj}^i] & [k_{jk}^i] \\ [k_{kj}^i] & [k_{kk}^i] \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A^i E^i / L^i & 0 & 0 & -A^i E^i / L^i & 0 & 0 \\ 0 & 12E^i I^i / L^3 & 6E^i I^i / L^2 & 0 & -12E^i I^i / L^3 & 6E^i I^i / L^2 \\ 0 & 6E^i I^i / L^2 & 4E^i I^i / L^i & 0 & -6E^i I^i / L^2 & 2E^i I^i / L^i \\ \hline -A^i E^i / L^i & 0 & 0 & A^i E^i / L^i & 0 & 0 \\ 0 & -12E^i I^i / L^3 & -6E^i I^i / L^2 & 0 & 12E^i I^i / L^3 & -6E^i I^i / L^2 \\ 0 & 6E^i I^i / L^2 & 2E^i I^i / L^i & 0 & -6E^i I^i / L^2 & 4E^i I^i / L^i \end{bmatrix}$$

Εφαρμογή - ΤΟΠΙΚΑ ΜΗΤΡΩΑ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΜΕΛΩΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Τοπικά μητρώα στιβαρότητας μελών

$$[k^i] = \begin{bmatrix} [k_{jj}^i] & [k_{jk}^i] \\ [k_{kj}^i] & [k_{kk}^i] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^i E^i / L^i & 0 & 0 & -A^i E^i / L^i & 0 & 0 \\ 0 & 12E^i I^i / L^3 & 6E^i I^i / L^2 & 0 & -12E^i I^i / L^3 & 6E^i I^i / L^2 \\ 0 & 6E^i I^i / L^2 & 4E^i I^i / L & 0 & -6E^i I^i / L^2 & 2E^i I^i / L \\ -A^i E^i / L^i & 0 & 0 & A^i E^i / L^i & 0 & 0 \\ 0 & -12E^i I^i / L^3 & -6E^i I^i / L^2 & 0 & 12E^i I^i / L^3 & -6E^i I^i / L^2 \\ 0 & 6E^i I^i / L^2 & 2E^i I^i / L & 0 & -6E^i I^i / L^2 & 4E^i I^i / L \end{bmatrix}$$



Στοιχεία γεωμετρίας και υλικού μελών

- Μέλος(1): $E^1 = 2.1 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$, $A^1 = 0.12 \text{ m}^2$, $I^1 = 0.0016 \text{ m}^4$, $L^1 = 7.5 \text{ m}$
- Μέλος(2): $E^2 = 2.1 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$, $A^2 = 0.12 \text{ m}^2$, $I^2 = 0.0016 \text{ m}^4$, $L^2 = 8.0 \text{ m}$
- Μέλος(3): $E^3 = 2.1 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$, $A^3 = 0.12 \text{ m}^2$, $I^3 = 0.0016 \text{ m}^4$, $L^3 = 6.0 \text{ m}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΗΤΡΩΩΝ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ

- Κάθε μητρώο στιβαρότητας είναι **συμμετρικό**, δηλαδή $k_{mm} > 0$. Η ιδιότητα αυτή επιβεβαιώνεται από την αρχή της αμοιβαιότητας των έργων Betti-Maxwell.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΗΤΡΩΩΝ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ

- Κάθε μητρώο στιβαρότητας είναι **συμμετρικό**, δηλαδή $k_{mm} > 0$. Η ιδιότητα αυτή επιβεβαιώνεται από την αρχή της αμοιβαιότητας των έργων Betti-Maxwell.
- Τα **διαγώνια στοιχεία** μητρώου στιβαρότητας είναι πάντα **θετικά** $k_{mm} > 0$. Επίσης, τα **διαγώνια στοιχεία** μητρώου στιβαρότητας είναι **μη μηδενικά**. Κατ' εξαίρεση το τοπικό μητρώο στιβαρότητας μέλους δικτυώματος και πιθανόν αυτό του αντίστοιχου καθολικού, εμφανίζει μηδενικά στοιχεία σε διαγώνιες θέσεις (δεν ορίζεται τέμνουσα δύναμη σε μέλος δικτυώματος).

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΗΤΡΩΩΝ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ

- Κάθε μητρώο στιβαρότητας είναι **συμμετρικό**, δηλαδή $k_{mm} > 0$. Η ιδιότητα αυτή επιβεβαιώνεται από την αρχή της αμοιβαιότητας των έργων Betti-Maxwell.
- Τα **διαγώνια στοιχεία** μητρώου στιβαρότητας είναι πάντα **θετικά** $k_{mm} > 0$. Επίσης, τα **διαγώνια στοιχεία** μητρώου στιβαρότητας είναι **μη μηδενικά**. Κατ' εξαίρεση το τοπικό μητρώο στιβαρότητας μέλους δικτυώματος και πιθανόν αυτό του αντίστοιχου καθολικού, εμφανίζει μηδενικά στοιχεία σε διαγώνιες θέσεις (δεν ορίζεται τέμνουσα δύναμη σε μέλος δικτυώματος).
- Η **ορίζουσα μητρώου στιβαρότητας είναι μηδενική**. Το φυσικό νόημα της ιδιότητας αυτής γίνεται αντιληπτό από το γεγονός ότι κατά τη μόρφωση του μητρώου στιβαρότητας του στοιχείου ή φορέα δεν έχει ληφθεί υπόψη ο τρόπος στήριξης του (στερεό σώμα).

ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Μόρφωση καθολικού μητρώου στιβαρότητας μέλους επίπεδου πλαισίου

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_1^{ij} \\ \bar{F}_2^{ij} \\ \bar{M}_3^{ij} \\ \bar{F}_1^{ik} \\ \bar{F}_2^{ik} \\ \bar{M}_3^{ik} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{k}_{11}^i & \bar{k}_{12}^i & \bar{k}_{13}^i & \bar{k}_{14}^i & \bar{k}_{15}^i & \bar{k}_{16}^i \\ \bar{k}_{21}^i & \bar{k}_{22}^i & \bar{k}_{23}^i & \bar{k}_{24}^i & \bar{k}_{25}^i & \bar{k}_{26}^i \\ \bar{k}_{31}^i & \bar{k}_{32}^i & \bar{k}_{33}^i & \bar{k}_{34}^i & \bar{k}_{35}^i & \bar{k}_{36}^i \\ \bar{k}_{41}^i & \bar{k}_{42}^i & \bar{k}_{43}^i & \bar{k}_{44}^i & \bar{k}_{45}^i & \bar{k}_{46}^i \\ \bar{k}_{51}^i & \bar{k}_{52}^i & \bar{k}_{53}^i & \bar{k}_{54}^i & \bar{k}_{55}^i & \bar{k}_{56}^i \\ \bar{k}_{61}^i & \bar{k}_{62}^i & \bar{k}_{63}^i & \bar{k}_{64}^i & \bar{k}_{65}^i & \bar{k}_{66}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1^{-ij} \\ \bar{u}_2^{-ij} \\ \bar{g}_3^{-ij} \\ \bar{u}_1^{-ik} \\ \bar{u}_2^{-ik} \\ \bar{g}_3^{-ik} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \left\{ \bar{A}^{ij} \right\} \\ \left\{ \bar{A}^{ik} \right\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\bar{k}_{jj}^i \right] & \left[\bar{k}_{jk}^i \right] \\ \left[\bar{k}_{kj}^i \right] & \left[\bar{k}_{kk}^i \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left\{ \bar{D}^{ij} \right\} \\ \left\{ \bar{D}^{ik} \right\} \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \bar{A}^i \right\} = \left[\bar{k}^i \right] \left\{ \bar{D}^i \right\}$$

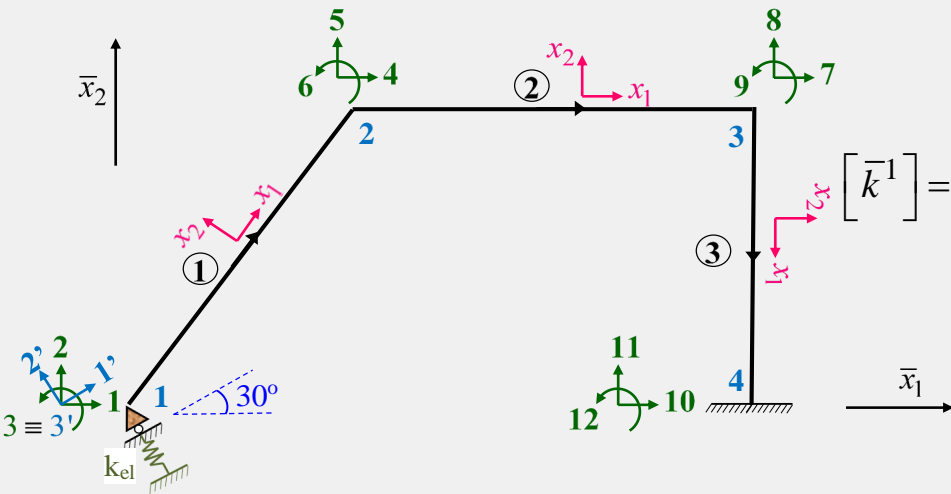
το τυχόν στοιχείο \bar{k}_{mn}^i του καθολικού μητρώου στιβαρότητας του μέλους i δηλώνει την αναπτυσσόμενη καθολική ακραία δράση κατά τον καθολικό βαθμό ελευθερίας m όταν επιβληθεί μοναδιαία και μοναδική ακραία μετακίνηση κατά τον καθολικό βαθμό ελευθερίας n του μέλους i , δηλαδή με ταυτόχρονο μηδενισμό των υπόλοιπων τοπικών βαθμών ελευθερίας του μέλους.

$$\left\{ \bar{A}^i \right\} = \left[k^i \right] \left\{ \bar{D}^i \right\} \Rightarrow \left[\Lambda_{PF}^i \right] \left\{ \bar{A}^i \right\} = \left[k^i \right] \left[\Lambda_{PF}^i \right] \left\{ \bar{D}^i \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \bar{A}^i \right\} = \left[\Lambda_{PF}^i \right]^T \left[k^i \right] \left[\Lambda_{PF}^i \right] \left\{ \bar{D}^i \right\}$$

$$\Rightarrow \left[\bar{k}^i \right] = \left[\Lambda_{PF}^i \right]^T \left[k^i \right] \left[\Lambda_{PF}^i \right]$$

Εφαρμογή - ΚΑΘΟΛΙΚΑ ΜΗΤΡΩΑ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΜΕΛΩΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ



$$[\bar{k}^1] = EI \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3.618 & & & & & \\ 4.786 & 6.410 & & & & \\ -0.085 & 0.064 & 0.5333 & & & \\ \hline -3.618 & -4.786 & 0.085 & 3.618 & & \\ 4.786 & -6.410 & -0.064 & 4.786 & 6.410 & \\ -0.085 & 0.064 & 0.2667 & 0.085 & -0.064 & 0.5333 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Καθολικά μητρώα στιβαρότητας μελών

$$[\bar{k}^2] = EI \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 9.375 & & & \\ 0 & 0.0234 & & \\ 0 & 0.0938 & 0.5 & \\ \hline -9.375 & 0 & 0 & 9.375 \\ 0 & -0.0234 & -0.0938 & 0 & 0.0234 \\ 0 & 0.0938 & 0.25 & 0 & -0.0938 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{k}^3] = EI \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 0.0556 & & & & & \\ 0 & 12.5 & & & & \\ 0.1670 & 0 & 0.6667 & & & \\ \hline -0.0556 & 0 & -0.1670 & 0.0556 & & \\ 0 & -12.5 & 0 & 0 & 12.5 & \\ 0.1670 & 0 & 0.3333 & -0.1670 & 0 & 0.6667 \end{bmatrix}$$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΕΠΙΚΟΜΒΙΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΕΠΙΚΟΜΒΙΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

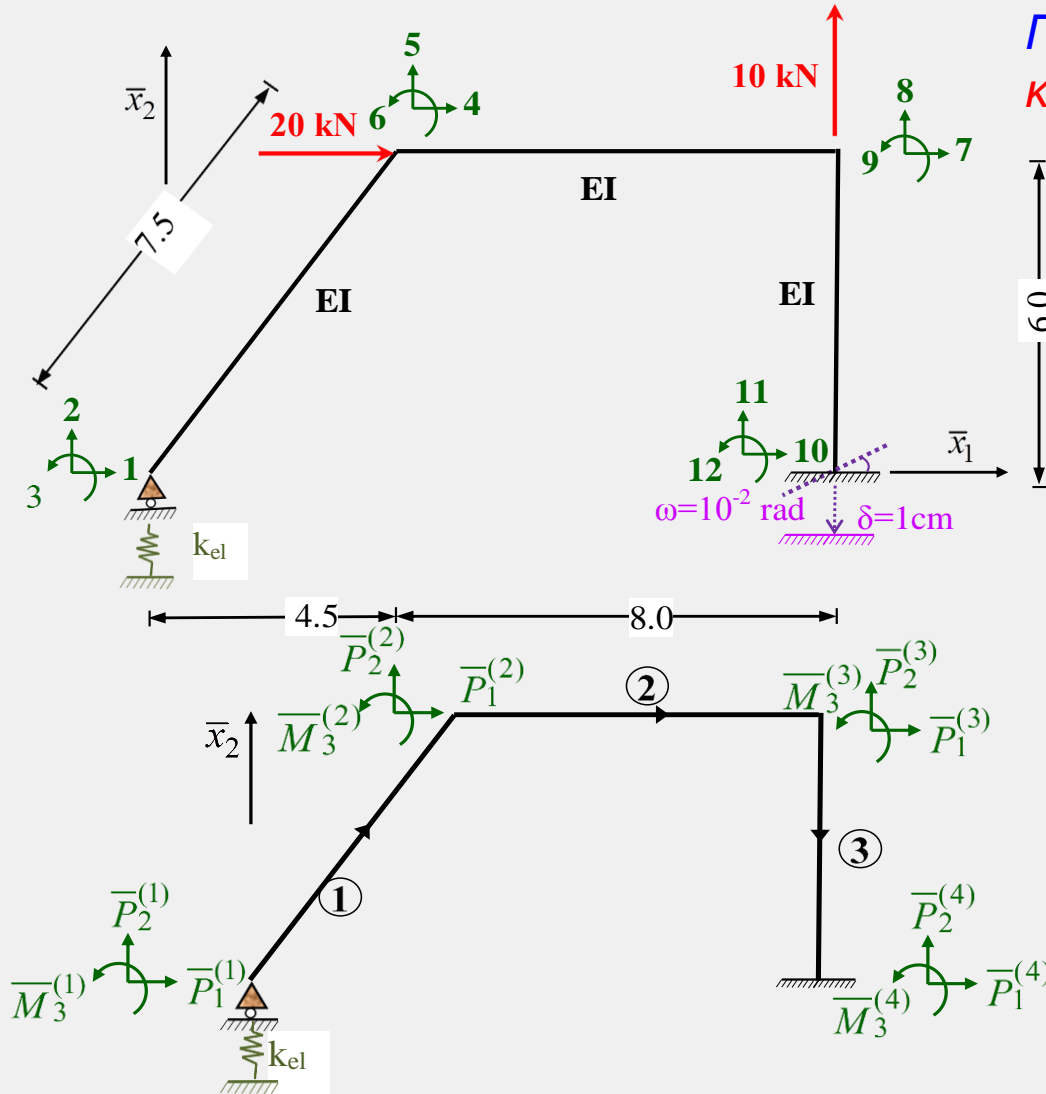
Συνιστώσες των επικόμβιων δράσεων και επικόμβιων μετακινήσεων των N κόμβων πλαισίου

$$\{\bar{P}\} = \begin{bmatrix} \{\bar{P}^{(1)}\} \\ \{\bar{P}^{(2)}\} \\ \vdots \\ \{\bar{P}^{(N)}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}_1^{(1)} \\ \bar{P}_2^{(1)} \\ \bar{M}_3^{(1)} \\ \bar{P}_1^{(2)} \\ \bar{P}_2^{(2)} \\ \bar{M}_3^{(2)} \\ \vdots \\ \bar{P}_1^{(N)} \\ \bar{P}_2^{(N)} \\ \bar{M}_3^{(N)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{M}_3 \\ \bar{P}_4 \\ \bar{P}_5 \\ \bar{M}_6 \\ \vdots \\ \bar{P}_{3N-2} \\ \bar{P}_{3N-1} \\ \bar{M}_{3N} \end{bmatrix} \quad \text{Εναλλακτικές μορφές γραφής διανυσμάτων}$$

$$\{\bar{\Delta}\} = \begin{bmatrix} \{\bar{\Delta}^{(1)}\} \\ \{\bar{\Delta}^{(2)}\} \\ \vdots \\ \{\bar{\Delta}^{(N)}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(1)} \\ \bar{\Delta}_2^{(1)} \\ \bar{\Delta}_3^{(1)} \\ \bar{\Delta}_1^{(2)} \\ \bar{\Delta}_2^{(2)} \\ \bar{\Delta}_3^{(2)} \\ \vdots \\ \bar{\Delta}_1^{(N)} \\ \bar{\Delta}_2^{(N)} \\ \bar{\Delta}_3^{(N)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \vdots \\ \bar{\Delta}_{3N-2} \\ \bar{\Delta}_{3N-1} \\ \bar{\Delta}_{3N} \end{bmatrix}$$

Από τις μετακινήσεις των κόμβων κάποιες είναι γνωστές και οι υπόλοιπες άγνωστες, ανάλογα με το εάν οι αντίστοιχοι βαθμοί ελευθερίας κόμβου είναι δεσμευμένοι ή ελεύθεροι. Αντίστοιχα, υπάρχουν γνωστές δράσεις, που είναι τα εξωτερικά φορτία των κόμβων και άγνωστες, που είναι οι αντιδράσεις στις στηρίξεις τους.

Εφαρμογή - ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΕΠΙΚΟΜΒΙΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

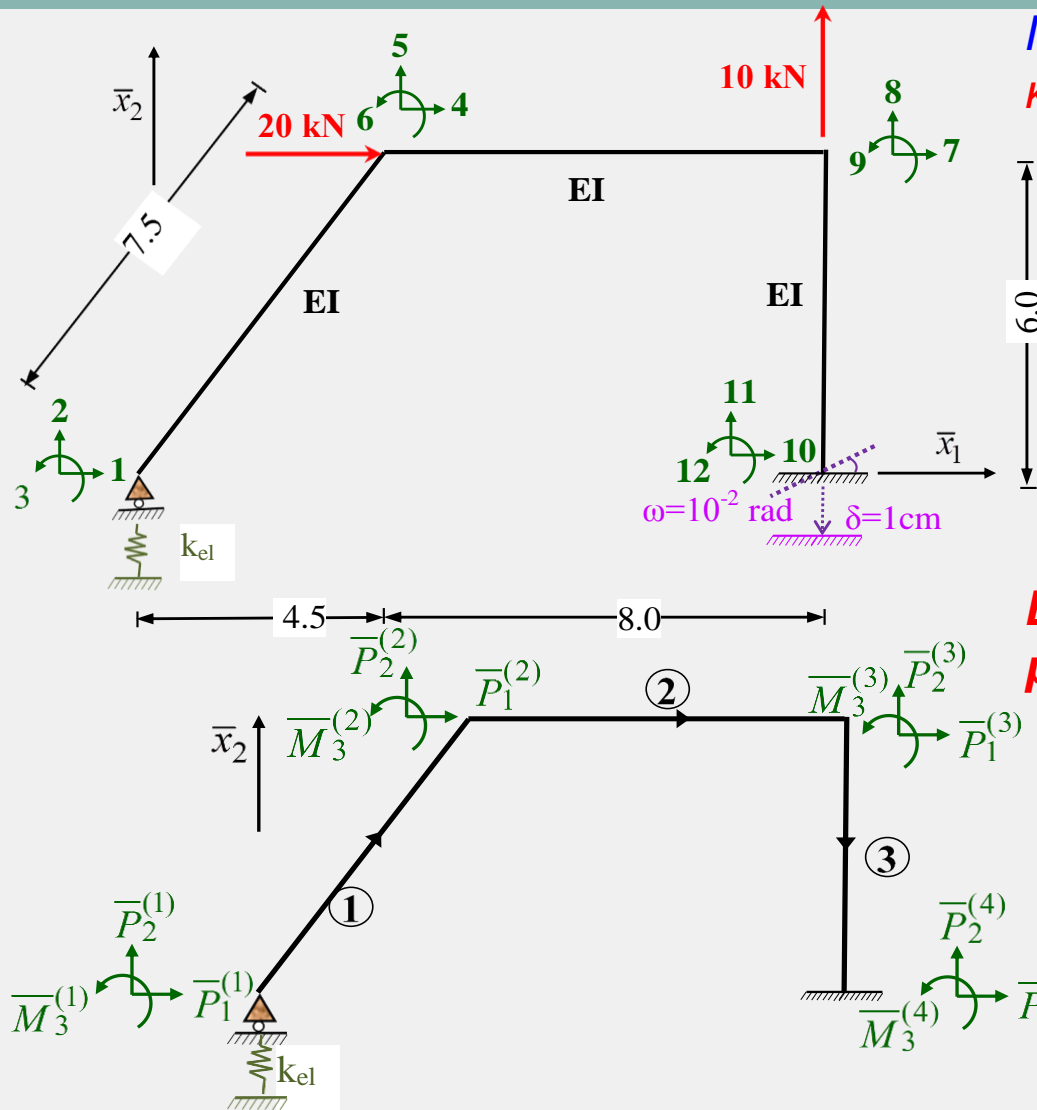


Γραφή με **άνω** (αριθμός κόμβου) και **κάτω** (αριθμός καθολικού άξονα) **δείκτη**

Επικόμβιες δράσεις

$$\{\bar{P}\} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1^{(1)} \\ \bar{P}_2^{(1)} \\ \bar{M}_3^{(1)} \\ \hline \bar{P}_1^{(2)} \\ \bar{P}_2^{(2)} \\ \bar{M}_3^{(2)} \\ \hline \bar{P}_1^{(3)} \\ \bar{P}_2^{(3)} \\ \bar{M}_3^{(3)} \\ \hline \bar{P}_1^{(4)} \\ \bar{P}_2^{(4)} \\ \bar{M}_3^{(4)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{M}_3 \\ \hline \bar{P}_4 \\ \bar{P}_5 \\ \bar{M}_6 \\ \hline \bar{P}_7 \\ \bar{P}_8 \\ \bar{M}_9 \\ \hline \bar{P}_{10} \\ \bar{P}_{11} \\ \bar{M}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{R}_2 \\ 0 \\ \hline 20 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 10 \\ 0 \\ \hline \bar{R}_{10} \\ \bar{R}_{11} \\ \bar{R}_{12} \end{Bmatrix}$$

Εφαρμογή - ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΕΠΙΚΟΜΒΙΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ



Γραφή με άνω (αριθμός κόμβου) και κάτω (αριθμός καθολικού άξονα) δείκτη

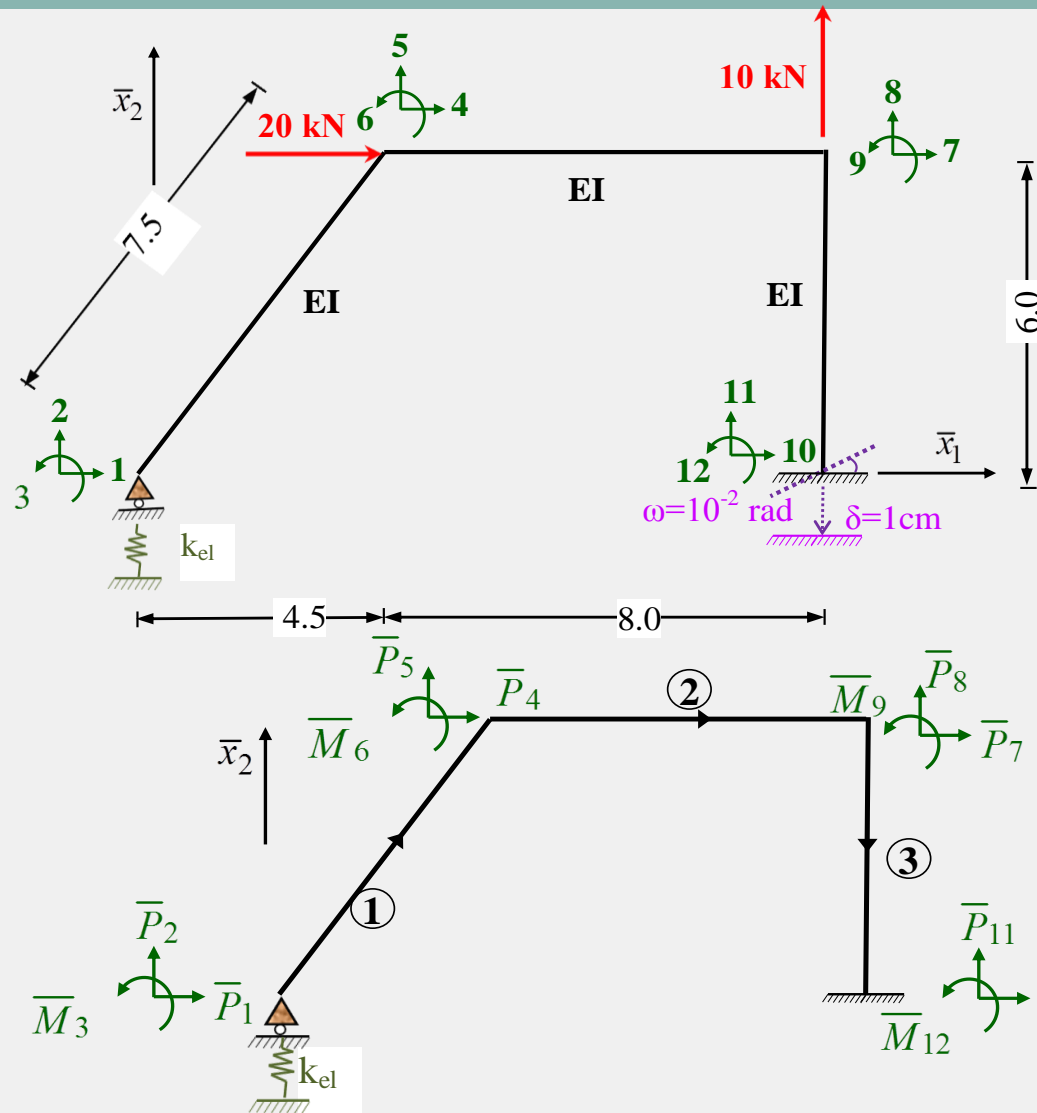
Επικόμβιες μετακινήσεις

$$\{\bar{\Delta}\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{-(1)} \\ \bar{\Delta}_2^{-(1)} \\ \bar{\Delta}_3^{-(1)} \\ \dots \\ \bar{\Delta}_1^{-(2)} \\ \bar{\Delta}_2^{-(2)} \\ \bar{\Delta}_3^{-(2)} \\ \dots \\ \bar{\Delta}_1^{-(3)} \\ \bar{\Delta}_2^{-(3)} \\ \bar{\Delta}_3^{-(3)} \\ \dots \\ \bar{\Delta}_1^{-(4)} \\ \bar{\Delta}_2^{-(4)} \\ \bar{\Delta}_3^{-(4)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \dots \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \dots \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \dots \\ \bar{\Delta}_{10} \\ \bar{\Delta}_{11} \\ \bar{\Delta}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \dots \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \dots \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \dots \\ 0 \\ -0.01 \\ 0.01 \end{Bmatrix}$$

Εφαρμογή - ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΕΠΙΚΟΜΒΙΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

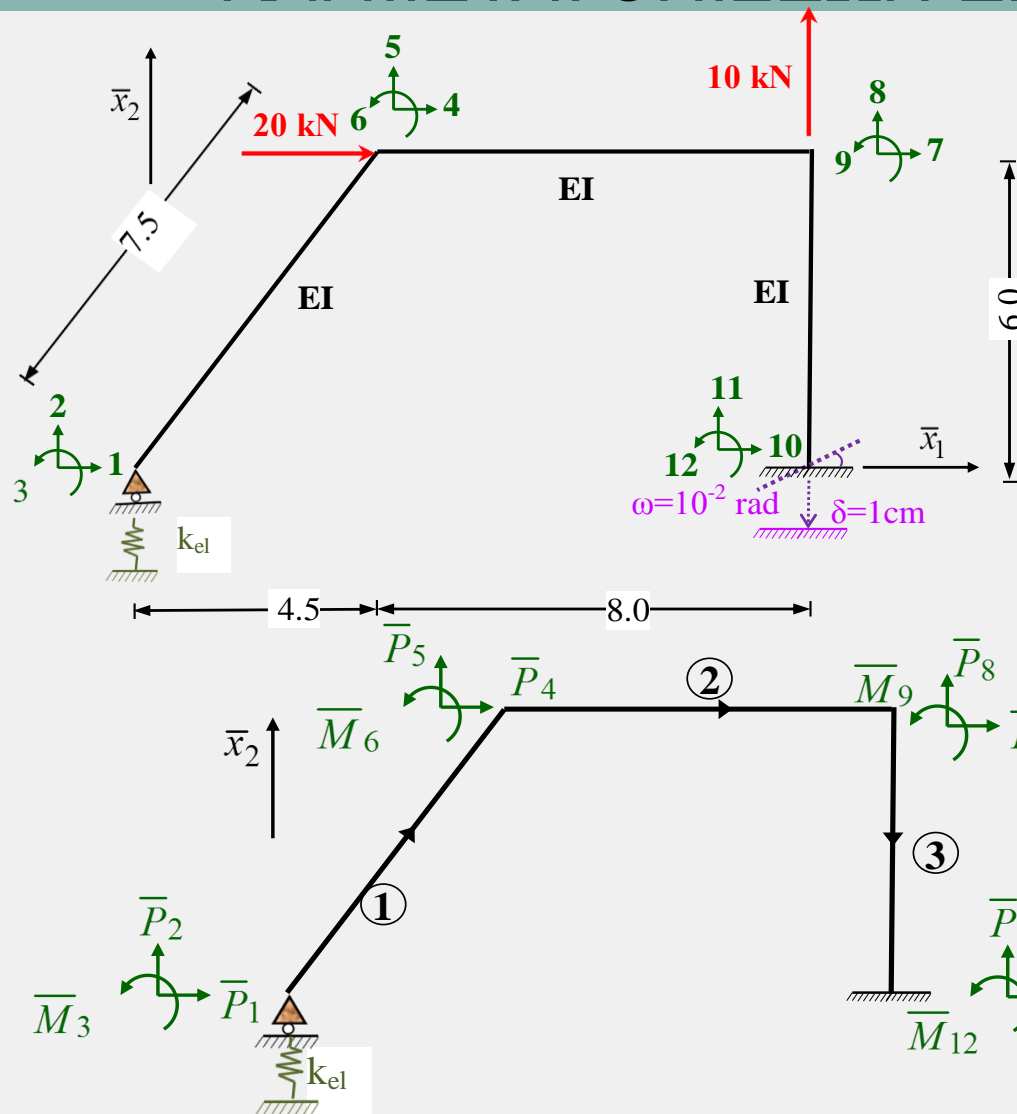
Γραφή με κάτω δείκτη (βαθμός ελευθερίας κίνησης δικτυώματος)

Επικόμβιες δράσεις



$$\{\bar{P}\} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1^{(1)} \\ \bar{P}_2^{(1)} \\ \bar{M}_3^{(1)} \\ \bar{P}_1^{(2)} \\ \bar{P}_2^{(2)} \\ \bar{M}_3^{(2)} \\ \bar{P}_1^{(3)} \\ \bar{P}_2^{(3)} \\ \bar{M}_3^{(3)} \\ \bar{P}_1^{(4)} \\ \bar{P}_2^{(4)} \\ \bar{M}_3^{(4)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{M}_3 \\ \bar{P}_4 \\ \bar{P}_5 \\ \bar{M}_6 \\ \bar{P}_7 \\ \bar{P}_8 \\ \bar{M}_9 \\ \bar{P}_{10} \\ \bar{P}_{11} \\ \bar{M}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{R}_2 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ \bar{R}_{10} \\ \bar{R}_{11} \\ \bar{R}_{12} \end{Bmatrix}$$

Εφαρμογή - ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΕΠΙΚΟΜΒΙΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ



Γραφή με κάτω δείκτη (βαθμός ελευθερίας κίνησης δικτύωματος)

Επικόμβιες μετακινήσεις

$$\{\bar{\Delta}\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{-(1)} \\ \bar{\Delta}_2^{-(1)} \\ \bar{\Delta}_3^{-(1)} \\ \dots \\ \bar{\Delta}_1^{-(2)} \\ \bar{\Delta}_2^{-(2)} \\ \bar{\Delta}_3^{-(2)} \\ \dots \\ \bar{\Delta}_1^{-(3)} \\ \bar{\Delta}_2^{-(3)} \\ \bar{\Delta}_3^{-(3)} \\ \dots \\ \bar{\Delta}_1^{-(4)} \\ \bar{\Delta}_2^{-(4)} \\ \bar{\Delta}_3^{-(4)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \dots \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \dots \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \dots \\ \bar{\Delta}_{10} \\ \bar{\Delta}_{11} \\ \bar{\Delta}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \dots \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \dots \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \dots \\ 0 \\ -0.01 \\ 0.01 \end{Bmatrix}$$

ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Μόρφωση καθολικού μητρώου στιβαρότητας φορέα επίπεδου πλαισίου

$$\begin{Bmatrix} \bar{P}^{(1)} \\ \bar{P}^{(2)} \\ \vdots \\ \bar{P}^{(N)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} & \dots & \bar{K}_{1,N} \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} & \dots & \bar{K}_{2,N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{K}_{N,1} & \bar{K}_{N,2} & \dots & \bar{K}_{N,N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}^{(1)} \\ \bar{\Delta}^{(2)} \\ \vdots \\ \bar{\Delta}^{(N)} \end{Bmatrix} \quad [\bar{K}_{nm}] = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11}^{nm} & \bar{K}_{12}^{nm} & \bar{K}_{13}^{nm} \\ \bar{K}_{21}^{nm} & \bar{K}_{22}^{nm} & \bar{K}_{23}^{nm} \\ \bar{K}_{31}^{nm} & \bar{K}_{32}^{nm} & \bar{K}_{33}^{nm} \end{bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \bar{P}^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1^{(n)} \\ \bar{P}_2^{(n)} \\ \bar{M}_3^{(n)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{\Delta}^{(m)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(m)} \\ \bar{\Delta}_2^{(m)} \\ \bar{\Delta}_3^{(m)} \end{Bmatrix}$$

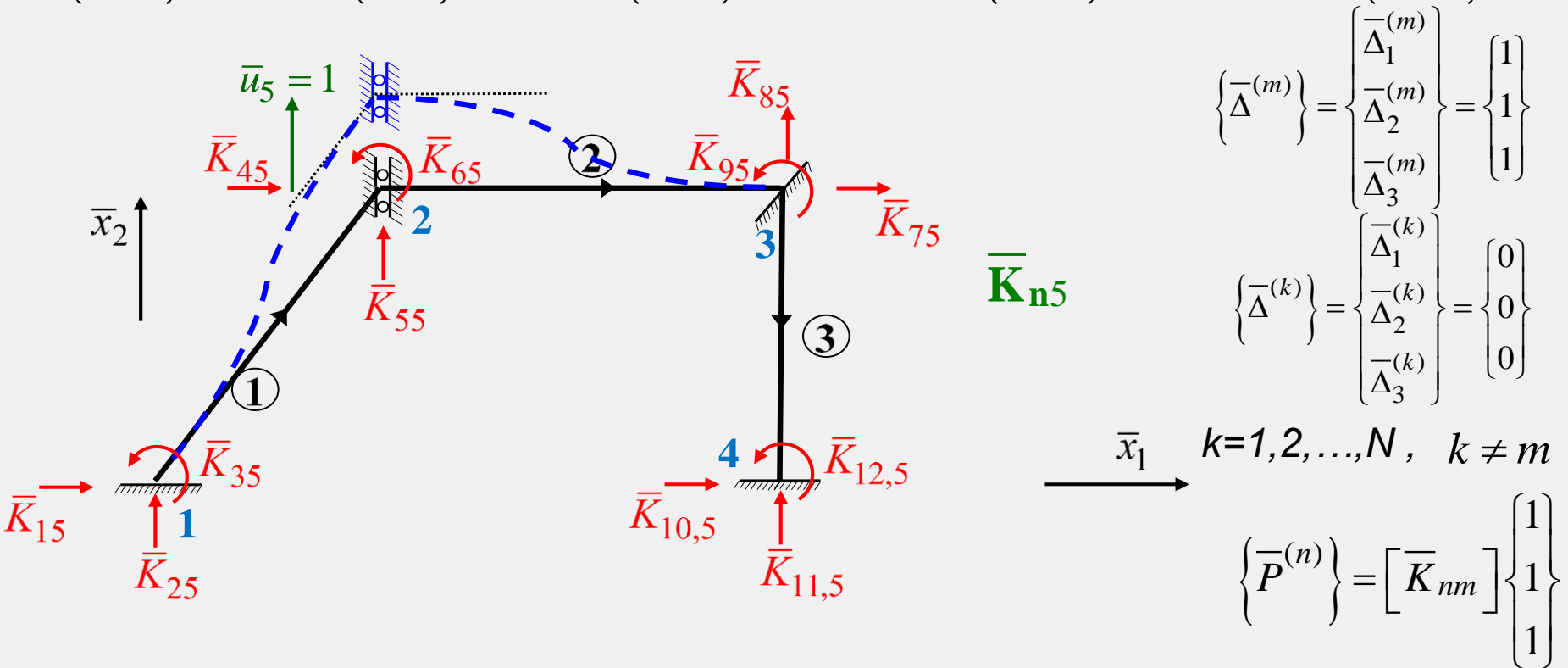
$$\begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{M}_3 \\ \hline \bar{P}_4 \\ \bar{P}_5 \\ \bar{M}_6 \\ \hline \vdots \\ \hline \bar{P}_{3N-2} \\ \bar{P}_{3N-1} \\ \bar{M}_{3N} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} & \bar{K}_{13} & \bar{K}_{14} & \bar{K}_{15} & \bar{K}_{16} & \dots & \bar{K}_{1,3N-2} & \bar{K}_{1,3N-1} & \bar{K}_{1,3N} \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} & \bar{K}_{23} & \bar{K}_{24} & \bar{K}_{25} & \bar{K}_{26} & \dots & \bar{K}_{2,3N-2} & \bar{K}_{2,3N-1} & \bar{K}_{2,3N} \\ \bar{K}_{31} & \bar{K}_{32} & \bar{K}_{33} & \bar{K}_{34} & \bar{K}_{35} & \bar{K}_{36} & \dots & \bar{K}_{3,3N-2} & \bar{K}_{3,3N-1} & \bar{K}_{3,3N} \\ \hline \bar{K}_{41} & \bar{K}_{42} & \bar{K}_{43} & \bar{K}_{44} & \bar{K}_{45} & \bar{K}_{46} & \dots & \bar{K}_{4,3N-2} & \bar{K}_{4,3N-1} & \bar{K}_{4,3N} \\ \bar{K}_{51} & \bar{K}_{52} & \bar{K}_{53} & \bar{K}_{54} & \bar{K}_{55} & \bar{K}_{56} & \dots & \bar{K}_{5,3N-2} & \bar{K}_{5,3N-1} & \bar{K}_{5,3N} \\ \bar{K}_{61} & \bar{K}_{62} & \bar{K}_{63} & \bar{K}_{64} & \bar{K}_{65} & \bar{K}_{66} & \dots & \bar{K}_{6,3N-2} & \bar{K}_{6,3N-1} & \bar{K}_{6,3N} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \bar{K}_{3N-2,1} & \bar{K}_{3N-2,2} & \bar{K}_{3N-2,3} & \bar{K}_{3N-2,4} & \bar{K}_{3N-2,5} & \bar{K}_{3N-2,6} & \dots & \bar{K}_{3N-2,3N-2} & \bar{K}_{3N-2,3N-1} & \bar{K}_{3N-2,3N} \\ \bar{K}_{3N-1,1} & \bar{K}_{3N-1,2} & \bar{K}_{3N-1,3} & \bar{K}_{3N-1,4} & \bar{K}_{3N-1,5} & \bar{K}_{3N-1,6} & \dots & \bar{K}_{3N-1,3N-2} & \bar{K}_{3N-1,3N-1} & \bar{K}_{3N-1,3N} \\ \bar{K}_{3N,1} & \bar{K}_{3N,2} & \bar{K}_{3N,3} & \bar{K}_{3N,4} & \bar{K}_{3N,5} & \bar{K}_{3N,6} & \dots & \bar{K}_{3N,3N-2} & \bar{K}_{3N,3N-1} & \bar{K}_{3N,3N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \hline \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \hline \vdots \\ \hline \bar{\Delta}_{3N-2} \\ \bar{\Delta}_{3N-1} \\ \bar{\Delta}_{3N} \end{Bmatrix} \quad \{\bar{P}\} = [\bar{K}] \{\bar{\Delta}\}$$

Καθολικό
μητρώο
στιβαρό-
τητας
φορέα

ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Στοιχεία καθολικού μητρώου στιβαρότητας φορέα επίπεδου πλαισίου

$$\left\{ \bar{P}^{(n)} \right\} = \left[\bar{K}_{n1} \right] \left\{ \bar{\Delta}^{(1)} \right\} + \left[\bar{K}_{n2} \right] \left\{ \bar{\Delta}^{(2)} \right\} + \dots + \left[\bar{K}_{nm} \right] \left\{ \bar{\Delta}^{(m)} \right\} + \dots + \left[\bar{K}_{n,N} \right] \left\{ \bar{\Delta}^{(N)} \right\}$$



ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Στοιχεία καθολικού μητρώου στιβαρότητας φορέα επίπεδου πλαισίου

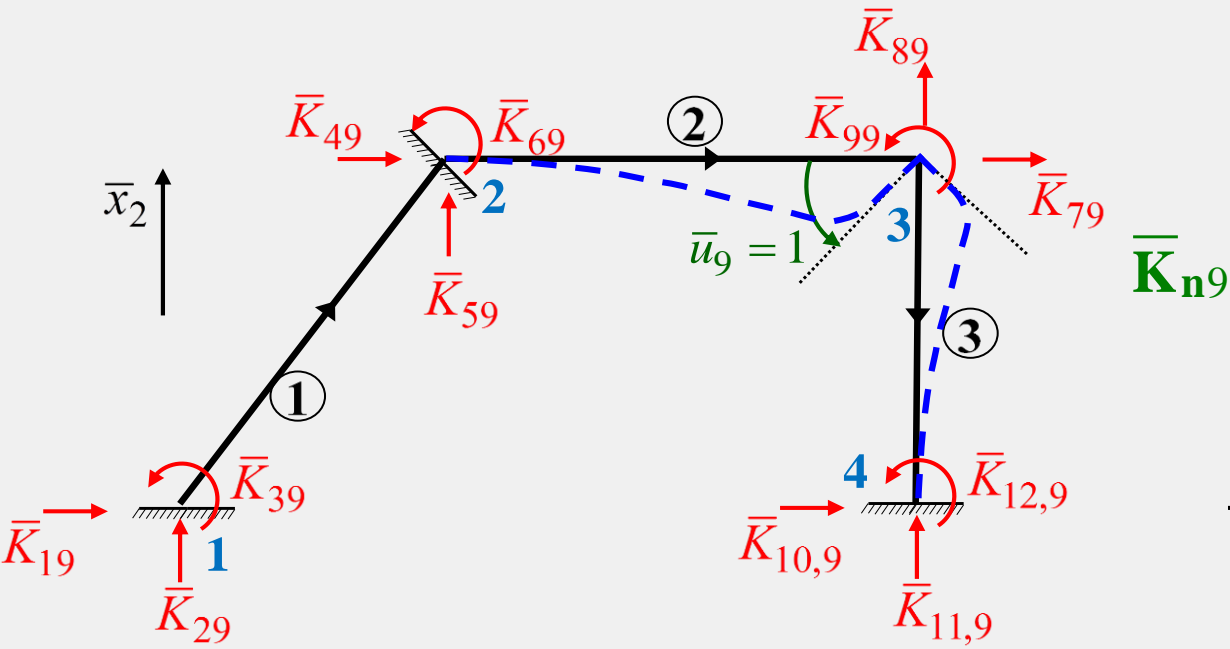
$$\left\{ \bar{P}^{(n)} \right\} = \left[\bar{K}_{n1} \right] \left\{ \bar{\Delta}^{(1)} \right\} + \left[\bar{K}_{n2} \right] \left\{ \bar{\Delta}^{(2)} \right\} + \dots + \left[\bar{K}_{nm} \right] \left\{ \bar{\Delta}^{(m)} \right\} + \dots + \left[\bar{K}_{n,N} \right] \left\{ \bar{\Delta}^{(N)} \right\}$$

$$\left\{ \bar{\Delta}^{(m)} \right\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(m)} \\ \bar{\Delta}_2^{(m)} \\ \bar{\Delta}_3^{(m)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ \bar{\Delta}^{(k)} \right\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(k)} \\ \bar{\Delta}_2^{(k)} \\ \bar{\Delta}_3^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$k=1,2,\dots,N, k \neq m$

$$\left\{ \bar{P}^{(n)} \right\} = \left[\bar{K}_{nm} \right] \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$



\bar{x}_1

ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Στοιχεία καθολικού μητρώου στιβαρότητας φορέα επίπεδου πλαισίου

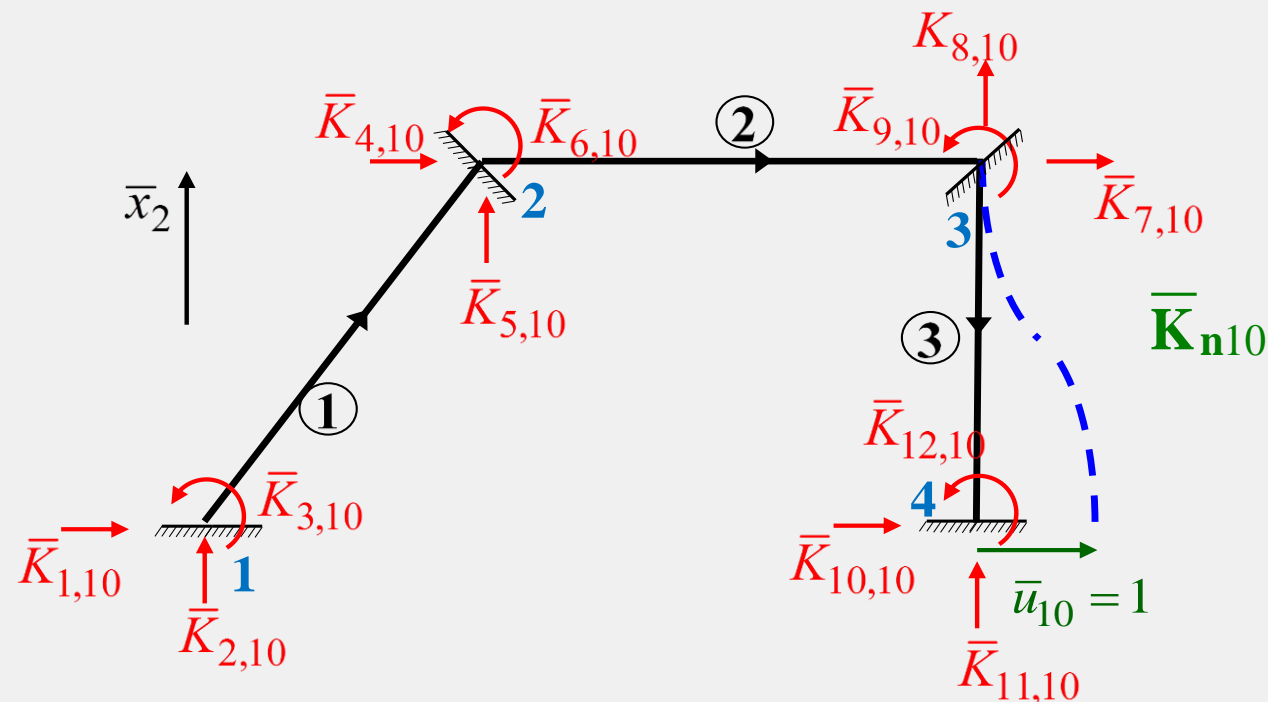
$$\left\{ \bar{P}^{(n)} \right\} = \left[\bar{K}_{n1} \right] \left\{ \bar{\Delta}^{(1)} \right\} + \left[\bar{K}_{n2} \right] \left\{ \bar{\Delta}^{(2)} \right\} + \dots + \left[\bar{K}_{nm} \right] \left\{ \bar{\Delta}^{(m)} \right\} + \dots + \left[\bar{K}_{n,N} \right] \left\{ \bar{\Delta}^{(N)} \right\}$$

$$\left\{ \bar{\Delta}^{(m)} \right\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(m)} \\ \bar{\Delta}_2^{(m)} \\ \bar{\Delta}_3^{(m)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ \bar{\Delta}^{(k)} \right\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(k)} \\ \bar{\Delta}_2^{(k)} \\ \bar{\Delta}_3^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$k=1,2,\dots,N, \quad k \neq m$$

$$\left\{ \bar{P}^{(n)} \right\} = \left[\bar{K}_{nm} \right] \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$



ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Διατύπωση μητρωικών εξισώσεων ισορροπίας που συνθέτουν το καθολικό μητρώο στιβαρότητας φορέα επίπεδου πλαισίου

$\{ \bar{P}^{(2)} \} - \{ \bar{A}^{1k} \} - \{ \bar{A}^{2j} \} = \{ 0 \}$

$\{ \bar{P}^{(2)} \} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1^{(2)} \\ \bar{P}_2^{(2)} \\ \bar{M}_3^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$\{ \bar{\Delta}^{(2)} \} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(2)} \\ \bar{\Delta}_2^{(2)} \\ \bar{\Delta}_3^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \end{Bmatrix}$

$\{ \bar{A}^{1k} \} = \begin{Bmatrix} \bar{A}^{1k} \\ \bar{A}^{2j} \end{Bmatrix}$

$\{ \bar{A}^{1k} \} = \begin{bmatrix} \bar{k}_{kj} \\ \bar{k}_{kk} \end{bmatrix} \{ \bar{D}^{1j} \} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{kk} \\ \bar{k}_{jk} \end{bmatrix} \{ \bar{D}^{1k} \}$

$\{ \bar{A}^{2j} \} = \begin{bmatrix} \bar{k}_{jj} \\ \bar{k}_{jk} \end{bmatrix} \{ \bar{D}^{2j} \} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{jk} \\ \bar{k}_{jj} \end{bmatrix} \{ \bar{D}^{2k} \}$

$\{ \bar{\Delta}^{(2)} \} = \{ \bar{D}^{1k} \} = \{ \bar{D}^{2j} \}$

$\{ \bar{\Delta}^{(1)} \} = \{ \bar{D}^{1j} \}$

$\{ \bar{\Delta}^{(3)} \} = \{ \bar{D}^{2k} \}$

$\{ \bar{P}^{(2)} \} = \begin{bmatrix} \bar{k}_{kj} \\ \bar{k}_{kk} + \bar{k}_{jj} \\ \bar{k}_{jk} \end{bmatrix} \{ \bar{\Delta}^{(1)} \} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{kk} \\ \bar{k}_{jj} \end{bmatrix} \{ \bar{\Delta}^{(2)} \} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{jk} \\ \bar{k}_{jj} \end{bmatrix} \{ \bar{\Delta}^{(3)} \}$

$$\{ \bar{P}^{(2)} \} - \begin{bmatrix} \bar{k}_{kj} \\ \bar{k}_{kk} \end{bmatrix} \{ \bar{\Delta}^{(1)} \} - \begin{bmatrix} \bar{k}_{kk} \\ \bar{k}_{jj} \end{bmatrix} \{ \bar{\Delta}^{(2)} \} - \begin{bmatrix} \bar{k}_{jk} \\ \bar{k}_{jj} \end{bmatrix} \{ \bar{\Delta}^{(3)} \} = \{ 0 \}$$

ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Βήματα σύνθεσης του καθολικού μητρώου στιβαρότητας φορέα

Η **σύνθεση** του καθολικού μητρώου στιβαρότητας $[\bar{K}]$ του επίπεδου πλαισίου **βασίζεται στις εξισώσεις ισορροπίας των κόμβων του** (λαμβάνοντας υπόψη το συμβιβαστό των μετακινήσεων τους). Για τη σύνθεση αυτή ακολουθούνται τα πιο κάτω βήματα

1) Για κάθε **μέλος** του πλαισίου **υπολογίζεται το καθολικό μητρώο στιβαρότητας** με τη

βοήθεια της σχέσης $[\bar{k}^i] = [\Lambda_{FT}^i]^T [k^i] [\Lambda_{FT}^i]$,
$$\begin{Bmatrix} \bar{A}^{ij} \\ \bar{A}^{ik} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{k}_{jj}^i] & [\bar{k}_{jk}^i] \\ [\bar{k}_{kj}^i] & [\bar{k}_{kk}^i] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{D}^{ij} \\ \bar{D}^{ik} \end{Bmatrix}$$
 με τη μορφή

δηλαδή επιμερίζοντας το μητρώο αυτό σε 4 υπομητρώα (2X2).

ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Βήματα σύνθεσης του καθολικού μητρώου στιβαρότητας φορέα

Η **σύνθεση** του καθολικού μητρώου στιβαρότητας $[\bar{K}]$ του επίπεδου πλαισίου **βασίζεται στις εξισώσεις ισορροπίας των κόμβων του** (λαμβάνοντας υπόψη το συμβιβαστό των μετακινήσεων τους). Για τη σύνθεση αυτή ακολουθούνται τα πιο κάτω βήματα

1) Για κάθε **μέλος** του πλαισίου **υπολογίζεται το καθολικό μητρώο στιβαρότητας με τη**

βοήθεια της σχέσης
$$[\bar{k}^i] = [\Lambda_{FT}^i]^T [k^i] [\Lambda_{FT}^i] \quad , \quad \begin{bmatrix} \{A^{ij}\} \\ \{A^{ik}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{k}_{jj}^i] & [\bar{k}_{jk}^i] \\ [\bar{k}_{kj}^i] & [\bar{k}_{kk}^i] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{D^{ij}\} \\ \{D^{ik}\} \end{bmatrix}$$

με τη μορφή

δηλαδή επιμερίζοντας το μητρώο αυτό σε 4 υπομητρώα (2X2).

2) Κάθε ένα από τα 4 προαναφερθέντα **υπομητρώα** του μέλους **μεταφέρεται** στο καθολικό μητρώο στιβαρότητας της σχέσης

$$\begin{bmatrix} \{P^{(1)}\} \\ \{P^{(2)}\} \\ \vdots \\ \{P^{(N)}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{11}] & [\bar{K}_{12}] & \dots & [\bar{K}_{1,N}] \\ [\bar{K}_{21}] & [\bar{K}_{22}] & \dots & [\bar{K}_{2,N}] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [\bar{K}_{N,1}] & [\bar{K}_{N,2}] & \dots & [\bar{K}_{N,N}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Delta^{(1)}\} \\ \{\Delta^{(2)}\} \\ \vdots \\ \{\Delta^{(N)}\} \end{bmatrix}$$

ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Βήματα σύνθεσης του καθολικού μητρώου στιβαρότητας φορέα

2) Κάθε ένα από τα 4 προαναφερθέντα υπομητρώα του μέλους μεταφέρεται στο καθολικό μητρώο στιβαρότητας της σχέσης

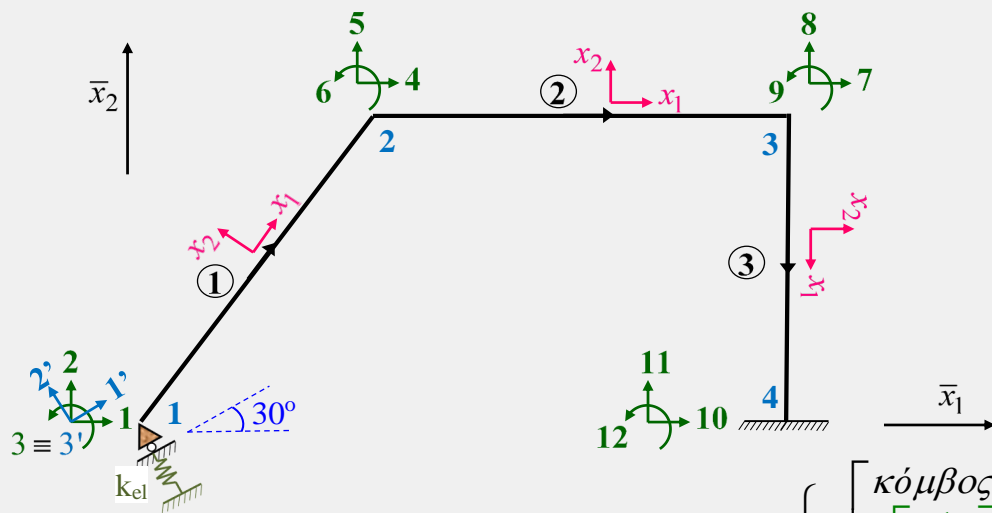
$$\begin{Bmatrix} \{\bar{P}^{(1)}\} \\ \{\bar{P}^{(2)}\} \\ \vdots \\ \{\bar{P}^{(N)}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{11}] & [\bar{K}_{12}] & \dots & [\bar{K}_{1,N}] \\ [\bar{K}_{21}] & [\bar{K}_{22}] & \dots & [\bar{K}_{2,N}] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [\bar{K}_{N,1}] & [\bar{K}_{N,2}] & \dots & [\bar{K}_{N,N}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{\Delta}^{(1)}\} \\ \{\bar{\Delta}^{(2)}\} \\ \vdots \\ \{\bar{\Delta}^{(N)}\} \end{Bmatrix} \text{ ως}$$

το $\begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^i \end{bmatrix}$ στη γραμμή με αύξοντα αριθμό τον αριθμό του κόμβου αρχής και στη στήλη με αύξοντα αριθμό τον αριθμό του κόμβου αρχής του μέλους

το $\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^i \end{bmatrix}$ στη γραμμή με αύξοντα αριθμό τον αριθμό του κόμβου αρχής και στη στήλη με αύξοντα αριθμό τον αριθμό του κόμβου πέρατος του μέλους κ.ο.κ.

3) Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να ολοκληρωθεί για όλα τα μέλη του πλαισίου, με την παρατήρηση ότι σε περίπτωση που στην ίδια θέση καταλήγουν περισσότερα του ενός μητρώα, αυτά αθροίζονται.

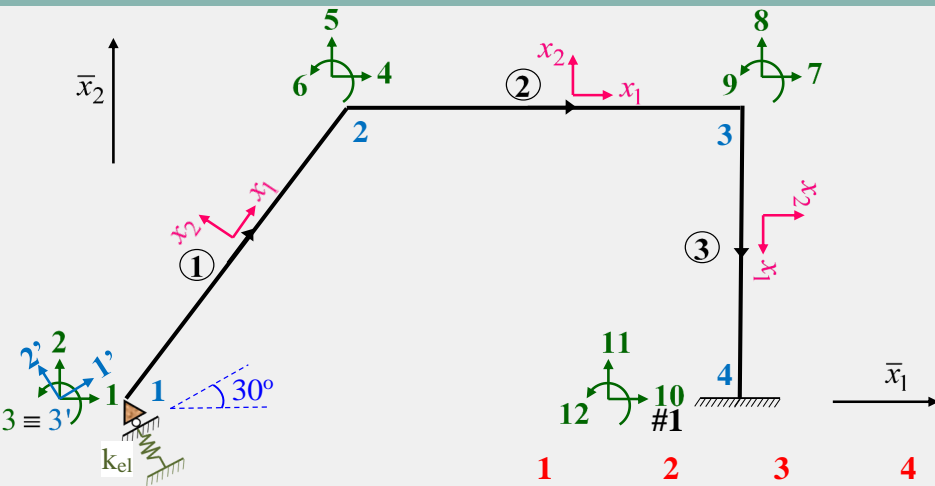
Εφαρμογή - ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ



Σύνθεση στο καθολικό μητρώο στιβαρότητας του πλαισίου

$$\left[\bar{K} \right] = \begin{array}{l} \text{κόμβος 1} \\ \text{κόμβος 2} \\ \text{κόμβος 3} \\ \text{κόμβος 4} \end{array} \left[\begin{array}{cccc} \text{κόμβος 1} & \text{κόμβος 2} & & \\ \left[\begin{array}{c} -1 \\ \bar{k}_{jj} \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} -1 \\ \bar{k}_{jk} \end{array} \right] & & \\ \left[\begin{array}{c} -1 \\ \bar{k}_{kj} \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} -1 \\ \bar{k}_{kk} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} -2 \\ \bar{k}_{jj} \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} -2 \\ \bar{k}_{jk} \end{array} \right] & \\ \left[\begin{array}{c} -2 \\ \bar{k}_{kj} \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} -2 \\ \bar{k}_{kk} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} -3 \\ \bar{k}_{jj} \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} -3 \\ \bar{k}_{jk} \end{array} \right] & \\ & \left[\begin{array}{c} -3 \\ \bar{k}_{kj} \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} -3 \\ \bar{k}_{kk} \end{array} \right] & \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{κόμβος 3} \\ \text{κόμβος 4} \end{array}$$

Εφαρμογή - ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ



Καθολικό μητρώο στιβαρότητας πλαισίου

$$[K] = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{#1} \\ \text{#2} \\ \text{#3} \\ \text{#4} \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{#1} \\ \text{#2} \\ \text{#3} \\ \text{#4} \end{matrix} & \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \right. \\ \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \right. \\ \left\{ \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \right. \\ \left\{ \begin{matrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} \right. \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3.618 & & & & & & & & & & & \\ 4.786 & 6.410 & & & & & & & & & & \\ -0.085 & 0.064 & 0.533 & & & & & & & & & \\ -3.618 & -4.786 & 0.085 & 12.993 & & & & & & & & \\ -4.786 & -6.410 & -0.064 & 4.786 & 6.433 & & & & & & & \\ -0.085 & 0.064 & 0.266 & 0.085 & 0.030 & 1.033 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & -9.375 & 0 & 0 & 9.430 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.023 & -0.094 & 0 & 12.523 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.094 & 0.25 & 0.167 & -0.094 & 1.167 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.055 & 0 & -0.167 & 0.055 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12.5 & 0 & 0 & 12.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.167 & 0 & 0.333 & -0.167 & 0 & 0.667 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

*ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΗ (ΑΝΑΔΙΑΤΑΞΗ)
ΚΑΘΟΛΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ
ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΛΟΓΩ ΣΤΗΡΙΞΗΣ –
ΜΗΤΡΩΟ ΑΝΑΔΙΑΤΑΞΗΣ*

ΑΝΑΔΙΑΤΑΞΗ ΒΑΘΜΩΝ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

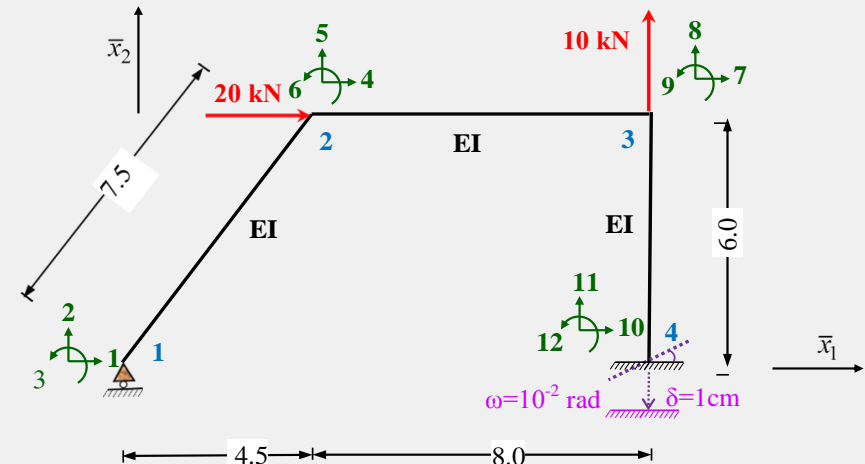
Η **μεθοδολογία διαχωρισμού των γνωστών από τα άγνωστα μεγέθη** στα διανύσματα ολικών επικόμβιων δράσεων και ολικών επικόμβιων μετακινήσεων επιτυγχάνεται με τη μετάθεση στοιχείων στα διανύσματα αυτά ή όπως αλλιώς καλείται **αναδιάταξη των διανυσμάτων** αυτών. Πιο συγκεκριμένα επιδιώκεται η αναδιάταξη των στοιχείων των διανυσμάτων επικόμβιων δράσεων και επικόμβιων μετακινήσεων, έτσι ώστε και στα δύο διανύσματα **να προηγούνται οι ελεύθεροι βαθμοί ελευθερίας** (γνωστές επικόμβιες δράσεις και άγνωστες επικόμβιες μετακινήσεις) **και να έπονται οι δεσμευμένοι βαθμοί ελευθερίας** (άγνωστες επικόμβιες δράσεις και γνωστές επικόμβιες μετακινήσεις). Είναι προφανές ότι η προαναφερθείσα αναδιάταξη θα έχει ως άμεσο αποτέλεσμα και την απαιτούμενη τροποποίηση του καθολικού μητρώου στιβαρότητας του πλαισίου.

Αρχική αρίθμηση β.ε.

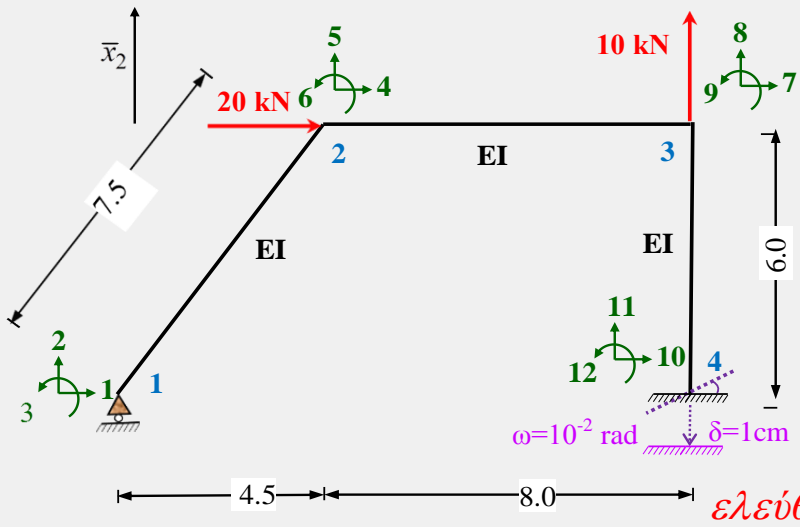
{ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 }

Τελική αρίθμηση β.ε.

{ 1 3 4 5 6 7 8 9 | 2 10 11 12 }



ΜΟΡΦΩΣΗ ΜΗΤΡΩΟΥ ΑΝΑΔΙΑΤΑΞΗΣ



**Μητρώο
αναδιάταξης
πλασιού**

**Τροποποιημένα
(λόγω αναδιάταξης)
διανύσματα
επικόμβιων δράσεων
και μετακινήσεων
πλασιού**

$$\{\bar{P}_m\} = [V] \{\bar{P}\}$$

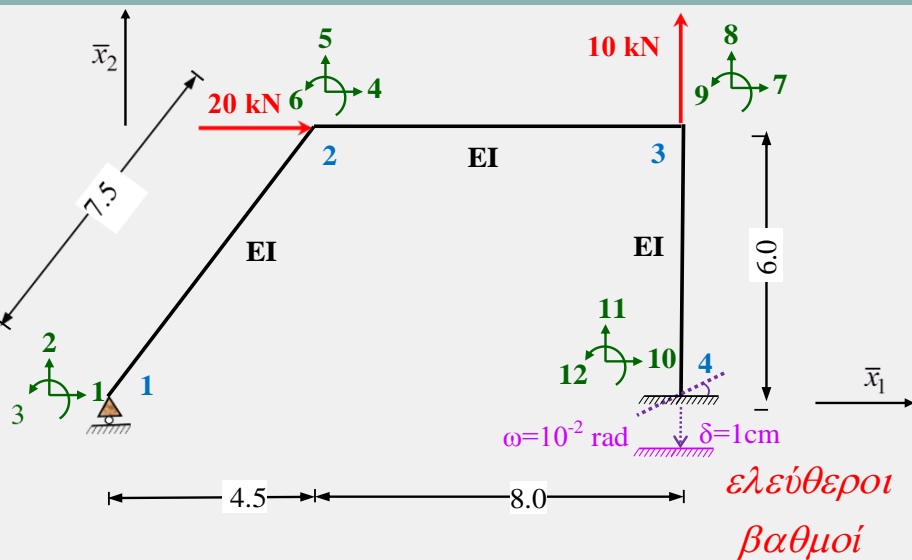
$$\{\bar{\Delta}_m\} = [V] \{\bar{\Delta}\}$$

*ελεύθεροι
βαθμοί
(free)*

*δεσμευμένοι
βαθμοί
(supported)*

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ \hline 2 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ \hline 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{Bmatrix}$$

ΑΝΑΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΕΠΙΚΟΜΒΙΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ



Τροποποιημένο (λόγω αναδιάταξης) διάνυσμα επικόμβιων δράσεων πλαισίου

$$\{\bar{P}_m\} = [V] \{\bar{P}\}$$

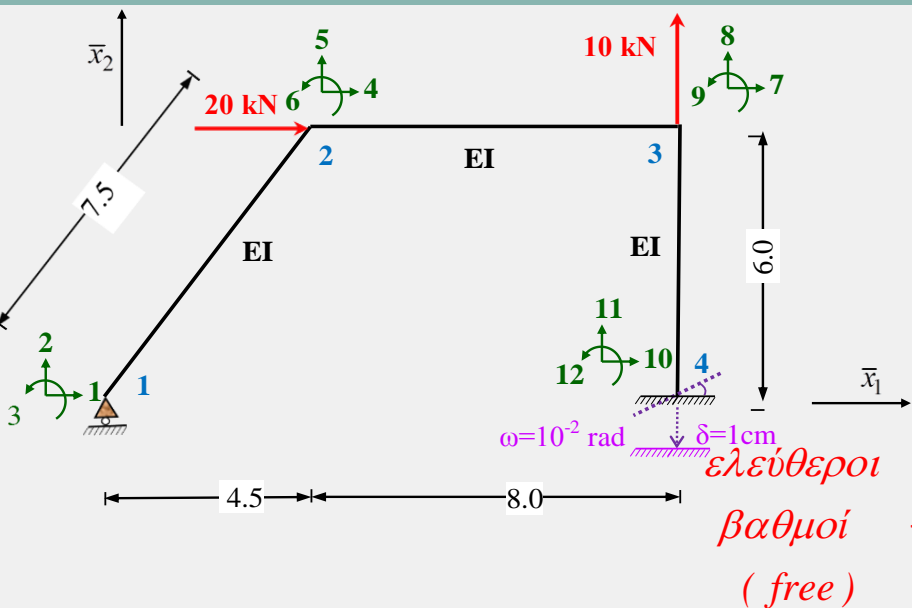
$$\{\bar{P}\} = [V]^T \{\bar{P}_m\}$$

ελεύθεροι
βαθμοί
(free)

δεσμευμένοι
βαθμοί
(supported)

$$\begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{M}_3 \\ \bar{P}_4 \\ \bar{P}_5 \\ \bar{M}_6 \\ \bar{P}_7 \\ \bar{P}_8 \\ \bar{M}_9 \\ \hline \bar{P}_2 \\ \bar{P}_{10} \\ \bar{P}_{11} \\ \bar{M}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{M}_3 \\ \bar{P}_4 \\ \bar{P}_5 \\ \bar{M}_6 \\ \bar{P}_7 \\ \bar{P}_8 \\ \bar{M}_9 \\ \bar{P}_{10} \\ \bar{P}_{11} \\ \bar{M}_{12} \end{Bmatrix}$$

ΑΝΑΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΕΠΙΚΟΜΒΙΩΝ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ



$$\{\bar{\Delta}_m\} = [V] \{\bar{\Delta}\}$$

$$\{\bar{\Delta}\} = [V]^T \{\bar{\Delta}_m\}$$

ελεύθεροι
βαθμοί
(free)

δεσμευμένοι
βαθμοί
(supported)

Τροποποιημένο (λόγω αναδιάταξης) διάνυσμα επικόμβιων μετακινήσεων πλαισίου

$$\begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \hline \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_{10} \\ \bar{\Delta}_{11} \\ \bar{\Delta}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \bar{\Delta}_{10} \\ \bar{\Delta}_{11} \\ \bar{\Delta}_{12} \end{Bmatrix}$$

ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΗ (ΑΝΑΔΙΑΤΑΞΗ) ΚΑΘΟΛΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Είναι προφανές ότι η **προαναφερθείσα αναδιάταξη** θα έχει ως άμεσο αποτέλεσμα και την **απαιτούμενη τροποποίηση του καθολικού μητρώου στιβαρότητας** του πλαισίου.

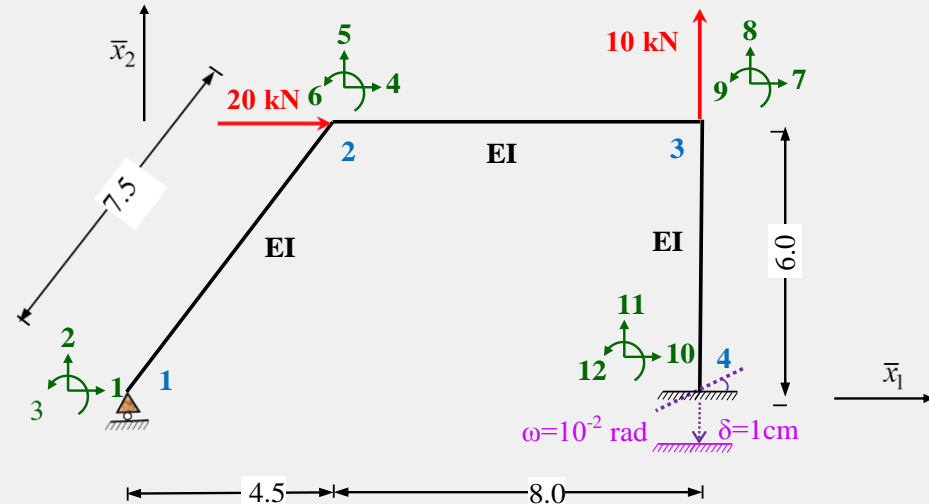
$$\begin{aligned} \{\bar{P}\} &= [V]^T \{\bar{P}_m\} \\ \{\bar{\Delta}\} &= [V]^T \{\bar{\Delta}_m\} \end{aligned} \quad \{\bar{P}\} = [\bar{K}]\{\bar{\Delta}\} \quad \longrightarrow \quad [V]^T \{\bar{P}_m\} = [\bar{K}][V]^T \{\bar{\Delta}_m\} \quad \xrightarrow{[V][V]^T = [I]}$$

$$\{\bar{P}_m\} = [V][\bar{K}][V]^T \{\bar{\Delta}_m\}$$

$$\{\bar{P}_m\} = [\bar{K}_m]\{\bar{\Delta}_m\}$$

**Τροποποιημένο
(αναδιατεταγμένο)
καθολικό μητρώο
στιβαρότητας**

$$[\bar{K}_m] = [V][\bar{K}][V]^T$$



ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΗ (ΑΝΑΔΙΑΤΑΞΗ) ΚΑΘΟΛΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Τροποποιημένη (αναδιατεταγμένη) μητρική εξίσωση ισορροπίας

$$\{\bar{P}_m\} = [\bar{K}_m] \{\bar{\Delta}_m\}$$

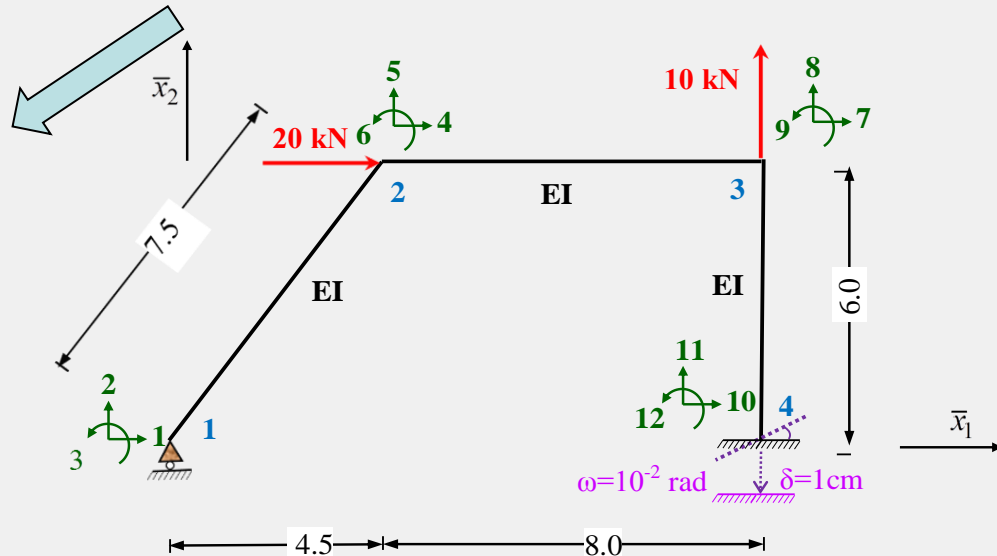
πλήθος ελεύθερων και δεσμευμένων βαθμών ελευθερίας $N_f + N_s = 3N$

$$\begin{bmatrix} \{\bar{P}_f\} \\ \{\bar{P}_s\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{ff}] & [\bar{K}_{fs}] \\ [\bar{K}_{sf}] & [\bar{K}_{ss}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\bar{\Delta}_f\} \\ \{\bar{\Delta}_s\} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \{\bar{P}_f\} &= [\bar{K}_{ff}] \{\bar{\Delta}_f\} + [\bar{K}_{fs}] \{\bar{\Delta}_s\} \\ \{\bar{P}_s\} &= [\bar{K}_{sf}] \{\bar{\Delta}_f\} + [\bar{K}_{ss}] \{\bar{\Delta}_s\} \end{aligned}$$

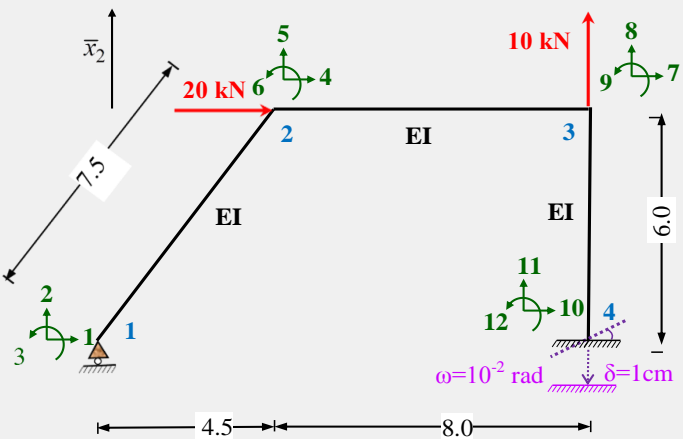
$$\begin{aligned} \{\bar{\Delta}_f\} &= [\bar{K}_{ff}]^{-1} (\{\bar{P}_f\} - [\bar{K}_{fs}] \{\bar{\Delta}_s\}) \\ \{\bar{P}_s\} &= [\bar{K}_{sf}] \{\bar{\Delta}_f\} + [\bar{K}_{ss}] \{\bar{\Delta}_s\} \end{aligned}$$

Επίλυση –
Επικόμβιες μετακινήσεις κατά τους ελεύθερους και επικόβιες δράσεις (αντιδράσεις) κατά τους δεσμευμένους β.ε.



Εφαρμογή - ΑΝΑΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΕΠΙΚΟΜΒΙΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ

Τροποποιημένο (λόγω αναδιάταξης) διάνυσμα επικόμβιων δράσεων πλαισίου

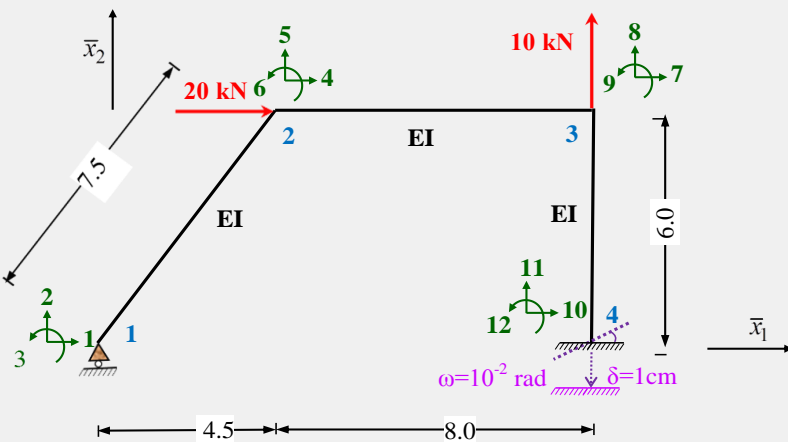


$$\begin{bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{M}_3 \\ \bar{P}_4 \\ \bar{P}_5 \\ \bar{M}_6 \\ \bar{P}_7 \\ \bar{P}_8 \\ \bar{M}_9 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_{10} \\ \bar{P}_{11} \\ \bar{M}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ \dots \\ \bar{R}_2 \\ \bar{R}_{10} \\ \bar{R}_{11} \\ \bar{R}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{R}_2 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ \dots \\ \bar{R}_{10} \\ \bar{R}_{11} \\ \bar{R}_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \{\bar{P}_m\} &= [V] \{\bar{P}\} \\
 \{\bar{P}\} &= [V]^T \{\bar{P}_m\}
 \end{aligned}$$

Εφαρμογή - ΑΝΑΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΕΠΙΚΟΜΒΙΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ

Τροποποιημένο (λόγω αναδιάταξης) διάνυσμα επικόμβιων μετακινήσεων πλαισίου



$$\{\bar{\Delta}_m\} = [V] \{\bar{\Delta}\}$$

$$\{\bar{\Delta}\} = [V]^T \{\bar{\Delta}_m\}$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_{10} \\ \bar{\Delta}_{11} \\ \bar{\Delta}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\bar{\Delta}_f\} \\ \{\bar{\Delta}_s\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ 0 \\ 0 \\ -0.01 \\ 0.01 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \bar{\Delta}_{10} \\ \bar{\Delta}_{11} \\ \bar{\Delta}_{12} \end{Bmatrix}$$

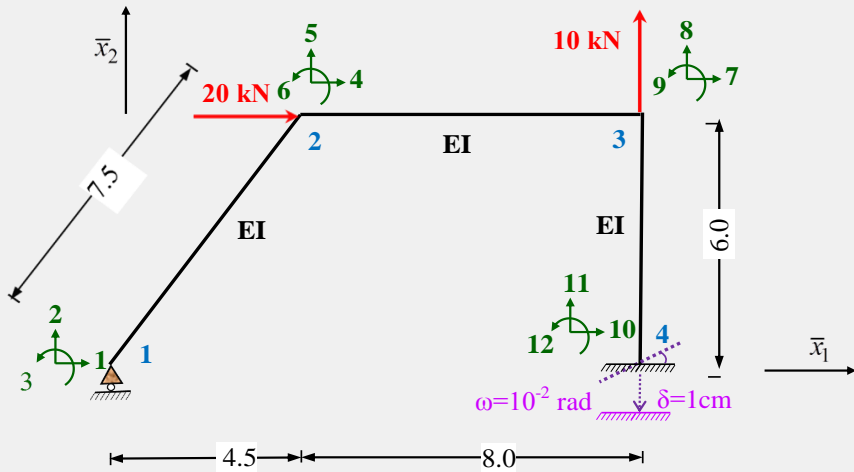
Εφαρμογή - ΑΝΑΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΟ ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Τροποποιημένο (λόγω αναδιάταξης) καθολικό μητρώο στιβαρότητας πλαισίου

$$[\bar{K}_m] = [V][\bar{K}][V]^T = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{ff}] & [\bar{K}_{fs}] \\ [\bar{K}_{sf}] & [\bar{K}_{ss}] \end{bmatrix} =$$

	1	3	4	5	6	7	8	9	2	10	11	12
1	3.618											
3	-0.085	0.553										
4	-3.618	0.085	12.993									
5	-4.786	-0.064	4.786	6.433								
6	-0.085	0.266	0.085	0.03	1.033							
7	0	0	-9.375	0	0	9.43						
8	0	0	0	-0.023	-0.094	0	12.523					
9	0	0	0	0.094	0.25	0.167	-0.094	1.167				
2	4.786	0.064	-4.786	-6.41	0.064	0	0	0	6.41			
10	0	0	0	0	0	-0.055	0	-0.167	0	0.055		
11	0	0	0	0	0	0	-12.5	0	0	0	12.5	
12	0	0	0	0	0	0.167	0	0.333	0	-0.167	0	0.667

Εφαρμογή - ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΠΛΑΙΣΙΟΥ



Επίλυση –
Επικόμβιες μετακινήσεις κατά τους
ελεύθερους και επικόβιες δράσεις
(αντιδράσεις) κατά τους
δεσμευμένους β.ε.

$$\{\bar{\Delta}_f\} = [\bar{K}_{ff}]^{-1} (\{\bar{P}_f\} - [\bar{K}_{fs}]\{\bar{\Delta}_s\})$$

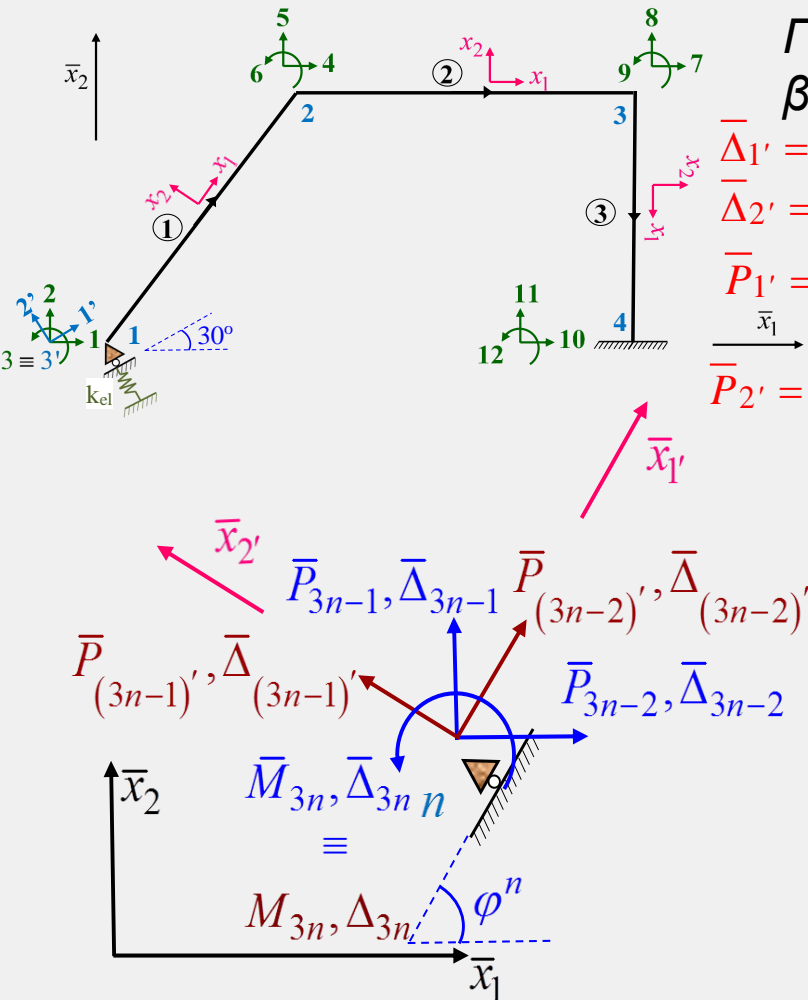
$$\{\bar{P}_s\} = [\bar{K}_{sf}]\{\bar{\Delta}_f\} + [\bar{K}_{ss}]\{\bar{\Delta}_s\}$$

$$\{\bar{P}_s\} = \begin{Bmatrix} \bar{R}_2 \\ \bar{R}_{10} \\ \bar{R}_{11} \\ \bar{R}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3.22 \\ -20 \\ -6.77 \\ 87.24 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{\Delta}_f\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(-1)} \\ \bar{\Delta}_3^{(-1)} \\ \bar{\Delta}_1^{(-2)} \\ \bar{\Delta}_2^{(-2)} \\ \bar{\Delta}_3^{(-2)} \\ \bar{\Delta}_1^{(-3)} \\ \bar{\Delta}_2^{(-3)} \\ \bar{\Delta}_3^{(-3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1255.0 \\ 80.5 \\ 828.0 \\ 313.0 \\ 41.4 \\ 826.0 \\ 0.532 \\ -152.0 \end{Bmatrix}$$

*ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΘΟΛΙΚΟΥ
ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ
ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΛΟΓΩ ΚΕΚΛΙΜΕΝΗΣ
ΣΤΗΡΙΞΗΣ – ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΣΤΗΡΙΞΗ*

ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΘΟΛΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΛΟΓΩ ΚΕΚΛΙΜΕΝΗΣ ΣΤΗΡΙΞΗΣ – ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΣΤΗΡΙΞΗ



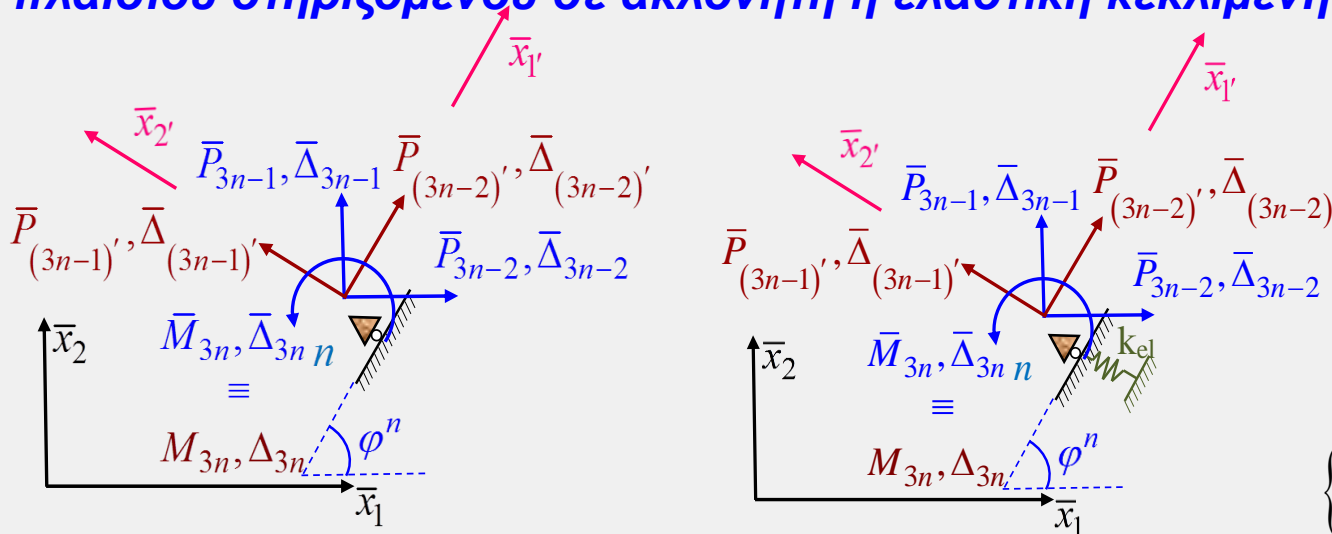
Για τους καθολικούς β.ε. 1' και 2' θα ισχύει

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_{1'} &= \text{άγνωστη} \\ \bar{\Delta}_{2'} &= \text{γνωστή} \\ \bar{P}_{1'} &= \text{γνωστή} \\ \bar{P}_{2'} &= \text{άγνωστη} \end{aligned}$$

Για τον κόμβο του πλαισίου ο οποίος φέρει κεκλιμένη στήριξη απαιτείται **τροποποίηση του καθολικού συστήματος αξόνων** έτσι ώστε να μπορεί να ληφθεί υπόψη η προαναφερθείσα στήριξη. Η εν λόγω τροποποίηση θα πρέπει **να προηγηθεί της αναδιάταξης** που περιγράφηκε ήδη, μια και όπως προαναφέρθηκε η μόρφωση του μητρώου αναδιάταξης υιοθετώντας το αρχικό καθολικό σύστημα αξόνων είναι αδύνατη.

ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΘΟΛΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΛΟΓΩ ΚΕΚΛΙΜΕΝΗΣ ΣΤΗΡΙΞΗΣ – ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΣΤΗΡΙΞΗ

Αρχικό και τελικό καθολικό σύστημα αξόνων στον κόμβο (n) επίπεδου πλαισίου στηριζόμενου σε ακλόνητη ή ελαστική κεκλιμένη κύλιση



συνιστώσες
επικόμβιων
μετακινήσεων κόμβου
(n) στο αρχικό και το
τροποποιημένο
σύστημα αξόνων

συνιστώσες επικόμβιων δράσεων κόμβου (n) στο αρχικό και το τροποποιημένο σύστημα αξόνων

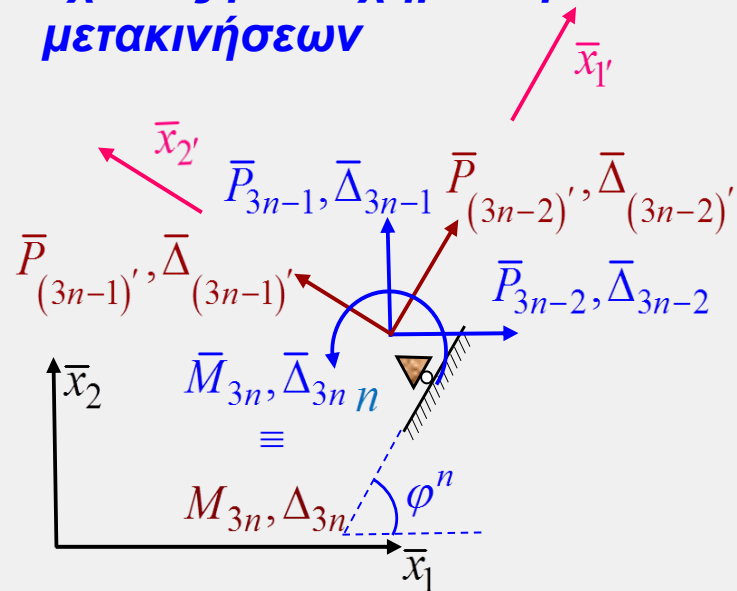
$$\left\{ \bar{P}^{(n)} \right\} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1^{(n)} \\ \bar{P}_2^{(n)} \\ \bar{M}_3^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_{3n-2} \\ \bar{P}_{3n-1} \\ \bar{M}_{3n} \end{Bmatrix} \quad \left\{ \bar{P}'^{(n)} \right\} = \begin{Bmatrix} \bar{P}'_1^{(n)} \\ \bar{P}'_2^{(n)} \\ \bar{M}'_3^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_{(3n-2)'} \\ \bar{P}_{(3n-1)'} \\ \bar{M}_{(3n)'} \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ \bar{\Delta}^{(n)} \right\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(n)} \\ \bar{\Delta}_2^{(n)} \\ \bar{\Delta}_3^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_{3n-2} \\ \bar{\Delta}_{3n-1} \\ \bar{\Delta}_{3n} \end{Bmatrix}$$

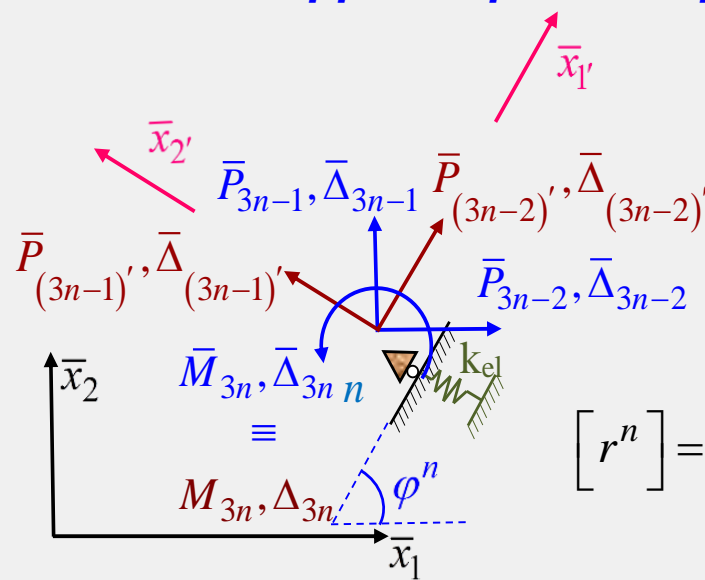
$$\left\{ \bar{\Delta}'^{(n)} \right\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}'_1^{(n)} \\ \bar{\Delta}'_2^{(n)} \\ \bar{\Delta}'_3^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}'_{(3n-2)'} \\ \bar{\Delta}'_{(3n-1)'} \\ \bar{\Delta}'_{(3n)'} \end{Bmatrix}$$

ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΘΟΛΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΛΟΓΩ ΚΕΚΛΙΜΕΝΗΣ ΣΤΗΡΙΞΗΣ – ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΣΤΗΡΙΞΗ

Σχέσεις μετασχηματισμού συνιστωσών επικόμβιων δράσεων ή επικόμβιων μετακινήσεων



συνιστώσες επικόμβιων δράσεων



συνιστώσες επικόμβιων μετακινήσεων

$$\left[r^n \right]^{-1} = \left[r^n \right]^T$$

$$\left[r^n \right] = \begin{bmatrix} \cos \varphi^n & \sin \varphi^n & 0 \\ -\sin \varphi^n & \cos \varphi^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{P}_1^{(n)} \\ \bar{P}_2^{(n)} \\ \bar{M}_3^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi^n & \sin \varphi^n & 0 \\ -\sin \varphi^n & \cos \varphi^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{M}_3 \end{Bmatrix} = \left[r^n \right] \begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{M}_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(n)} \\ \bar{\Delta}_2^{(n)} \\ \bar{\Delta}_3^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi^n & \sin \varphi^n & 0 \\ -\sin \varphi^n & \cos \varphi^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \end{Bmatrix} = \left[r^n \right] \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \end{Bmatrix}$$

ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΘΟΛΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΛΟΓΩ ΚΕΚΛΙΜΕΝΗΣ ΣΤΗΡΙΞΗΣ – ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΣΤΗΡΙΞΗ

Ένταξη των σχέσεων μετασχηματισμού σε αντίστοιχες σχέσεις που περιλαμβάνουν το σύνολο των δράσεων ή των μετακινήσεων των κόμβων του πλαισίου

$$\begin{Bmatrix} \bar{P}_1^{(1)} \\ \bar{P}_2^{(1)} \\ \bar{M}_3^{(1)} \\ \bar{P}_1^{(2)} \\ \bar{P}_2^{(2)} \\ \bar{M}_3^{(2)} \\ \vdots \\ \bar{P}_1^{(n)} \\ \bar{P}_2^{(n)} \\ \bar{M}_3^{(n)} \\ \vdots \\ \bar{P}_1^{(N)} \\ \bar{P}_2^{(N)} \\ \bar{M}_3^{(N)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \cos \varphi^n & \sin \varphi^n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\sin \varphi^n & \cos \varphi^n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{P}_1^{(1)} \\ \bar{P}_2^{(1)} \\ \bar{M}_3^{(1)} \\ \bar{P}_1^{(2)} \\ \bar{P}_2^{(2)} \\ \bar{M}_3^{(2)} \\ \vdots \\ \bar{P}_1^{(n)} \\ \bar{P}_2^{(n)} \\ \bar{M}_3^{(n)} \\ \vdots \\ \bar{P}_1^{(N)} \\ \bar{P}_2^{(N)} \\ \bar{M}_3^{(N)} \end{Bmatrix}$$

ή ΠΙΟ ΣΥΝΟΠΤΙΚά

$$\{\bar{P}_m\} = [R^n] \{\bar{P}\}$$

$$\{\bar{\Delta}_m\} = [R^n] \{\bar{\Delta}\}$$

Αντίστροφες σχέσεις

$$\{\bar{P}\} = [R^n]^T \{\bar{P}_m\}$$

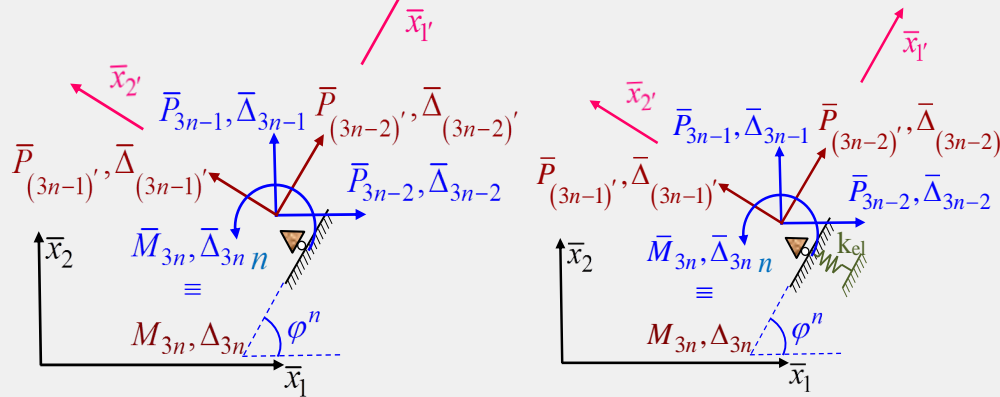
$$\{\bar{\Delta}\} = [R^n]^T \{\bar{\Delta}_m\}$$

όπου

[Rⁿ] μητρώο περιστροφής (μετασχηματισμού)

ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΘΟΛΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΛΟΓΩ ΚΕΚΛΙΜΕΝΗΣ ΣΤΗΡΙΞΗΣ – ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΣΤΗΡΙΞΗ

Τροποποίηση καθολικού μητρώου στιβαρότητας λόγω κεκλιμένης στήριξης



Τροποποιημένο καθολικό μητρώο στιβαρότητας

$$[\bar{K}_m] = [R^n][\bar{K}][R^n]^T$$

Σχέσεις μετασχηματισμού

$$\{\bar{P}_m\} = [R^n]\{\bar{P}\}$$

$$\{\bar{\Delta}_m\} = [R^n]\{\bar{\Delta}\}$$

Αντίστροφες σχέσεις

$$\{\bar{P}\} = [R^n]^T\{\bar{P}_m\}$$

$$\{\bar{\Delta}\} = [R^n]^T\{\bar{\Delta}_m\}$$

$$\{\bar{P}\} = [\bar{K}]\{\bar{\Delta}\} \longrightarrow [R^n]^T\{\bar{P}_m\} = [\bar{K}][R^n]^T\{\bar{\Delta}_m\}$$

Ακολουθεί αναδιάταξη του μητρώου στιβαρότητας (2η τροποποίηση)

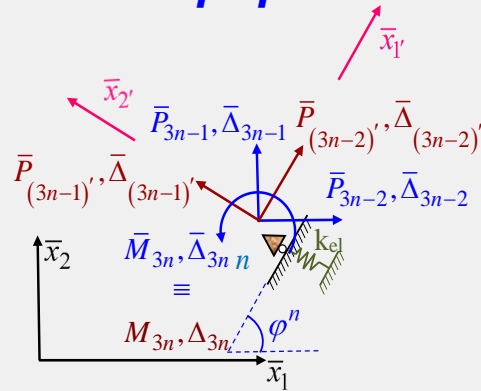
$$\{\bar{P}_m\} = [R^n][\bar{K}][R^n]^T\{\bar{\Delta}_m\}$$

$$[\bar{K}_{mm}] = [V][\bar{K}_m][V]^T =$$

$$[V][R^n][\bar{K}][R^n]^T[V]^T$$

ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΘΟΛΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΛΟΓΩ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΣΤΗΡΙΞΗΣ

Τροποποίηση καθολικού μητρώου στιβαρότητας λόγω ελαστικής στήριξης



Τροποποιημένη εξίσωση ισορροπίας

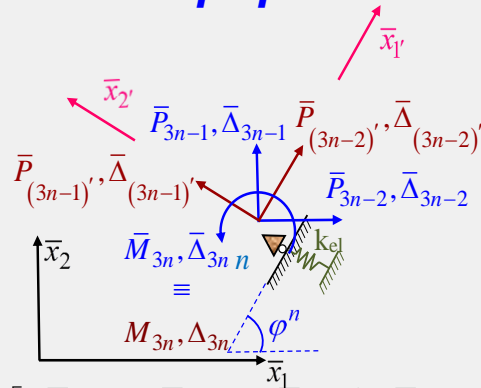
$$\{\bar{P}\} = [\bar{K}] \{\bar{\Delta}\} + k_{el} \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0\}^T$$

ή πιο αναλυτικά

$$\begin{Bmatrix} \bar{P}_1^{(1)} \\ \bar{P}_2^{(1)} \\ \bar{M}_3^{(1)} \\ \bar{P}_1^{(2)} \\ \bar{P}_2^{(2)} \\ \bar{M}_3^{(2)} \\ \vdots \\ \bar{P}_1^{(n)} \\ \bar{P}_2^{(n)} \\ \bar{M}_3^{(n)} \\ \vdots \\ \bar{P}_1^{(N)} \\ \bar{P}_2^{(N)} \\ \bar{M}_3^{(N)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} & \bar{K}_{13} & \bar{K}_{14} & \bar{K}_{15} & \bar{K}_{16} & \dots & \bar{K}_{1,3n-2} & \bar{K}_{1,3n-1} & \bar{K}_{1,3n} & \dots & \bar{K}_{1,3N-2} & \bar{K}_{1,3N-1} & \bar{K}_{1,3N} \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} & \bar{K}_{23} & \bar{K}_{24} & \bar{K}_{25} & \bar{K}_{26} & \dots & \bar{K}_{2,3n-2} & \bar{K}_{2,3n-1} & \bar{K}_{2,3n} & \dots & \bar{K}_{2,3N-2} & \bar{K}_{2,3N-1} & \bar{K}_{2,3N} \\ \bar{K}_{31} & \bar{K}_{32} & \bar{K}_{33} & \bar{K}_{34} & \bar{K}_{35} & \bar{K}_{36} & \dots & \bar{K}_{3,3n-2} & \bar{K}_{3,3n-1} & \bar{K}_{3,3n} & \dots & \bar{K}_{3,3N-2} & \bar{K}_{3,3N-1} & \bar{K}_{3,3N} \\ \bar{K}_{41} & \bar{K}_{42} & \bar{K}_{43} & \bar{K}_{44} & \bar{K}_{45} & \bar{K}_{46} & \dots & \bar{K}_{4,3n-2} & \bar{K}_{4,3n-1} & \bar{K}_{4,3n} & \dots & \bar{K}_{4,3N-2} & \bar{K}_{4,3N-1} & \bar{K}_{4,3N} \\ \bar{K}_{51} & \bar{K}_{52} & \bar{K}_{53} & \bar{K}_{54} & \bar{K}_{55} & \bar{K}_{56} & \dots & \bar{K}_{5,3n-2} & \bar{K}_{5,3n-1} & \bar{K}_{5,3n} & \dots & \bar{K}_{5,3N-2} & \bar{K}_{5,3N-1} & \bar{K}_{5,3N} \\ \bar{K}_{61} & \bar{K}_{62} & \bar{K}_{63} & \bar{K}_{64} & \bar{K}_{65} & \bar{K}_{66} & \dots & \bar{K}_{6,3n-2} & \bar{K}_{6,3n-1} & \bar{K}_{6,3n} & \dots & \bar{K}_{6,3N-2} & \bar{K}_{6,3N-1} & \bar{K}_{6,3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{K}_{3n-2,1} & \bar{K}_{3n-2,2} & \bar{K}_{3n-2,3} & \bar{K}_{3n-2,4} & \bar{K}_{3n-2,5} & \bar{K}_{3n-2,6} & \dots & \bar{K}_{3n-2,3n-2} & \bar{K}_{3n-2,3n-1} & \bar{K}_{3n-2,3n} & \dots & \bar{K}_{3n-2,3N-2} & \bar{K}_{3n-2,3N-1} & \bar{K}_{3n-2,3N} \\ \bar{K}_{3n-1,1} & \bar{K}_{3n-1,2} & \bar{K}_{3n-1,3} & \bar{K}_{3n-1,4} & \bar{K}_{3n-1,5} & \bar{K}_{3n-1,6} & \dots & \bar{K}_{3n-1,3n-2} & \bar{K}_{3n-1,3n-1} & \bar{K}_{3n-1,3n} & \dots & \bar{K}_{3n-1,3N-2} & \bar{K}_{3n-1,3N-1} & \bar{K}_{3n-1,3N} \\ \bar{K}_{3n,1} & \bar{K}_{3n,2} & \bar{K}_{3n,3} & \bar{K}_{3n,4} & \bar{K}_{3n,5} & \bar{K}_{3n,6} & \dots & \bar{K}_{3n,3n-2} & \bar{K}_{3n,3n-1} & \bar{K}_{3n,3n} & \dots & \bar{K}_{3n,3N-2} & \bar{K}_{3n,3N-1} & \bar{K}_{3n,3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{K}_{3N-2,1} & \bar{K}_{3N-2,2} & \bar{K}_{3N-2,3} & \bar{K}_{3N-2,4} & \bar{K}_{3N-2,5} & \bar{K}_{3N-2,6} & \dots & \bar{K}_{3N-2,3n-2} & \bar{K}_{3N-2,3n-1} & \bar{K}_{3N-2,3n} & \dots & \bar{K}_{3N-2,3N-2} & \bar{K}_{3N-2,3N-1} & \bar{K}_{3N-2,3N} \\ \bar{K}_{3N-1,1} & \bar{K}_{3N-1,2} & \bar{K}_{3N-1,3} & \bar{K}_{3N-1,4} & \bar{K}_{3N-1,5} & \bar{K}_{3N-1,6} & \dots & \bar{K}_{3N-1,3n-2} & \bar{K}_{3N-1,3n-1} & \bar{K}_{3N-1,3n} & \dots & \bar{K}_{3N-1,3N-2} & \bar{K}_{3N-1,3N-1} & \bar{K}_{3N-1,3N} \\ \bar{K}_{3N,1} & \bar{K}_{3N,2} & \bar{K}_{3N,3} & \bar{K}_{3N,4} & \bar{K}_{3N,5} & \bar{K}_{3N,6} & \dots & \bar{K}_{3N,3n-2} & \bar{K}_{3N,3n-1} & \bar{K}_{3N,3n} & \dots & \bar{K}_{3N,3N-2} & \bar{K}_{3N,3N-1} & \bar{K}_{3N,3N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(1)} \\ \bar{\Delta}_2^{(1)} \\ \bar{\Delta}_3^{(1)} \\ \bar{\Delta}_1^{(2)} \\ \bar{\Delta}_2^{(2)} \\ \bar{\Delta}_3^{(2)} \\ \vdots \\ \bar{\Delta}_1^{(n)} \\ \bar{\Delta}_2^{(n)} \\ \bar{\Delta}_3^{(n)} \\ \vdots \\ \bar{\Delta}_1^{(N)} \\ \bar{\Delta}_2^{(N)} \\ \bar{\Delta}_3^{(N)} \end{Bmatrix} + k_{el} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΘΟΛΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΛΟΓΩ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΣΤΗΡΙΞΗΣ

Τροποποίηση καθολικού μητρώου στιβαρότητας λόγω ελαστικής στήριξης

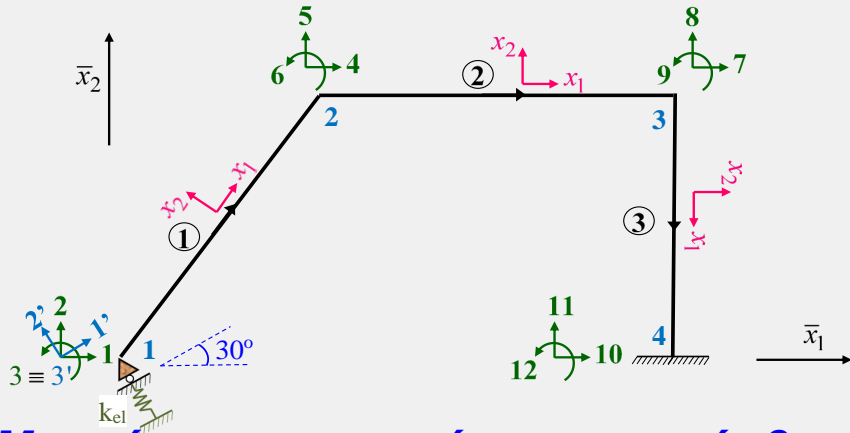


και επομένως

Τροποποιημένη εξίσωση ισορροπίας

$\bar{P}_1^{(1)}$	\bar{K}_{11}	\bar{K}_{12}	\bar{K}_{13}	\bar{K}_{14}	\bar{K}_{15}	\bar{K}_{16}	...	$\bar{K}_{1,3n-2}$	$\bar{K}_{1,3n-1}$	$\bar{K}_{1,3n}$...	$\bar{K}_{1,3N-2}$	$\bar{K}_{1,3N-1}$	$\bar{K}_{1,3N}$
$\bar{P}_2^{(1)}$	\bar{K}_{21}	\bar{K}_{22}	\bar{K}_{23}	\bar{K}_{24}	\bar{K}_{25}	\bar{K}_{26}	...	$\bar{K}_{2,3n-2}$	$\bar{K}_{2,3n-1}$	$\bar{K}_{2,3n}$...	$\bar{K}_{2,3N-2}$	$\bar{K}_{2,3N-1}$	$\bar{K}_{2,3N}$
$\bar{M}_3^{(1)}$	\bar{K}_{31}	\bar{K}_{32}	\bar{K}_{33}	\bar{K}_{34}	\bar{K}_{35}	\bar{K}_{36}	...	$\bar{K}_{3,3n-2}$	$\bar{K}_{3,3n-1}$	$\bar{K}_{3,3n}$...	$\bar{K}_{3,3N-2}$	$\bar{K}_{3,3N-1}$	$\bar{K}_{3,3N}$
$\bar{P}_1^{(2)}$	\bar{K}_{41}	\bar{K}_{42}	\bar{K}_{43}	\bar{K}_{44}	\bar{K}_{45}	\bar{K}_{46}	...	$\bar{K}_{4,3n-2}$	$\bar{K}_{4,3n-1}$	$\bar{K}_{4,3n}$...	$\bar{K}_{4,3N-2}$	$\bar{K}_{4,3N-1}$	$\bar{K}_{4,3N}$
$\bar{P}_2^{(2)}$	\bar{K}_{51}	\bar{K}_{52}	\bar{K}_{53}	\bar{K}_{54}	\bar{K}_{55}	\bar{K}_{56}	...	$\bar{K}_{5,3n-2}$	$\bar{K}_{5,3n-1}$	$\bar{K}_{5,3n}$...	$\bar{K}_{5,3N-2}$	$\bar{K}_{5,3N-1}$	$\bar{K}_{5,3N}$
$\bar{M}_3^{(2)}$	\bar{K}_{61}	\bar{K}_{62}	\bar{K}_{63}	\bar{K}_{64}	\bar{K}_{65}	\bar{K}_{66}	...	$\bar{K}_{6,3n-2}$	$\bar{K}_{6,3n-1}$	$\bar{K}_{6,3n}$...	$\bar{K}_{6,3N-2}$	$\bar{K}_{6,3N-1}$	$\bar{K}_{6,3N}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\bar{P}_1^{(n)}$	$\bar{K}_{3n-2,1}$	$\bar{K}_{3n-2,2}$	$\bar{K}_{3n-2,3}$	$\bar{K}_{3n-2,4}$	$\bar{K}_{3n-2,5}$	$\bar{K}_{3n-2,6}$...	$\bar{K}_{3n-2,3n-2}$	$\bar{K}_{3n-2,3n-1}$	$\bar{K}_{3n-2,3n}$...	$\bar{K}_{3n-2,3N-2}$	$\bar{K}_{3n-2,3N-1}$	$\bar{K}_{3n-2,3N}$
$\bar{P}_2^{(n)}$	$\bar{K}_{3n-1,1}$	$\bar{K}_{3n-1,2}$	$\bar{K}_{3n-1,3}$	$\bar{K}_{3n-1,4}$	$\bar{K}_{3n-1,5}$	$\bar{K}_{3n-1,6}$...	$\bar{K}_{3n-1,3n-2}$	$\bar{K}_{3n-1,3n-1} + k_{el}$	$\bar{K}_{3n-1,3n}$...	$\bar{K}_{3n-1,3N-2}$	$\bar{K}_{3n-1,3N-1}$	$\bar{K}_{3n-1,3N}$
$\bar{M}_3^{(n)}$	$\bar{K}_{3n,1}$	$\bar{K}_{3n,2}$	$\bar{K}_{3n,3}$	$\bar{K}_{3n,4}$	$\bar{K}_{3n,5}$	$\bar{K}_{3n,6}$...	$\bar{K}_{3n,3n-2}$	$\bar{K}_{3n,3n-1}$	$\bar{K}_{3n,3n}$...	$\bar{K}_{3n,3N-2}$	$\bar{K}_{3n,3N-1}$	$\bar{K}_{3n,3N}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\bar{P}_1^{(N)}$	$\bar{K}_{3N-2,1}$	$\bar{K}_{3N-2,2}$	$\bar{K}_{3N-2,3}$	$\bar{K}_{3N-2,4}$	$\bar{K}_{3N-2,5}$	$\bar{K}_{3N-2,6}$...	$\bar{K}_{3N-2,3n-2}$	$\bar{K}_{3N-2,3n-1}$	$\bar{K}_{3N-2,3n}$...	$\bar{K}_{3N-2,3N-2}$	$\bar{K}_{3N-2,3N-1}$	$\bar{K}_{3N-2,3N}$
$\bar{P}_2^{(N)}$	$\bar{K}_{3N-1,1}$	$\bar{K}_{3N-1,2}$	$\bar{K}_{3N-1,3}$	$\bar{K}_{3N-1,4}$	$\bar{K}_{3N-1,5}$	$\bar{K}_{3N-1,6}$...	$\bar{K}_{3N-1,3n-2}$	$\bar{K}_{3N-1,3n-1}$	$\bar{K}_{3N-1,3n}$...	$\bar{K}_{3N-1,3N-2}$	$\bar{K}_{3N-1,3N-1}$	$\bar{K}_{3N-1,3N}$
$\bar{M}_3^{(N)}$	$\bar{K}_{3N,1}$	$\bar{K}_{3N,2}$	$\bar{K}_{3N,3}$	$\bar{K}_{3N,4}$	$\bar{K}_{3N,5}$	$\bar{K}_{3N,6}$...	$\bar{K}_{3N,3n-2}$	$\bar{K}_{3N,3n-1}$	$\bar{K}_{3N,3n}$...	$\bar{K}_{3N,3N-2}$	$\bar{K}_{3N,3N-1}$	$\bar{K}_{3N,3N}$

Εφαρμογή - ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΘΟΛΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΛΟΓΩ ΛΟΞΗΣ ΣΤΗΡΙΞΗΣ



Μητρώο περιστροφής των επικόμβιων δράσεων ή των επικόμβιων μετακινήσεων του κόμβου 1

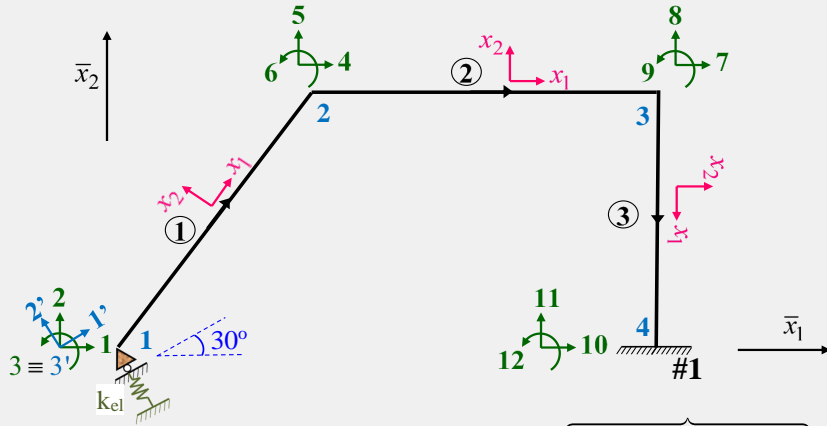
$$[r^1] = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30^\circ & 0 \\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ένταξη μητρώου περιστροφής του κόμβου 1 σε μητρώο περιστροφής του συνόλου του πλαισίου

$$[R^1] =$$

	1'	2'	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1'	$\cos 30^\circ$	$\sin 30^\circ$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2'	$-\sin 30^\circ$	$\cos 30^\circ$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Εφαρμογή - ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΘΟΛΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΛΟΓΩ ΛΟΞΗΣ ΣΤΗΡΙΞΗΣ



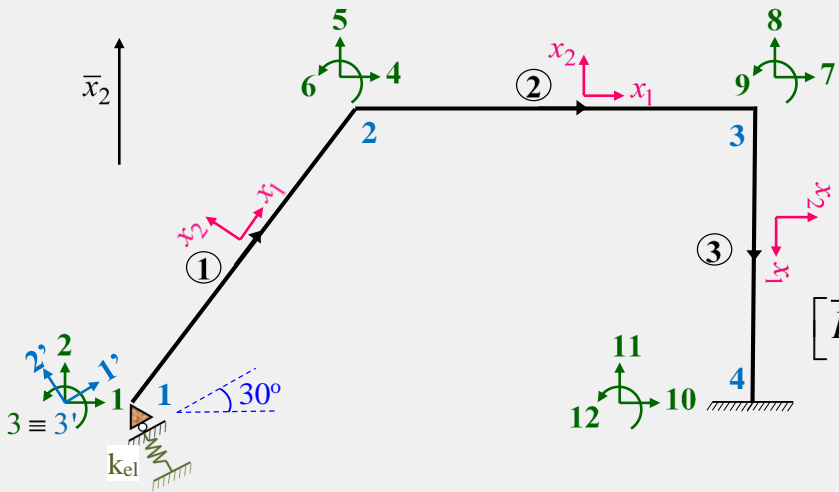
Τροποποιημένο καθολικό μητρώο στιβαρότητας πλαισίου λόγω λοξής στήριξης (1^η τροποποίηση)

$$[\bar{K}_m] = [R^n][\bar{K}][R^n]^T$$



		#1			#2			#3			#4		
		1'	2'	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
#1	1'	8.461											
	2'	3.602	1.567										
	3	-0.042	0.098	0.533									
#2	4	-5.526	-2.336	0.085	12.993								
	5	-7.499	-3.158	-0.064	4.786	6.433							
	6	-0.042	0.098	0.266	0.085	0.030	1.033						
#3	7	0	0	0	-9.375	0	0	9.430					
	8	0	0	0	0	-0.023	-0.094	0	12.523				
	9	0	0	0	0	0.094	0.25	0.167	-0.094	1.167			
#4	10	0	0	0	0	0	0	-0.055	0	-0.167	0.055		
	11	0	0	0	0	0	0	0	-12.5	0	0	12.5	
	12	0	0	0	0	0	0	0.167	0	0.333	-0.167	0	0.667

Εφαρμογή - ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΘΟΛΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΛΟΓΩ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΣΤΗΡΙΞΗΣ

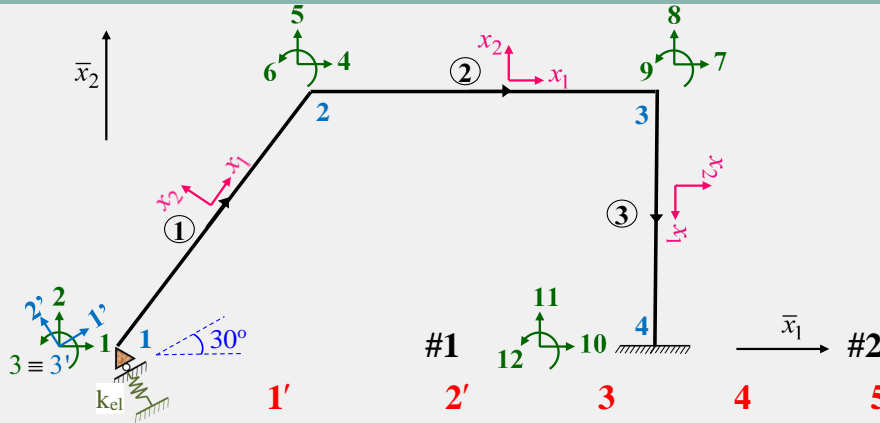


$$[K] = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{κόμβος 1} & \text{κόμβος 2} & \text{κόμβος 3} & \text{κόμβος 4} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{κόμβος 1} \\ \text{κόμβος 2} \\ \text{κόμβος 3} \\ \text{κόμβος 4} \end{matrix} & \begin{bmatrix} \begin{matrix} \bar{k}_{jj}^{-1} \\ \bar{k}_{jk}^{-1} \end{matrix} & \begin{matrix} \bar{k}_{jk}^{-1} \\ \bar{k}_{kj}^{-1} \end{matrix} & & \\ \begin{matrix} \bar{k}_{kj}^{-1} \\ \bar{k}_{kk}^{-1} + \bar{k}_{jj}^{-2} \end{matrix} & \begin{matrix} \bar{k}_{kk}^{-1} + \bar{k}_{jj}^{-2} \\ \bar{k}_{jk}^{-2} \end{matrix} & & \\ & \begin{matrix} \bar{k}_{kj}^{-2} \\ \bar{k}_{kk}^{-2} + \bar{k}_{jj}^{-3} \end{matrix} & \begin{matrix} \bar{k}_{jk}^{-3} \\ \bar{k}_{kk}^{-3} \end{matrix} & \\ & & \begin{matrix} \bar{k}_{kj}^{-3} \\ \bar{k}_{kk}^{-3} \end{matrix} & \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Τροποποίηση υπομητρώου (1,1) καθολικού μητρώου στιβαρότητας πλαισίου λόγω ελαστικής στήριξης

$$[K_{1,1}] = \begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^{-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{el} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{matrix} \beta.ε. 1' \\ \beta.ε. 2' \\ \beta.ε. 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} \bar{k}_{11}^{-1} & \bar{k}_{12}^{-1} & \bar{k}_{13}^{-1} \\ \bar{k}_{21}^{-1} & \bar{k}_{22}^{-1} + k_{el} & \bar{k}_{23}^{-1} \\ \bar{k}_{31}^{-1} & \bar{k}_{32}^{-1} & \bar{k}_{33}^{-1} \end{bmatrix}$$

Εφαρμογή - ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΘΟΛΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΛΟΓΩ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΣΤΗΡΙΞΗΣ

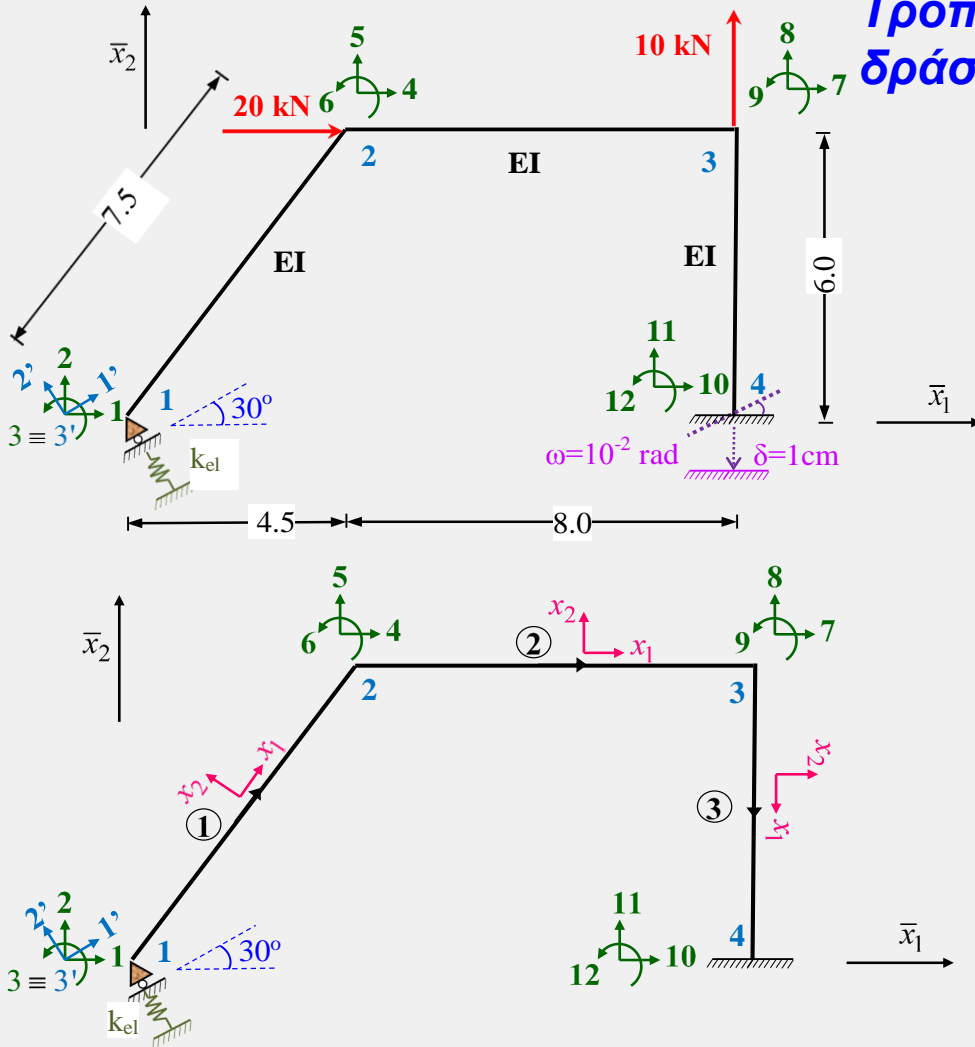


Τροποποιημένο καθολικό μητρώο στιβαρότητας πλαισίου λόγω ελαστικής στήριξης (2^η τροποποίηση)

		#1	#2	#3	#4								
		1'	2'	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
#1	1'	8.461											
	2'	3.602	1.567 + 0.5										
	3	-0.042	0.098	0.533									
#2	4	-5.526	-2.336	0.085	12.993								
	5	-7.499	-3.158	-0.064	4.786	6.433							
	6	-0.042	0.098	0.266	0.085	0.030	1.033						
#3	7	0	0	0	-9.375	0	0	9.430					
	8	0	0	0	0	-0.023	-0.094	0	12.523				
	9	0	0	0	0	0.094	0.25	0.167	-0.094	1.167			
#4	10	0	0	0	0	0	-0.055	0	-0.167	0.055			
	11	0	0	0	0	0	0	0	-12.5	0	0	12.5	
	12	0	0	0	0	0	0	0.167	0	0.333	-0.167	0	0.667

Εφαρμογή - ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΟΛΙΚΩΝ ΕΠΙΚΟΜΒΙΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ - ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ

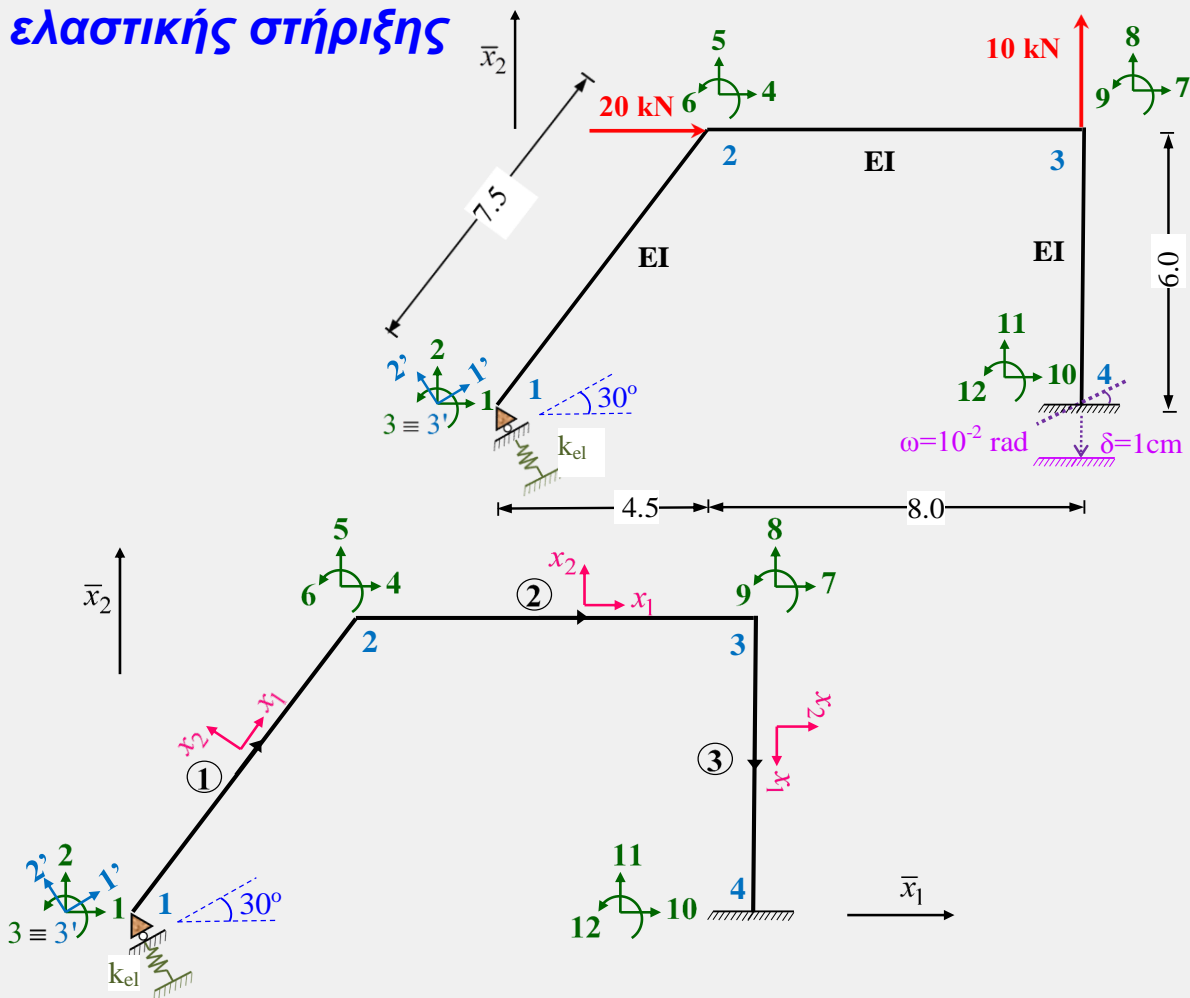
Τροποποιημένο διάνυσμα ολικών επικόμβιων δράσεων λόγω λοξής και ελαστικής στήριξης



$$\{\bar{P}_m\} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_{1'}^{(1)} \\ \bar{P}_{2'}^{(1)} \\ \bar{M}_3^{(1)} \\ \bar{P}_1^{(2)} \\ \bar{P}_2^{(2)} \\ \bar{M}_3^{(2)} \\ \bar{P}_1^{(3)} \\ \bar{P}_2^{(3)} \\ \bar{M}_3^{(3)} \\ \bar{P}_1^{(4)} \\ \bar{P}_2^{(4)} \\ \bar{M}_3^{(4)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_{1'} \\ \bar{P}_{2'} \\ \bar{M}_3 \\ \bar{P}_4 \\ \bar{P}_5 \\ \bar{M}_6 \\ \bar{P}_7 \\ \bar{P}_8 \\ \bar{M}_9 \\ \bar{P}_{10} \\ \bar{P}_{11} \\ \bar{M}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ \bar{R}_{10} \\ \bar{R}_{11} \\ \bar{R}_{12} \end{Bmatrix}$$

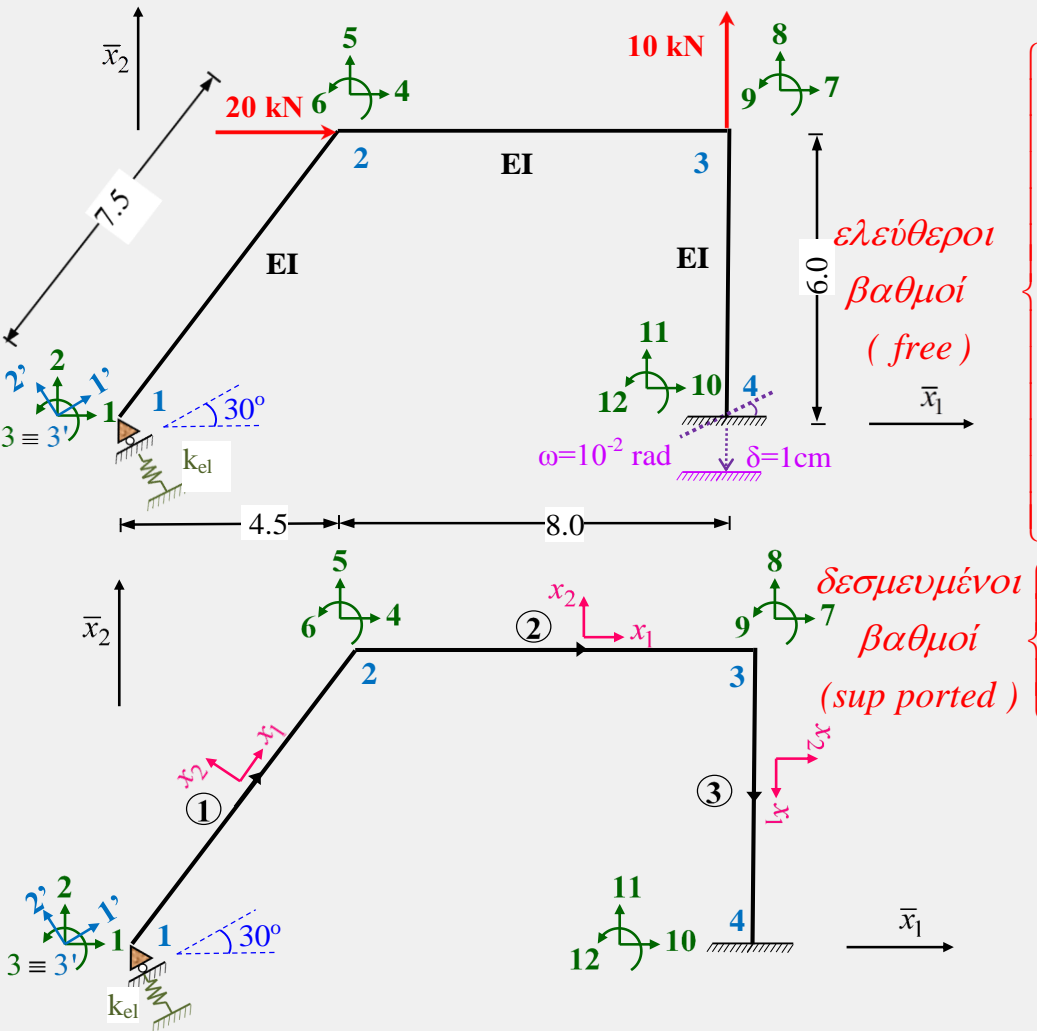
Εφαρμογή - ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΟΛΙΚΩΝ ΕΠΙΚΟΜΒΙΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ - ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ

Τροποποιημένο διάνυσμα ολικών επικόμβιων μετακινήσεων λόγω λοξής και ελαστικής στήριξης



$$\{\bar{\Delta}_m\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_{1'}^{(1)} \\ \bar{\Delta}_{2'}^{(1)} \\ \bar{\Delta}_3^{(1)} \\ \bar{\Delta}_1^{(2)} \\ \bar{\Delta}_2^{(2)} \\ \bar{\Delta}_3^{(2)} \\ \bar{\Delta}_1^{(3)} \\ \bar{\Delta}_2^{(3)} \\ \bar{\Delta}_3^{(3)} \\ \bar{\Delta}_1^{(4)} \\ \bar{\Delta}_2^{(4)} \\ \bar{\Delta}_3^{(4)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_{1'} \\ \bar{\Delta}_{2'} \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \bar{\Delta}_{10} \\ \bar{\Delta}_{11} \\ \bar{\Delta}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_{1'} \\ \bar{\Delta}_{2'} \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ 0 \\ -0.01 \\ 0.01 \end{Bmatrix}$$

Εφαρμογή - ΜΟΡΦΩΣΗ ΜΗΤΡΩΟΥ ΑΝΑΔΙΑΤΑΞΗΣ



Μητρώο αναδιάταξης πλαισίου

$$\begin{matrix} \left. \begin{matrix} 1' \\ 2' \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} \right\} \\ \left. \begin{matrix} \text{ελεύθεροι} \\ \text{βαθμοί} \\ \text{(free)} \end{matrix} \right\} \\ \left. \begin{matrix} \text{δεσμευμένοι} \\ \text{βαθμοί} \\ \text{(supported)} \end{matrix} \right\} \end{matrix} \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right] \begin{matrix} 1' \\ 2' \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

Τροποποιημένα (λόγω αναδιάταξης) διανύσματα επικόμβιων δράσεων και μετακινήσεων πλαισίου

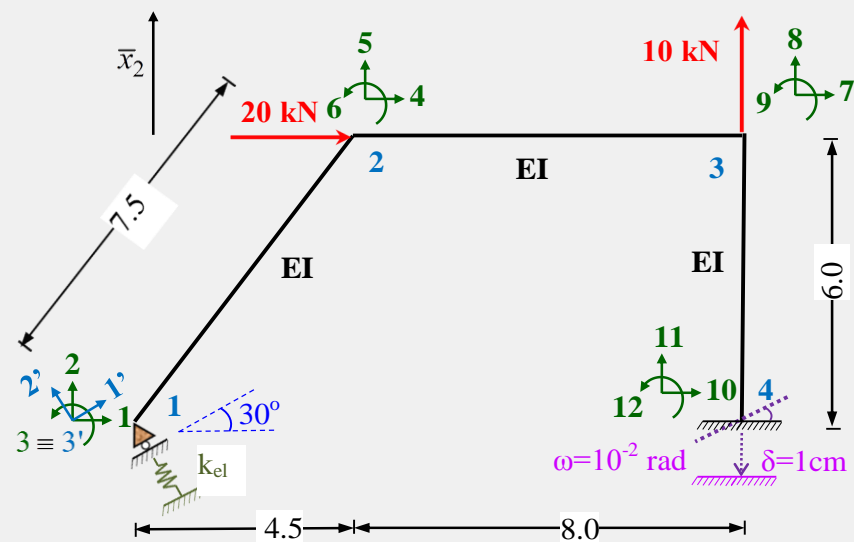
$$\{\bar{P}_{mm}\} = [V] \{P_m\} \quad \{\bar{\Delta}_{mm}\} = [V] \{\Delta_m\}$$

Εφαρμογή - ΑΝΑΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΟΛΙΚΩΝ ΕΠΙΚΟΜΒΙΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ - ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ

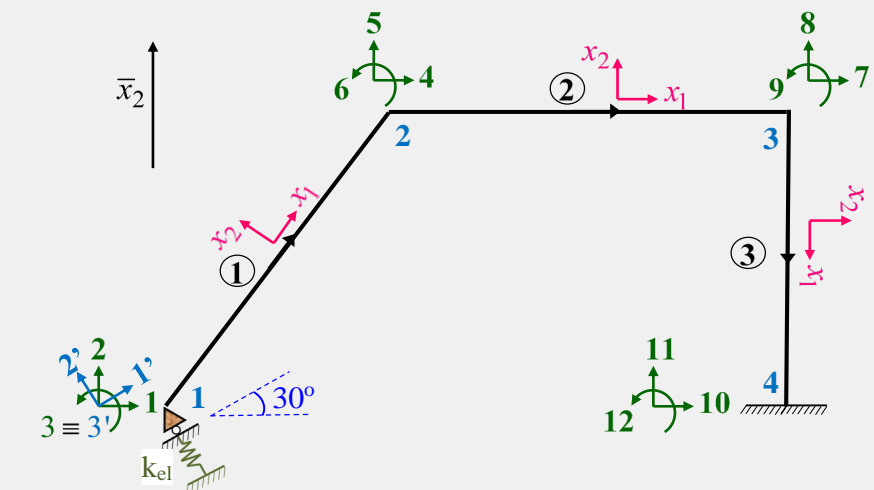
Τροποποιημένα (λόγω αναδιάταξης)
διανύσματα επικόμβιων δράσεων και
μετακινήσεων πλαισίου

$$\{\bar{P}_{mm}\} = [V]\{\bar{P}_m\}$$

$$\{\bar{\Delta}_{mm}\} = [V]\{\bar{\Delta}_m\}$$



\bar{x}_1

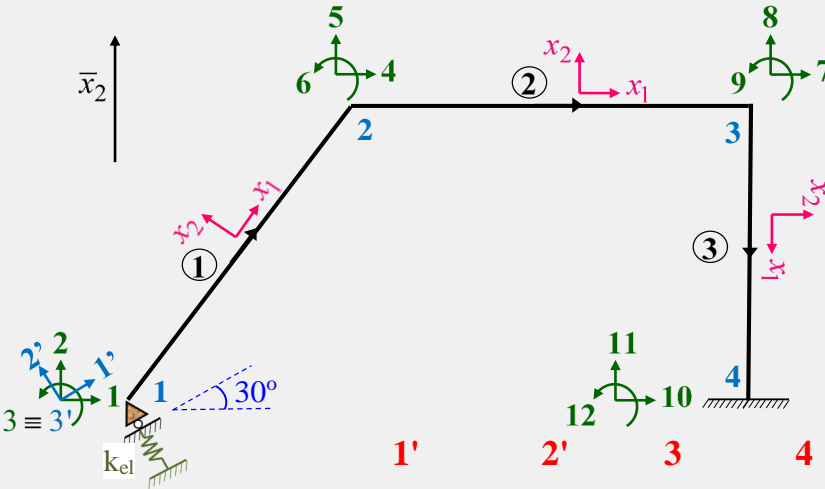


\bar{x}_1

$$\begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{M}_3 \\ \bar{P}_4 \\ \bar{P}_5 \\ \bar{M}_6 \\ \bar{P}_7 \\ \bar{P}_8 \\ \bar{M}_9 \\ \bar{P}_{10} \\ \bar{P}_{11} \\ \bar{M}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \bar{\Delta}_{10} \\ \bar{\Delta}_{11} \\ \bar{\Delta}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ 0 \\ -0.01 \\ 0.01 \end{Bmatrix}$$

Εφαρμογή - ΑΝΑΔΙΑΤΑΞΗ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ

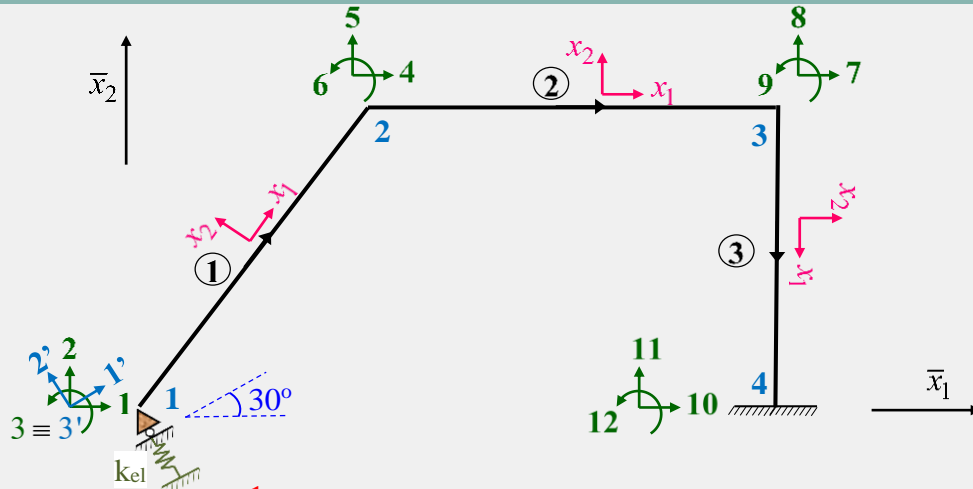


Τροποποιημένο (λόγω αναδιάταξης) καθολικό μητρώο στιβαρότητας πλαισίου

$$[\bar{K}_{mm}] = [\bar{K}_m] = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{ff}] & [\bar{K}_{fs}] \\ [\bar{K}_{sf}] & [\bar{K}_{ss}] \end{bmatrix} =$$

	1'	2'	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$= EI$	8.461											
	3.602	2.067										
	-0.042	0.098	0.533									
	-5.526	-2.336	0.085	12.993								
	-7.499	-3.158	-0.064	4.786	6.433							
	-0.042	0.098	0.266	0.085	0.030	1.033						
	0	0	0	-9.375	0	0	9.430					
	0	0	0	0	-0.023	-0.094	0	12.523				
	0	0	0	0	0.094	0.25	0.167	-0.094	1.167			
	0	0	0	0	0	0	-0.055	0	-0.167	0.055		
	0	0	0	0	0	0	0	-12.5	0	0	12.5	
	0	0	0	0	0	0	0.167	0	0.333	-0.167	0	0.667

Εφαρμογή - ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΠΛΑΙΣΙΟΥ



Επίλυση –
Επικόμβιες μετακινήσεις
κατά τους ελεύθερους και
επικόβιες δράσεις
(αντιδράσεις) κατά τους
δεσμευμένους β.ε.

$$\{\bar{\Delta}_f\} = [\bar{K}_{ff}]^{-1} (\{\bar{P}_f\} - [\bar{K}_{fs}]\{\bar{\Delta}_s\})$$

$$\{\bar{P}_s\} = [\bar{K}_{sf}]\{\bar{\Delta}_f\} + [\bar{K}_{ss}]\{\bar{\Delta}_s\}$$

$$\longrightarrow \{\bar{P}_s\}^T = \{-8.44 \quad -5.56 \quad 30.01\}$$

$$\{\bar{\Delta}_f\}^T = \{\bar{\Delta}_{1'} \quad \bar{\Delta}_{1'} \quad \bar{\Delta}_3 \quad \bar{\Delta}_4 \quad \bar{\Delta}_5 \quad \bar{\Delta}_6 \quad \bar{\Delta}_7 \quad \bar{\Delta}_8 \quad \bar{\Delta}_9\}^T =$$

$$= \{\bar{\Delta}_{1'}^{(1)} \quad \bar{\Delta}_{2'}^{(1)} \quad \bar{\Delta}_3^{(1)} \quad \bar{\Delta}_1^{(2)} \quad \bar{\Delta}_2^{(2)} \quad \bar{\Delta}_3^{(2)} \quad \bar{\Delta}_1^{(3)} \quad \bar{\Delta}_2^{(3)} \quad \bar{\Delta}_3^{(3)}\}^T =$$

$$= \{51.5 \quad 9.6 \quad -49.4 \quad 231.0 \quad -107.0 \quad 4.15 \quad 230.0 \quad 0.435 \quad -25.1\}^T$$

$$\bar{R}_{2'}^{(1)} = \bar{R}_{2'} = -k_{el} \bar{\Delta}_{2'}^{(1)}$$

ΕΠΙΠΕΔΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΥΠΟΒΑΛΛΟΜΕΝΟ ΣΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΑ ΦΟΡΤΙΑ

ΕΠΙΠΕΔΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΥΠΟΒΑΛΛΟΜΕΝΟ ΣΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΑ ΦΟΡΤΙΑ

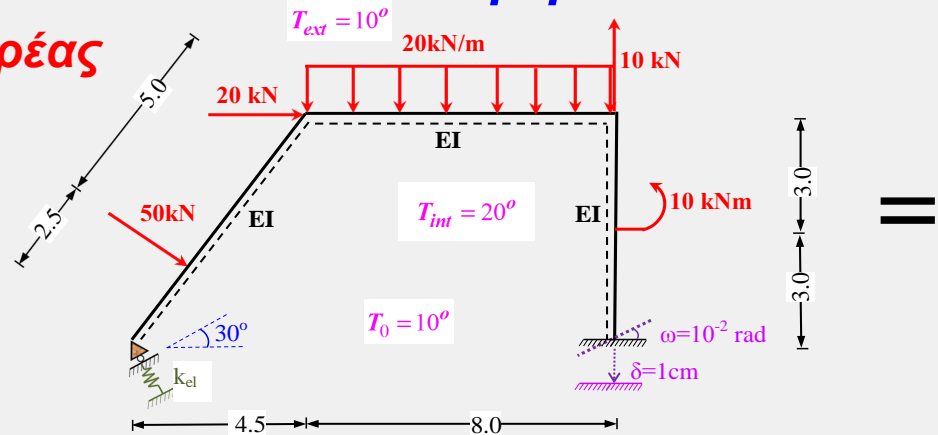
Επαλληλία «παγιωμένου» και «ισοδύναμου» φορέα

Δράσεις παγίωσης

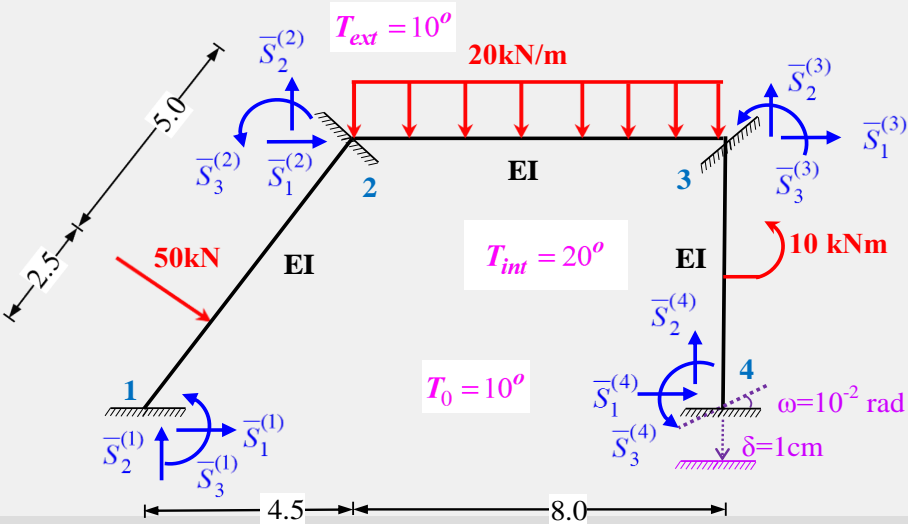
Παγιωμένοι κόμβοι

$$\left\{ \bar{S}^{(N)} \right\} = \begin{Bmatrix} \bar{S}_1^{(N)} \\ \bar{S}_2^{(N)} \\ \bar{S}_3^{(N)} \end{Bmatrix} \quad \left\{ \bar{\Delta}^{(N)} \right\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(N)} \\ \bar{\Delta}_2^{(N)} \\ \bar{\Delta}_3^{(N)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

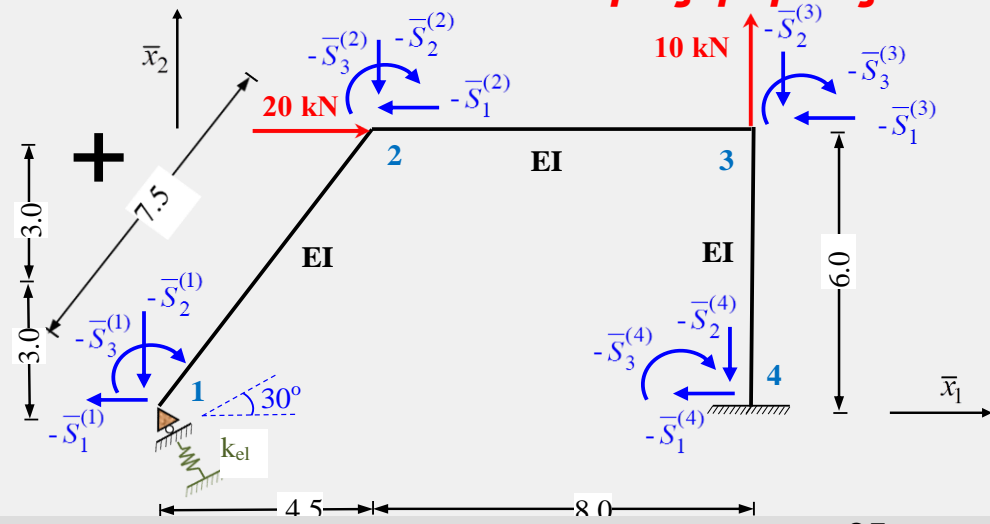
Αρχικός φορέας



Παγιωμένος φορέας



Ισοδύναμος φορέας

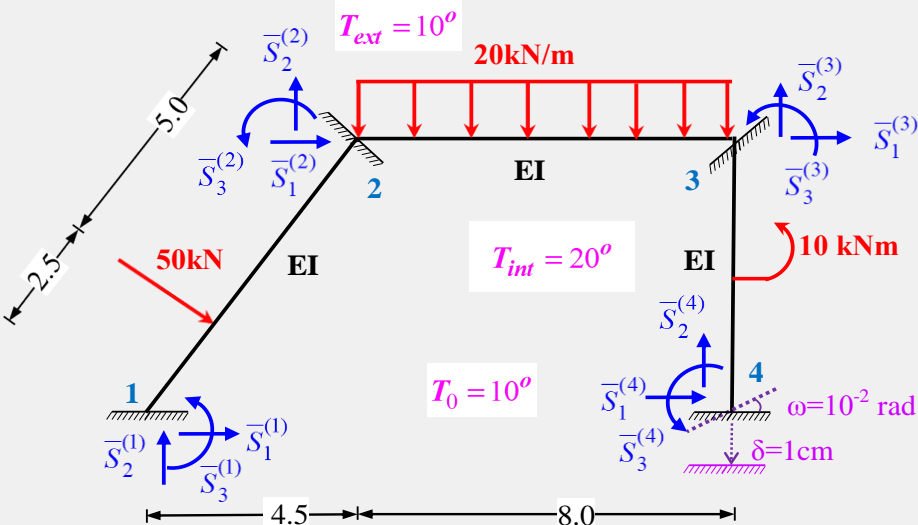


ΕΠΙΠΕΔΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΥΠΟΒΑΛΛΟΜΕΝΟ ΣΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΑ ΦΟΡΤΙΑ

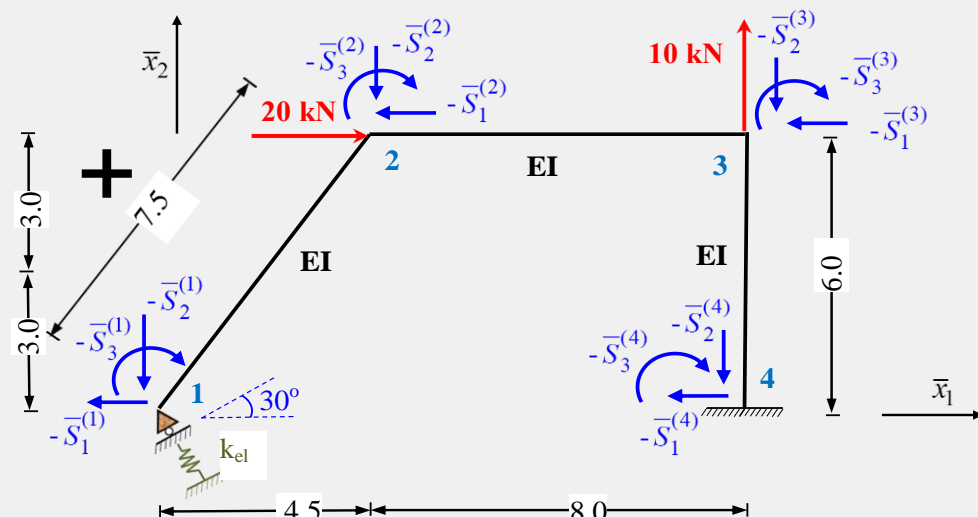
Επαλληλία «παγιωμένου» και «ισοδύναμου» φορέα

- οι άγνωστες **επικόμβιες μετακινήσεις του πραγματικού** φορέα ταυτίζονται με αυτές του ισοδύναμου (μια και οι αντίστοιχες του παγιωμένου φορέα είναι μηδενικές)
- οι άγνωστες **αντιδράσεις του πραγματικού φορέα** ταυτίζονται με αυτές του ισοδύναμου
- οι άγνωστες **εσωτερικές δράσεις των μελών του πραγματικού** φορέα προκύπτουν ως επαλληλία των αντίστοιχων δράσεων τόσο του παγιωμένου όσο και του ισοδύναμου φορέα.

Παγιωμένος φορέας



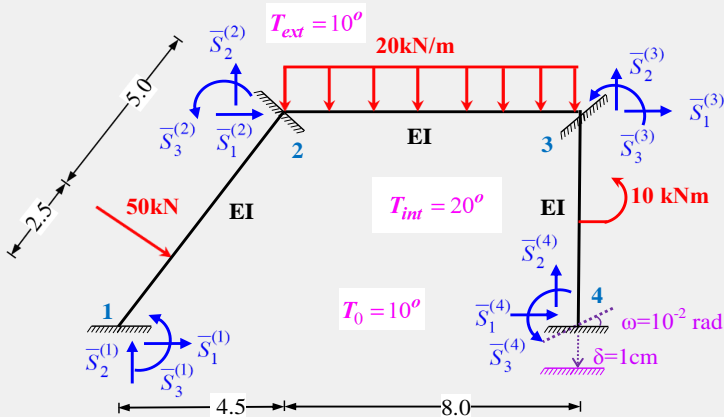
Ισοδύναμος φορέας



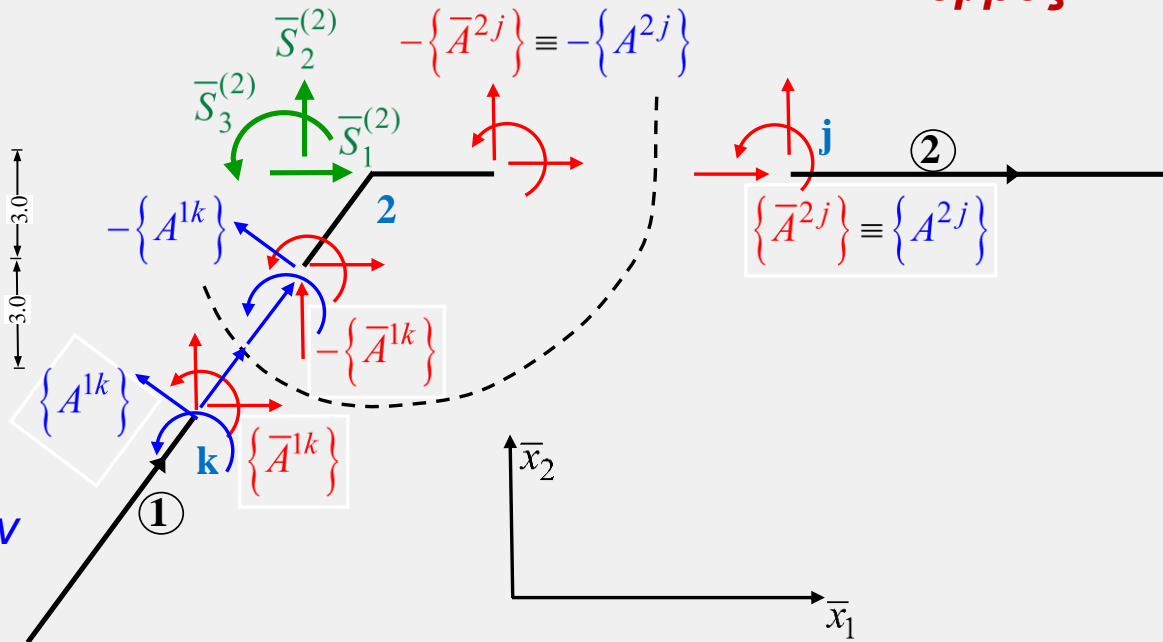
ΕΠΙΠΕΔΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΥΠΟΒΑΛΛΟΜΕΝΟ ΣΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΑ ΦΟΡΤΙΑ

Υπολογισμός δράσεων παγίωσης

Παγιωμένος φορέας



Καθολικές ακραίες δράσεις μελών κόμβου 2



$$\begin{Bmatrix} \bar{A}_r^{-1k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_1^{-1k} \\ \bar{F}_2^{-1k} \\ \bar{M}_3^{-1k} \end{Bmatrix} = \left[\Lambda_{PF}^{1k} \right]^T \begin{Bmatrix} A_r^{1k} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \bar{A}_r^{-2j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_1^{-2j} \\ \bar{F}_2^{-2j} \\ \bar{M}_3^{-2j} \end{Bmatrix} = \left[\Lambda_{PF}^{2j} \right]^T \begin{Bmatrix} A_r^{2j} \end{Bmatrix}$$

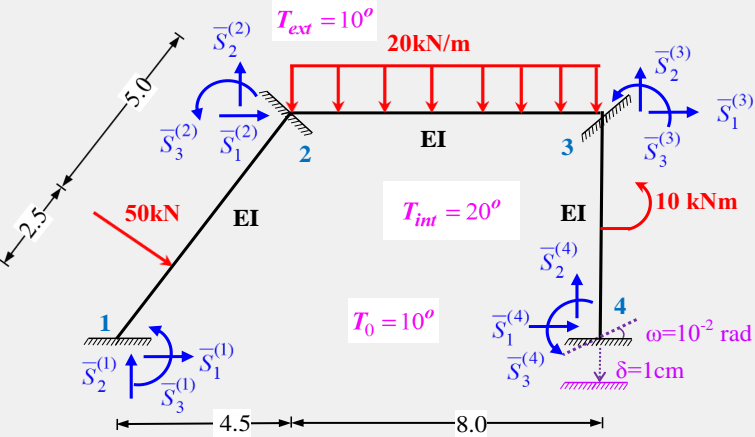
Εξίσωση ισορροπίας κόμβου 2

$$\left\{ \bar{S}^{(2)} \right\} - \left\{ \bar{A}_r^{-1k} \right\} - \left\{ \bar{A}_r^{-2j} \right\} = \{0\}$$

ΕΠΙΠΕΔΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΥΠΟΒΑΛΛΟΜΕΝΟ ΣΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΑ ΦΟΡΤΙΑ

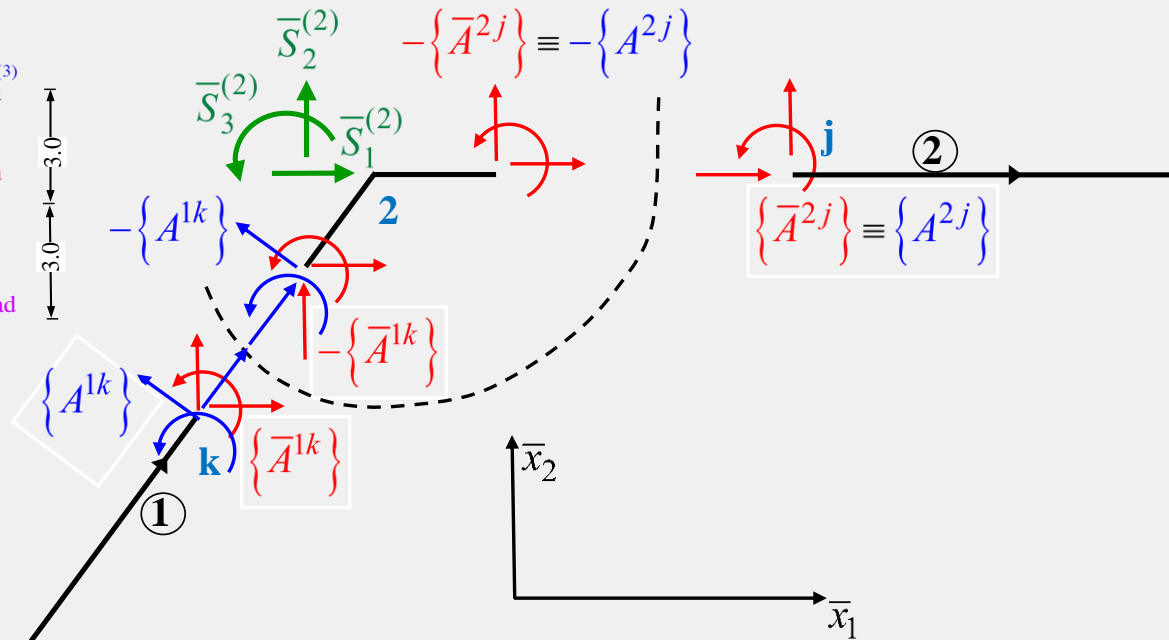
Υπολογισμός δράσεων παγίωσης

Παγιωμένος φορέας



οι δράσεις παγίωσης σε κάθε κόμβο του παγιωμένου φορέα του πλαισίου είναι ίσες με το άθροισμα των καθολικών ακραίων δράσεων των άκρων των μελών που καταλήγουν στον κόμβο αυτόν.

Κόμβος 2



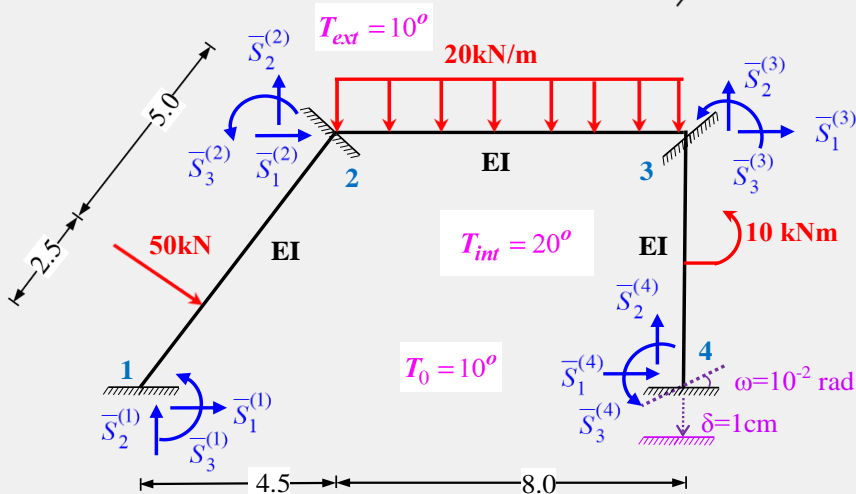
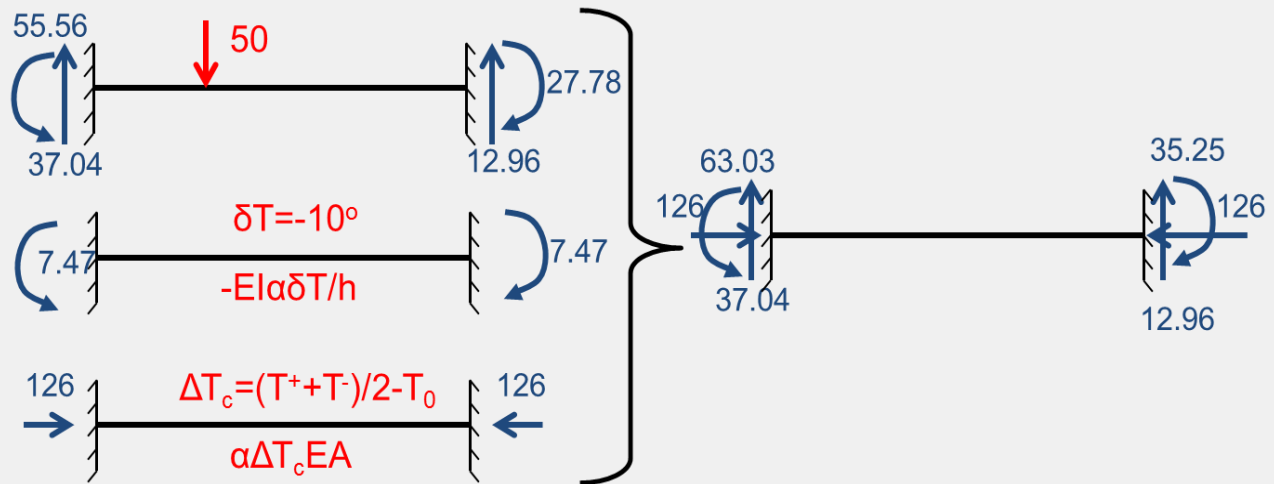
Εξίσωση ισορροπίας κόμβου 2

$$\{\bar{S}^{(2)}\} - \{\bar{A}^{1k}\} - \{\bar{A}^{2j}\} = \{0\}$$

Εφαρμογή - ΕΠΙΠΕΔΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΥΠΟΒΑΛΛΟΜΕΝΟ ΣΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΑ ΦΟΡΤΙΑ

Ανάλυση παγιωμένου φορέα - Τοπικές ακραίες δράσεις μελών

Μέλος 1 :

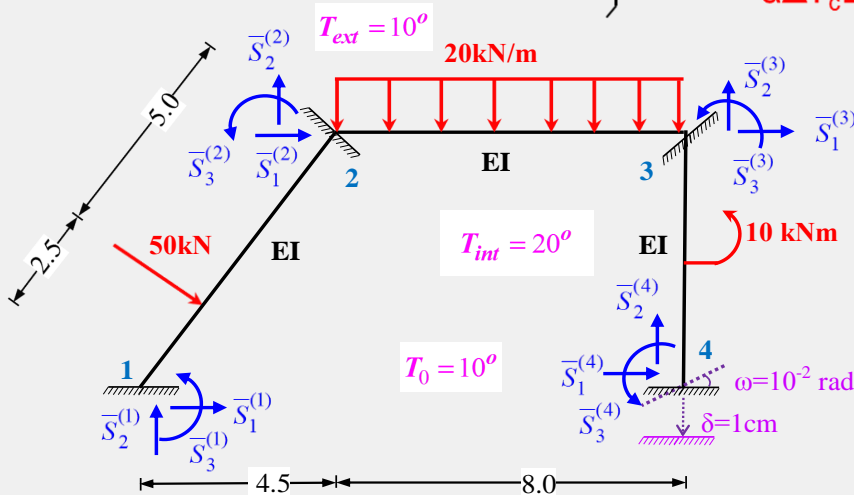
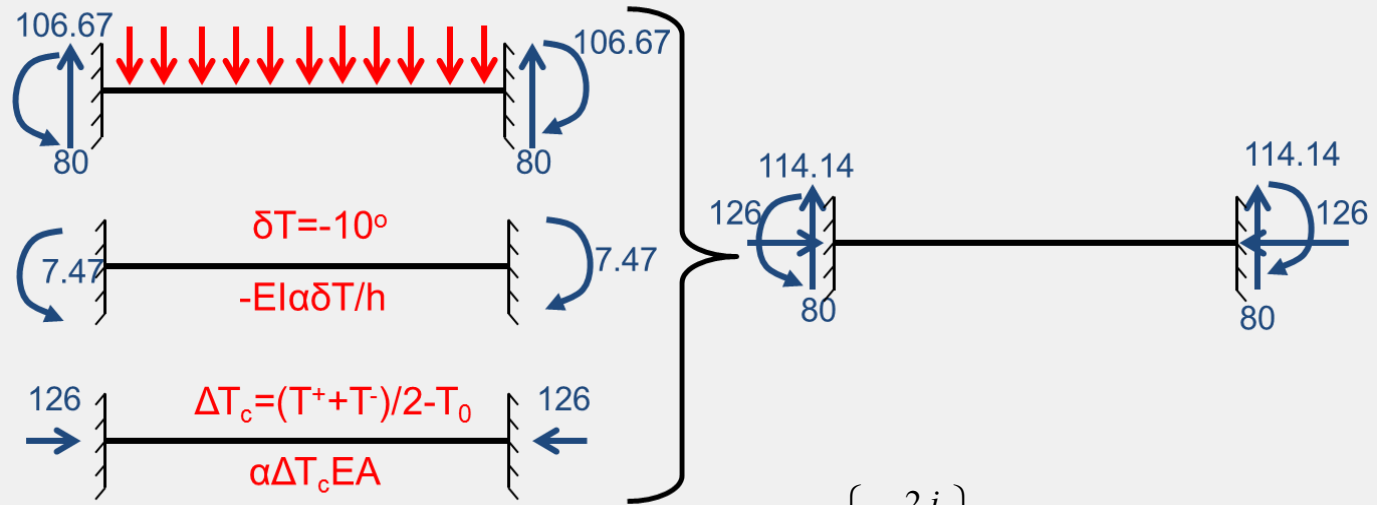


$$\{A_r^1\} = \begin{bmatrix} \{A_r^{1j}\} \\ \{A_r^{1k}\} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{1j} \\ F_2^{1j} \\ M_3^{1j} \\ F_1^{1k} \\ F_2^{1k} \\ M_3^{1k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 126 \\ 37.04 \\ 63.03 \\ -126 \\ 12.96 \\ -35.25 \end{Bmatrix}$$

Εφαρμογή - ΕΠΙΠΕΔΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΥΠΟΒΑΛΛΟΜΕΝΟ ΣΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΑ ΦΟΡΤΙΑ

Ανάλυση παγιωμένου φορέα - Τοπικές ακραίες δράσεις μελών

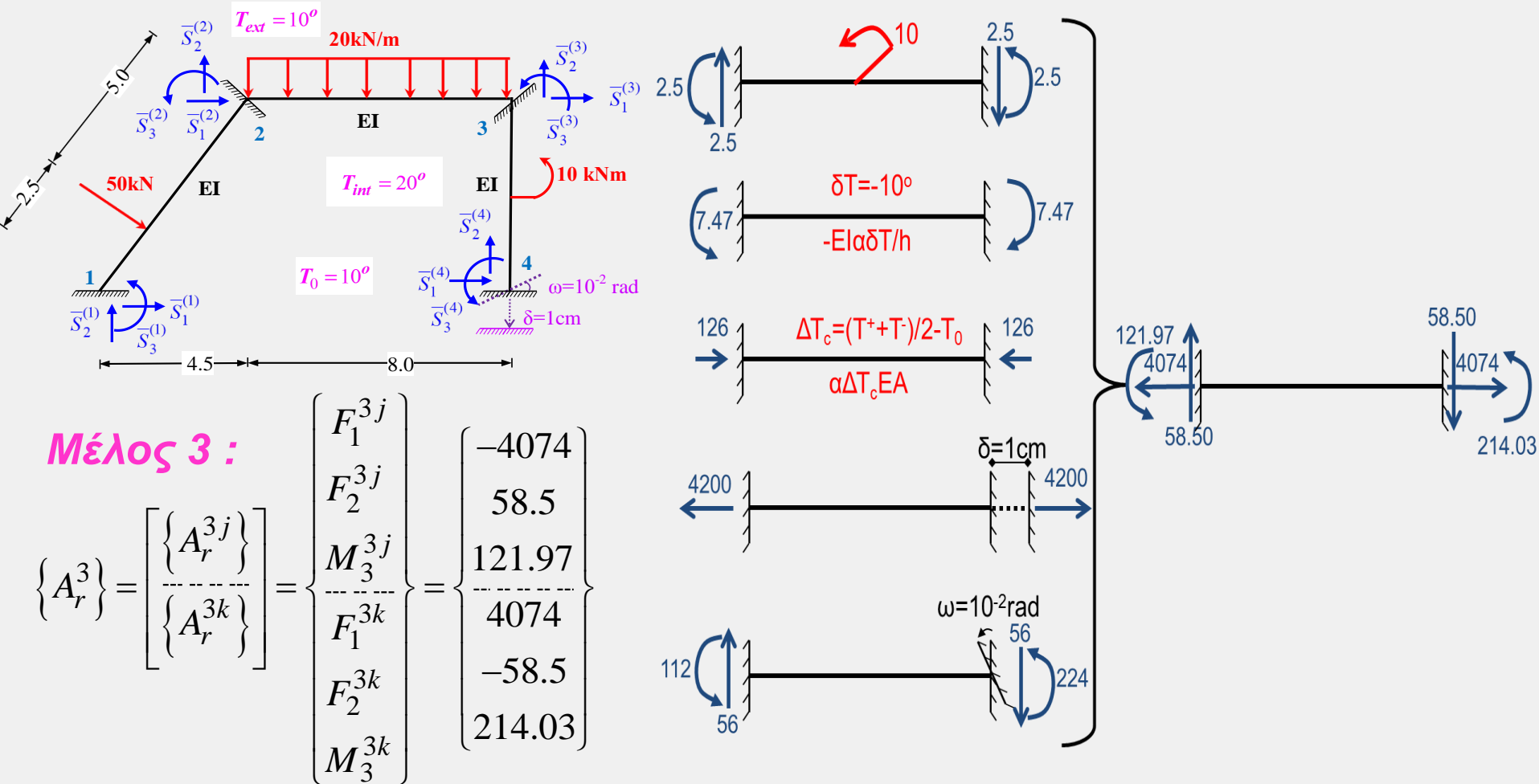
Μέλος 2 :



$$\{A_r^{2j}\} = \begin{Bmatrix} \{A_r^{2j}\} \\ \{A_r^{2k}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{2j} \\ F_2^{2j} \\ M_3^{2j} \\ F_1^{2k} \\ F_2^{2k} \\ M_3^{2k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 126 \\ 80 \\ 114.14 \\ -126 \\ 80 \\ -114.14 \end{Bmatrix}$$

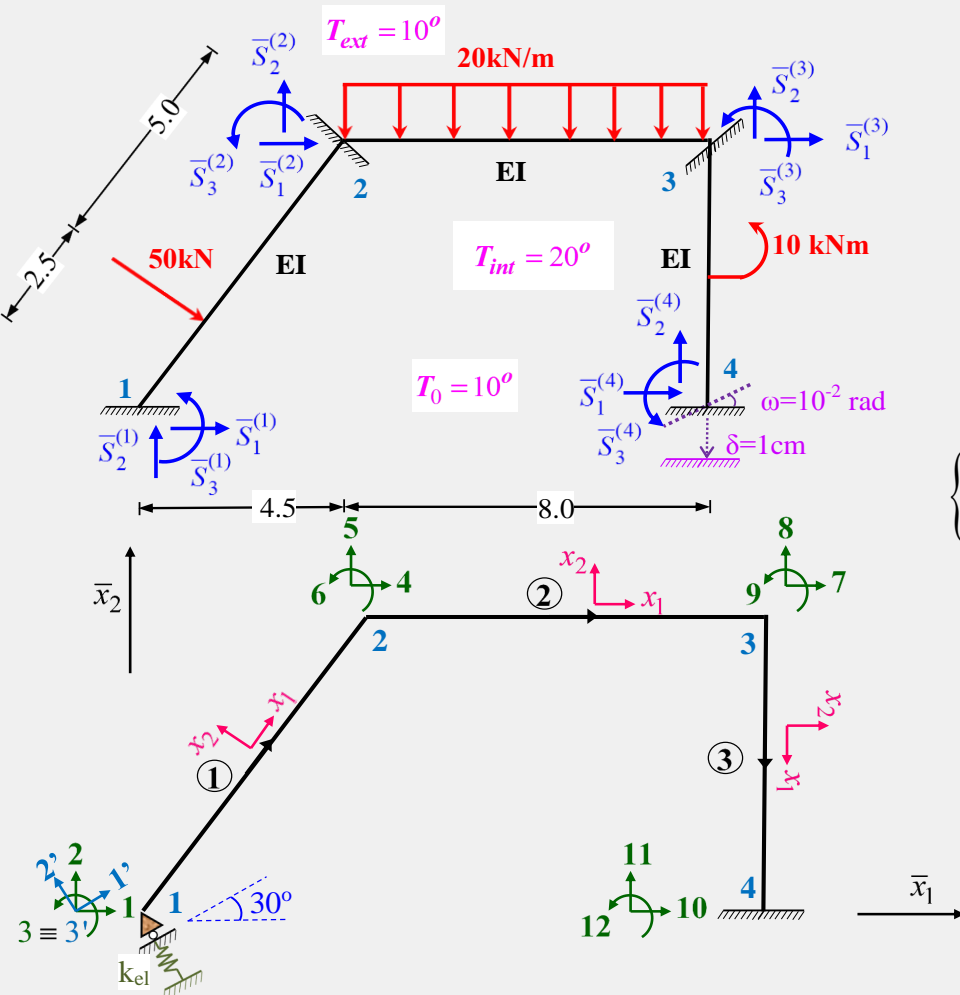
Εφαρμογή - ΕΠΙΠΕΔΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΥΠΟΒΑΛΛΟΜΕΝΟ ΣΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΑ ΦΟΡΤΙΑ

Ανάλυση παγιωμένου φορέα - Τοπικές ακραίες δράσεις μελών



Εφαρμογή - ΕΠΙΠΕΔΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΥΠΟΒΑΛΛΟΜΕΝΟ ΣΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΑ ΦΟΡΤΙΑ

Ανάλυση παγιωμένου φορέα - καθολικά διανύσματα ακραίων δράσεων



Μέλος 1 :

$$\left\{ \bar{A}_r^{-1} \right\} = \left[\Lambda_{PF}^1 \right]^T \left\{ A_r^1 \right\} = \begin{Bmatrix} 45.968 \\ 123.024 \\ 63.03 \\ -85.968 \\ -93.024 \\ -35.25 \end{Bmatrix}$$

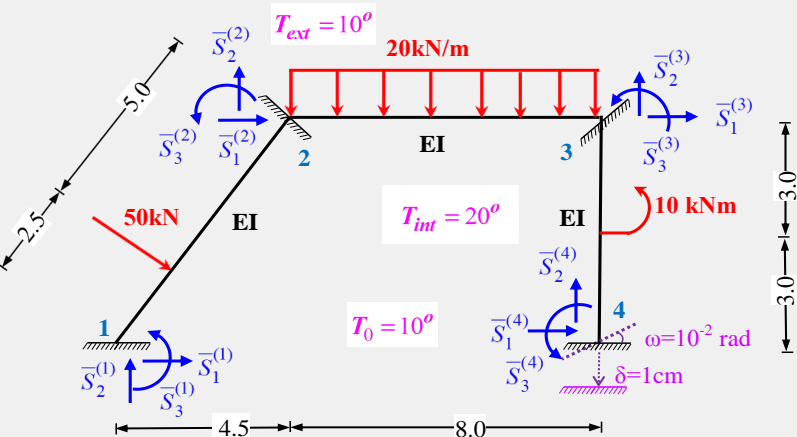
Μέλος 2 :

$$\left\{ \bar{A}_r^{-2} \right\} = \left[\Lambda_{PF}^2 \right]^T \left\{ A_r^2 \right\} = \begin{Bmatrix} 126 \\ 80 \\ 114.14 \\ -126 \\ 80 \\ -114.14 \end{Bmatrix}$$

Μέλος 3 :

$$\left\{ \bar{A}_r^{-3} \right\} = \left[\Lambda_{PF}^3 \right]^T \left\{ A_r^3 \right\} = \begin{Bmatrix} 58.5 \\ 4074 \\ 121.97 \\ -58.5 \\ -4074 \\ 219.03 \end{Bmatrix}$$

Εφαρμογή - ΕΠΙΠΕΔΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΥΠΟΒΑΛΛΟΜΕΝΟ ΣΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΑ ΦΟΡΤΙΑ



Μέλη του παγιωμένου φορέα, υποβαλλόμενα σε ενδιάμεση φόρτιση

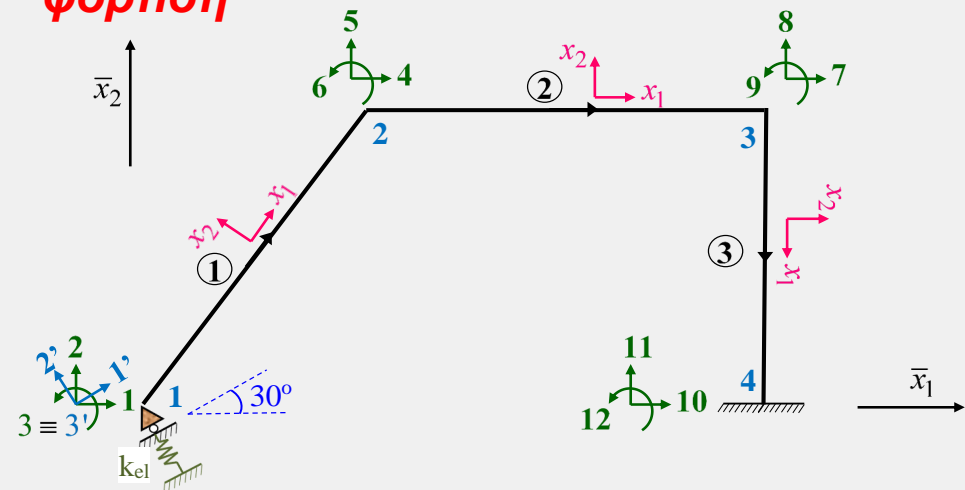
Ανάλυση παγιωμένου φορέα - Υπολογισμός δράσεων παγίωσης

$$\left\{ \bar{S}^{(1)} \right\} = \left\{ \bar{A}_r^{1j} \right\} = \begin{Bmatrix} 45.968 \\ 123.024 \\ 63.03 \end{Bmatrix}$$

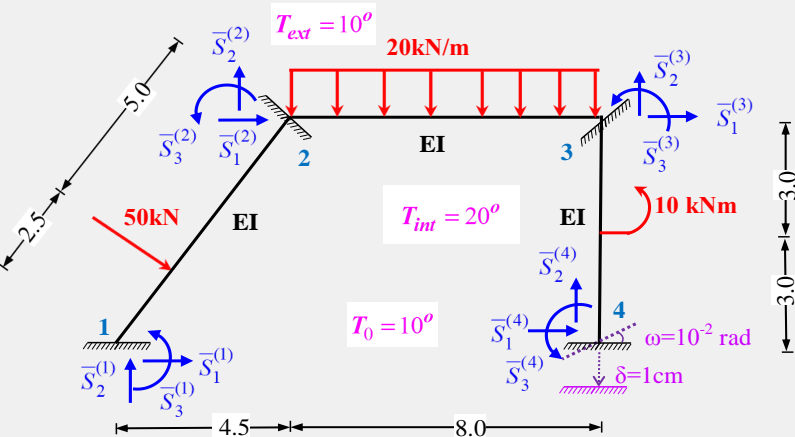
$$\left\{ \bar{S}^{(2)} \right\} = \left\{ \bar{A}_r^{1k} \right\} + \left\{ \bar{A}_r^{2j} \right\} = \begin{Bmatrix} 40.032 \\ -13.024 \\ 78.890 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ \bar{S}^{(3)} \right\} = \left\{ \bar{A}_r^{2k} \right\} + \left\{ \bar{A}_r^{3j} \right\} = \begin{Bmatrix} -67.50 \\ 4154 \\ 7.83 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ \bar{S}^{(4)} \right\} = \left\{ \bar{A}_r^{3k} \right\} = \begin{Bmatrix} -58.50 \\ -4074 \\ 219.03 \end{Bmatrix}$$



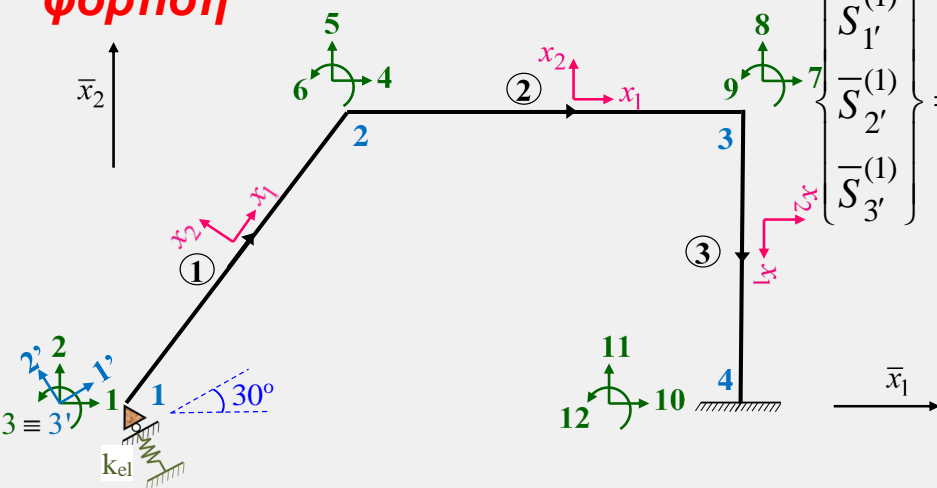
Εφαρμογή - ΕΠΙΠΕΔΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΥΠΟΒΑΛΛΟΜΕΝΟ ΣΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΑ ΦΟΡΤΙΑ



Ανάλυση παγιωμένου φορέα - Υπολογισμός δράσεων παγίωσης - Τροποποίηση δράσεων παγίωσης λόγω κεκλιμένης στήριξης στον κόμβο 1

Αρχικές δ.π. $\{\bar{S}^{(1)}\} = \{\bar{A}_r^{1j}\} = \begin{Bmatrix} 45.968 \\ 123.024 \\ 63.03 \end{Bmatrix}$

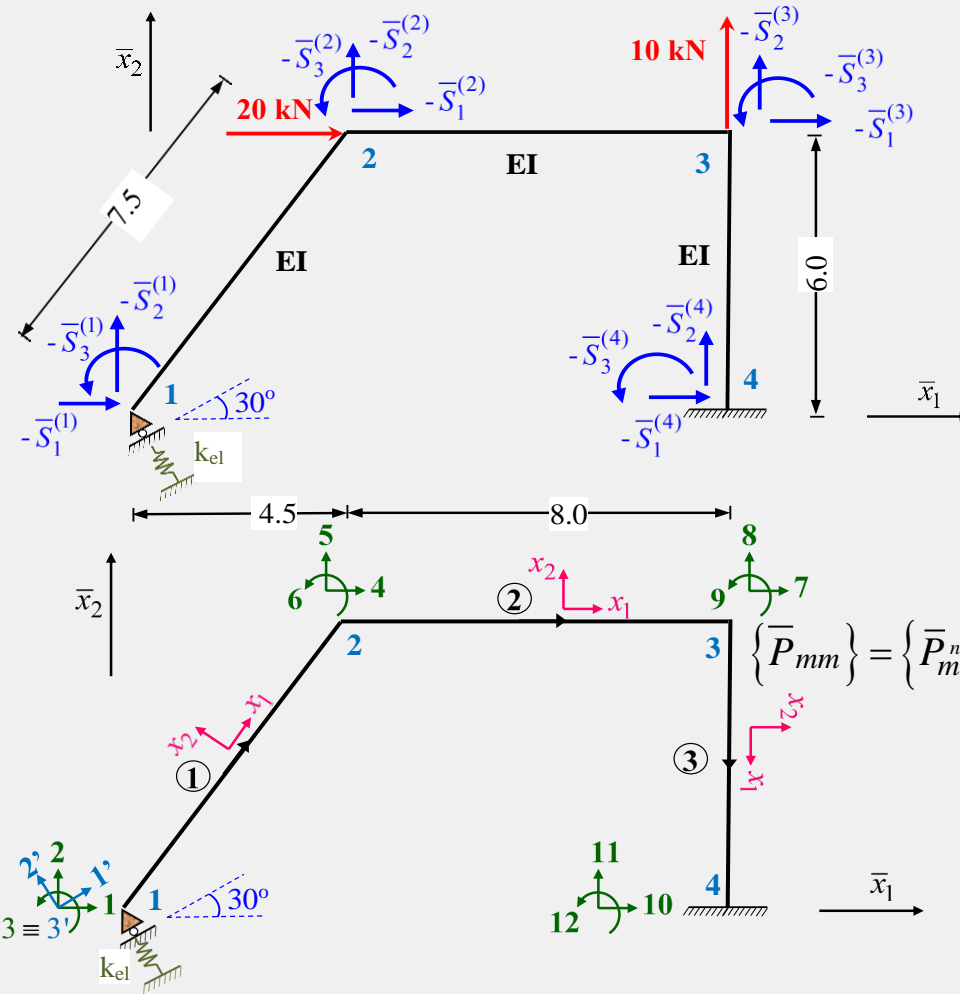
Μέλη του παγιωμένου φορέα, υποβαλλόμενα σε ενδιάμεση φόρτιση



Τροποποιημένες δ.π.

$$\begin{Bmatrix} \bar{S}_{1'}^{(1)} \\ \bar{S}_{2'}^{(1)} \\ \bar{S}_{3'}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{S}_{1'} \\ \bar{S}_{2'} \\ \bar{S}_{3'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30^\circ & 0 \\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{S}_1^{(1)} \\ \bar{S}_2^{(1)} \\ \bar{S}_3^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30^\circ & 0 \\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 45.968 \\ 123.024 \\ 63.03 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 101.322 \\ 83.558 \\ 63.03 \end{Bmatrix}$$

Εφαρμογή - ΕΠΙΠΕΔΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΥΠΟΒΑΛΛΟΜΕΝΟ ΣΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΑ ΦΟΡΤΙΑ

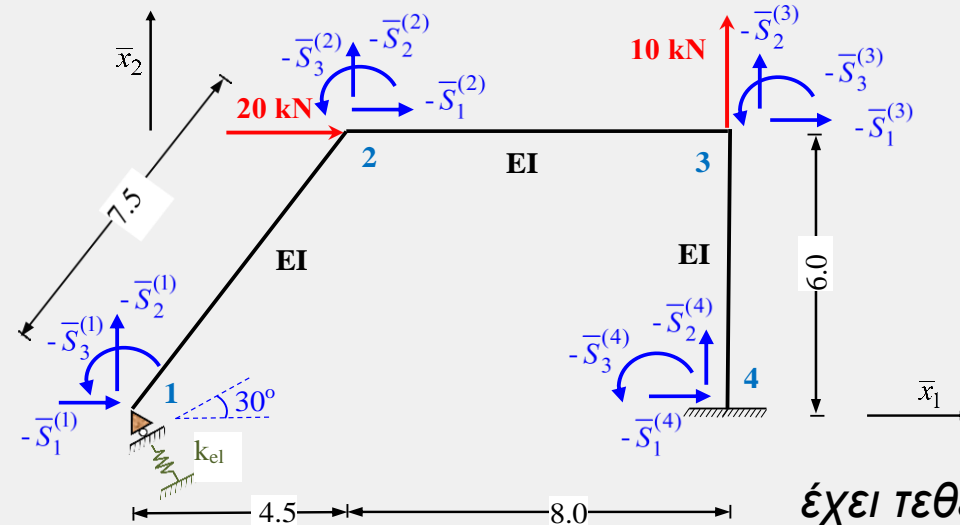


Τροποποιημένα και αναδιατεταγμένα διανύσματα επικόμβιων μετακινήσεων και δράσεων πλαισίου

Διάνυσμα επικόμβιων δράσεων

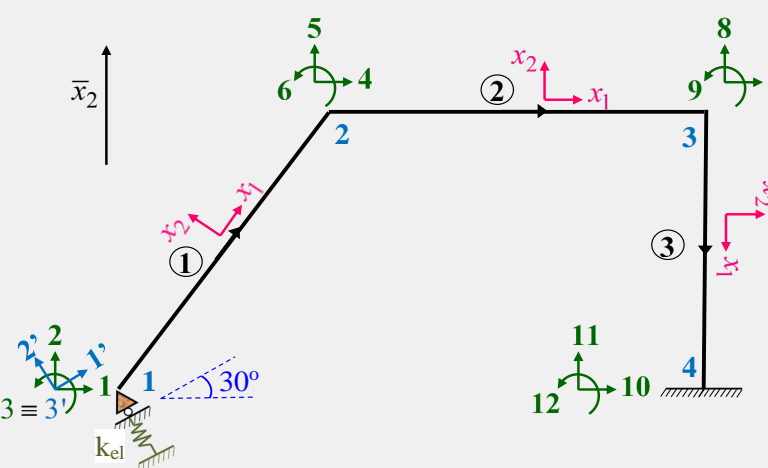
$$\begin{Bmatrix} -101.322 \\ -83.558 \\ -63.03 \\ 20-40 \\ 13.024 \\ -78.89 \\ 67.5 \\ 10-4154 \\ -7.83 \\ \hline \bar{P}_1^{(4)} + 58.5 \\ \bar{P}_2^{(4)} + 4074 \\ \bar{M}_3^{(4)} - 219.03 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -101.322 \\ -83.558 \\ -63.03 \\ -20 \\ 13.024 \\ -78.89 \\ 67.5 \\ -4144 \\ -7.83 \\ \hline \bar{P}_1^{(4)} + 58.5 \\ \bar{P}_2^{(4)} + 4074 \\ \bar{M}_3^{(4)} - 219.03 \end{Bmatrix}$$

Εφαρμογή - ΕΠΙΠΕΔΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΥΠΟΒΑΛΛΟΜΕΝΟ ΣΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΑ ΦΟΡΤΙΑ



Τροποποιημένα και αναδιατεταγμένα διανύσματα επικόμβιων μετακινήσεων και δράσεων πλαισίου

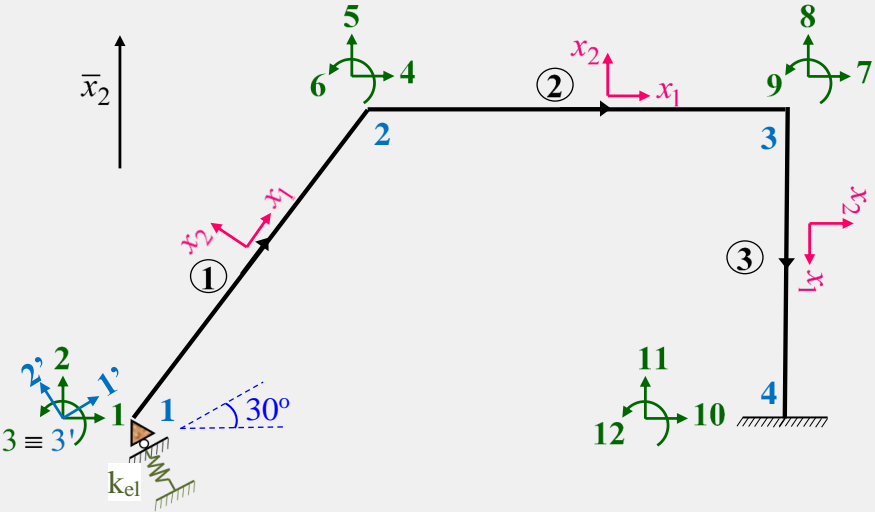
Διάνυσμα επικόμβιων μετακινήσεων



έχει τεθεί μηδενικό παρά την κατακόρυφη υποχώρηση της στήριξης του κόμβου 1 του πλαισίου, μια και η φόρτιση αυτή έχει ήδη ληφθεί υπόψη στον παγιωμένο φορέα

$$\{\bar{\Delta}_{mm}\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{\Delta}_f\} \\ \{\bar{\Delta}_s\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(1)} \\ \bar{\Delta}_2^{(1)} \\ \bar{\Delta}_3^{(1)} \\ \bar{\Delta}_1^{(2)} \\ \bar{\Delta}_2^{(2)} \\ \bar{\Delta}_3^{(2)} \\ \bar{\Delta}_1^{(3)} \\ \bar{\Delta}_2^{(3)} \\ \bar{\Delta}_3^{(3)} \\ \bar{\Delta}_1^{(4)} \\ \bar{\Delta}_2^{(4)} \\ \bar{\Delta}_3^{(4)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1' \\ \bar{\Delta}_2' \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \bar{\Delta}_{10} \\ \bar{\Delta}_{11} \\ \bar{\Delta}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1' \\ \bar{\Delta}_2' \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Εφαρμογή - ΕΠΙΠΕΔΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΥΠΟΒΑΛΛΟΜΕΝΟ ΣΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΑ ΦΟΡΤΙΑ



Επίλυση –
Επικόμβιες μετακινήσεις κατά τους ελεύθερους και επικόβιες δράσεις (αντιδράσεις) κατά τους δεσμευμένους β.ε.

$$\{\bar{\Delta}_f\} = [\bar{K}_{ff}]^{-1} (\{\bar{P}_f\} - [\bar{K}_{fs}]\{\bar{\Delta}_s\})$$

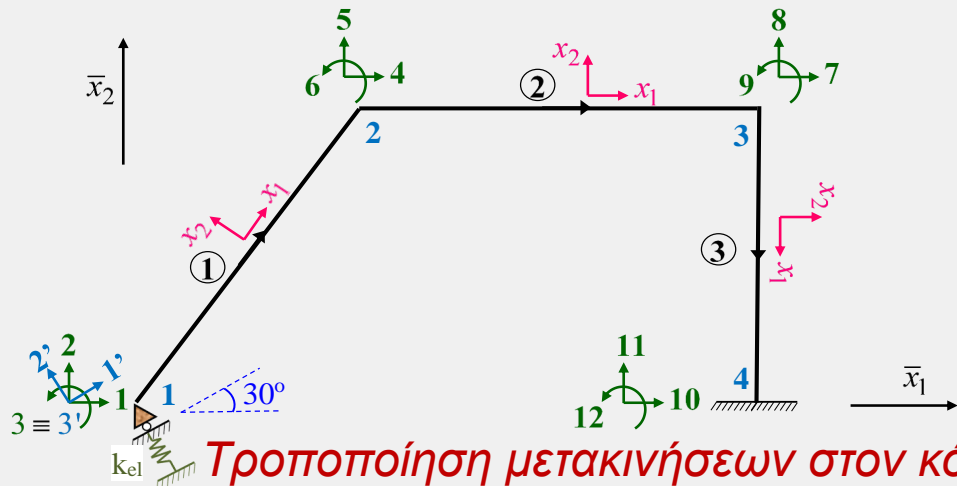
$$\{\bar{P}_s\} = [\bar{K}_{sf}]\{\bar{\Delta}_f\} + [\bar{K}_{ss}]\{\bar{\Delta}_s\}$$

$$\{\bar{P}_s\} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1^{(4)} \\ \bar{P}_2^{(4)} \\ M_3^{(4)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{R}_{10} \\ \bar{R}_{11} \\ \bar{R}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -25.0 \\ 119.3 \\ -78.0 \end{Bmatrix}$$

$$\bar{R}_{2'}^{(1)} = \bar{R}_{2'} = -k_{el} \bar{\Delta}_{2'}^{(1)}$$

$$\{\bar{\Delta}_f\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_{1'}^{(-1)} \\ \bar{\Delta}_{2'}^{(-1)} \\ \bar{\Delta}_3^{(-1)} \\ \bar{\Delta}_1^{(-2)} \\ \bar{\Delta}_2^{(-2)} \\ \bar{\Delta}_3^{(-2)} \\ \bar{\Delta}_1^{(-3)} \\ \bar{\Delta}_2^{(-3)} \\ \bar{\Delta}_3^{(-3)} \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} -9089.1 \\ -140.2 \\ -1110.5 \\ -4025.7 \\ -7485.3 \\ 103.4 \\ -4014.9 \\ -335.46 \\ 1121.6 \end{Bmatrix}$$

Εφαρμογή - ΕΠΙΠΕΔΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΥΠΟΒΑΛΛΟΜΕΝΟ ΣΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΑ ΦΟΡΤΙΑ



Τροποποίηση μετακινήσεων στον κόμβο 1 λόγω κεκλιμένης στήριξης

Μόρφωση διανύσματος επικόμβιων μετακινήσεων κατά τους ελεύθερους β.ε.

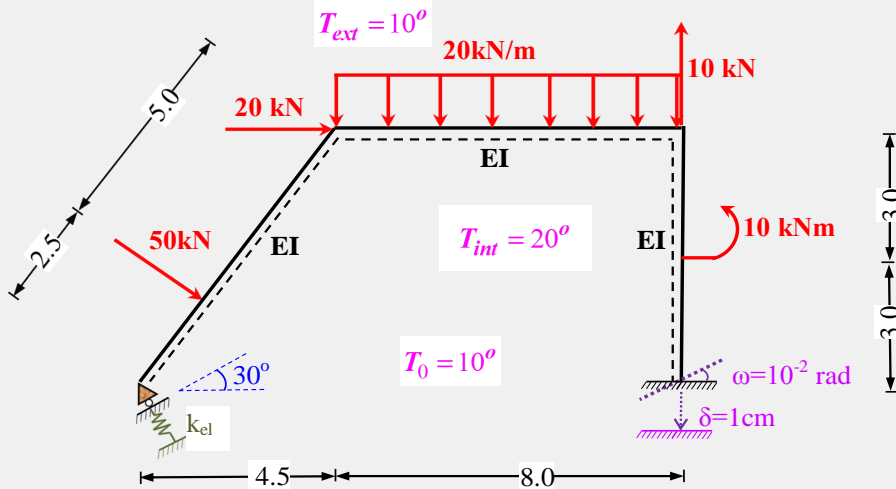
Διάνυσμα επικόμβιων μετακινήσεων

$$\begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(1)} \\ \bar{\Delta}_2^{(1)} \\ \bar{\Delta}_3^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi^n & -\sin \varphi^n & 0 \\ \sin \varphi^n & \cos \varphi^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_{1'}^{(1)} \\ \bar{\Delta}_{2'}^{(1)} \\ \bar{\Delta}_{3'}^{(1)} \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ & 0 \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -9089.1 \\ -140.2 \\ -1110.5 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} -7801.3 \\ -4666.0 \\ -1110.5 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{\Delta}_f\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(1)} \\ \bar{\Delta}_2^{(1)} \\ \bar{\Delta}_3^{(1)} \\ \bar{\Delta}_1^{(2)} \\ \bar{\Delta}_2^{(2)} \\ \bar{\Delta}_3^{(2)} \\ \bar{\Delta}_1^{(3)} \\ \bar{\Delta}_2^{(3)} \\ \bar{\Delta}_3^{(3)} \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} -7801.3 \\ -4666.0 \\ -1110.5 \\ -4025.7 \\ -7485.3 \\ 103.4 \\ -4014.9 \\ -335.46 \\ 1121.6 \end{Bmatrix}$$

ΕΣΩΤΕΡΙΚΑ ΕΝΤΑΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ ΜΕΛΩΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

ΕΣΩΤΕΡΙΚΑ ΕΝΤΑΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ ΜΕΛΩΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

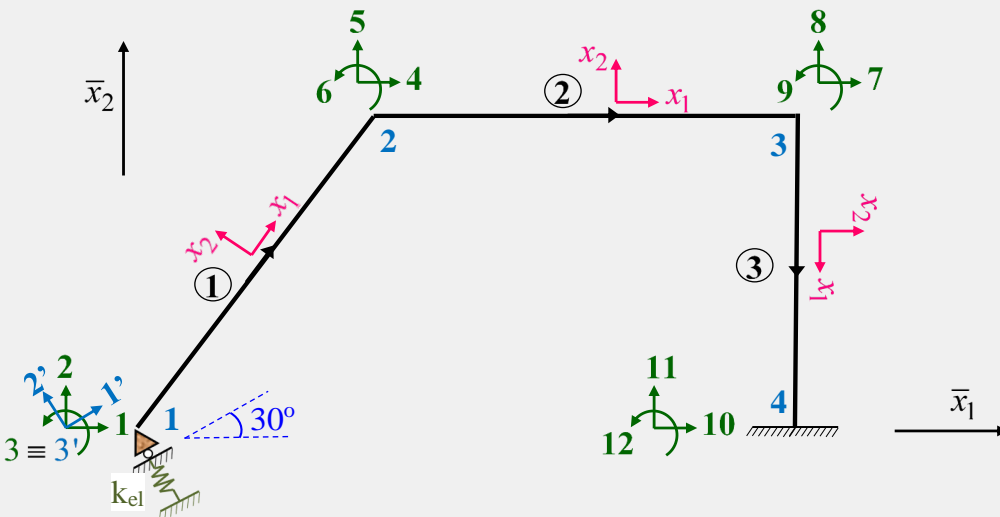


Υπολογισμός εσωτερικών εντατικών μεγεθών μελών πλαισίου

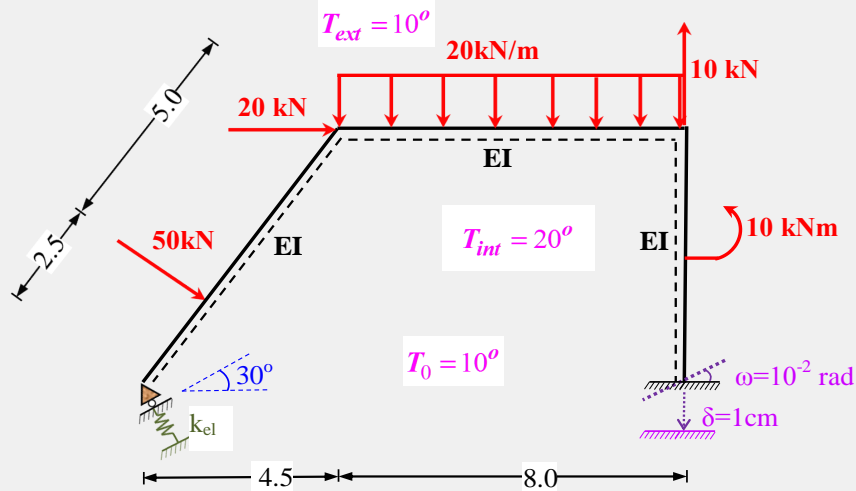
$$\{A^i\} = \{A_r^i\} + [k^i] \{D^i\}$$

$$\{A^i\} = \{A_r^i\} + [k^i] [\Lambda_{PF}^i] \{\bar{D}^i\}$$

Το καθολικό μητρώο ακραίων μετακινήσεων $\{\bar{D}^i\}$ μπορεί να μορφωθεί γνωρίζοντας από την επίλυση της σχέσης στιβαρότητας το μητρώο των καθολικών επικόμβιων μετακινήσεων του πλαισίου $\{\bar{\Delta}\}$ και λαμβάνοντας από αυτό τα κατάλληλα στοιχεία ανάλογα με τους κόμβους άκρων του μέλους i .



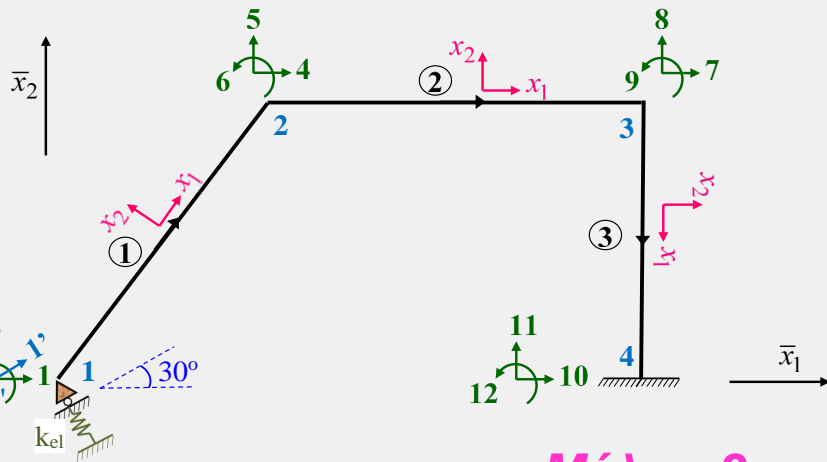
ΕΣΩΤΕΡΙΚΑ ΕΝΤΑΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ ΜΕΛΩΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ



Υπολογισμός εσωτερικών εντατικών μεγεθών μελών πλαισίου

Μέλος 1 :

$$\begin{Bmatrix} F_1^{1j} \\ F_2^{1j} \\ M_3^{1j} \\ F_1^{1k} \\ F_2^{1k} \\ M_3^{1k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 27.35 \\ 63.4 \\ 1.1 \\ -27.35 \\ -13.4 \\ 226.5 \end{Bmatrix} \quad (\approx 0.0)$$



Μέλος 2 :

$$\begin{Bmatrix} F_1^{2j} \\ F_2^{2j} \\ M_3^{2j} \\ F_1^{2k} \\ F_2^{2k} \\ M_3^{2k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 25.0 \\ 27.6 \\ -224.4 \\ -25.0 \\ 132.4 \\ -198.1 \end{Bmatrix} \quad (\approx 226.5)$$

Μέλος 3 :

$$\begin{Bmatrix} F_1^{3j} \\ F_2^{3j} \\ M_3^{3j} \\ F_1^{3k} \\ F_2^{3k} \\ M_3^{3k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 119.3 \\ 22.6 \\ 199.6 \\ -119.3 \\ -22.6 \\ 78.0 \end{Bmatrix}$$

ΕΣΩΤΕΡΙΚΑ ΕΝΤΑΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ ΜΕΛΩΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Διαγράμματα εντατικών μεγεθών μελών
πλαίσιου

