



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

**ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

**ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ & ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ**

# **ΕΠΙΠΕΔΑ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΑ**

---

**Ε.Ι. Σαπουντζάκης**

**Καθηγητής ΕΜΠ**

**ΑΝΑΛΥΣΗ ΡΑΒΔΩΤΩΝ ΦΟΡΕΩΝ ΜΕ  
ΜΗΤΡΩΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ**

# Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή
2. Παρουσίαση επίπεδου δικτυώματος
3. Διανύσματα ακραίων δράσεων στοιχείου επίπεδου δικτυώματος
4. Διανύσματα ακραίων μετατοπίσεων στοιχείου επίπεδου δικτυώματος
5. Μητρώο μετασχηματισμού στοιχείου επίπεδου δικτυώματος
6. Τοπικό μητρώο στιβαρότητας στοιχείου επίπεδου δικτυώματος
7. Καθολικό μητρώο στιβαρότητας στοιχείου επίπεδου δικτυώματος

# Περιεχόμενα

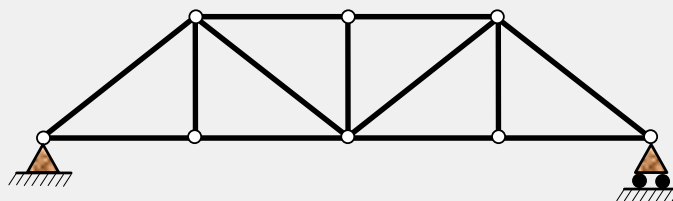
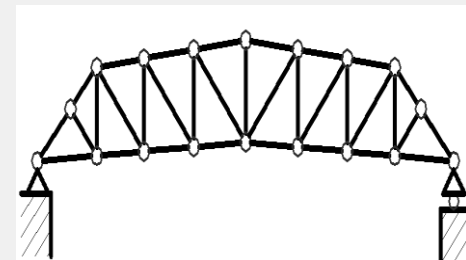
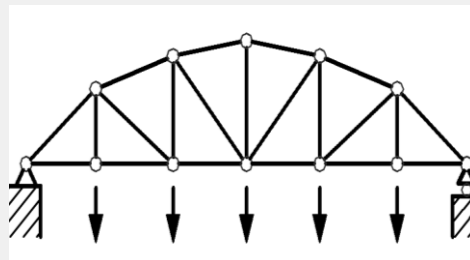
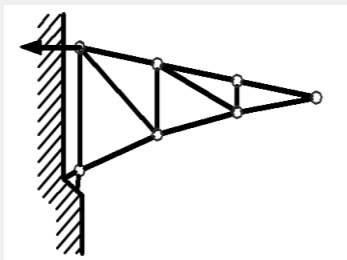
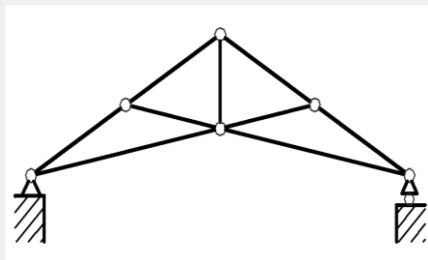
8. Διανύσματα επικόμβιων δράσεων και μετατοπίσεων επίπεδου δικτυώματος
9. Καθολικό μητρώο στιβαρότητας επίπεδου δικτυώματος
10. Τροποποίηση (αναδιάταξη) καθολικού μητρώου στιβαρότητας επίπεδου δικτυώματος λόγω στήριξης – Μητρώο αναδιάταξης
11. Τροποποίηση καθολικού μητρώου στιβαρότητας επίπεδου δικτυώματος λόγω κεκλιμένης στήριξης – Ελαστική στήριξη
12. Επίπεδο δικτύωμα υποβαλλόμενο σε ενδιάμεσα φορτία
13. Εσωτερικά εντατικά μεγέθη μελών επίπεδου δικτυώματος

---

# *ΕΙΣΑΓΩΓΗ*

---

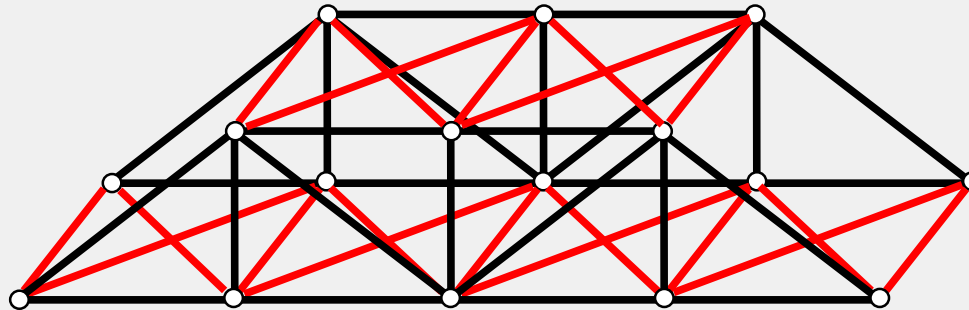
# ΕΙΣΑΓΩΓΗ



Οι **ραβδωτοί φορείς** που αποτελούνται από ευθύγραμμες ράβδους, των οποίων τα άκρα συνδέονται **αρθρωτά** σε κόμβους και **μεταφέρουν μόνο αξονικές δυνάμεις** (εφελκυστικές ή θλιπτικές) ονομάζονται **δικτυώματα**.

Τα δικτυώματα είναι συνήθως κατασκευασμένα από **χάλυβα** (μεταλλικές κατασκευές), από **αλουμίνιο** (ελαφριές μεταλλικές κατασκευές) ή από **ξύλο** (ξύλινες κατασκευές).

# ΕΙΣΑΓΩΓΗ

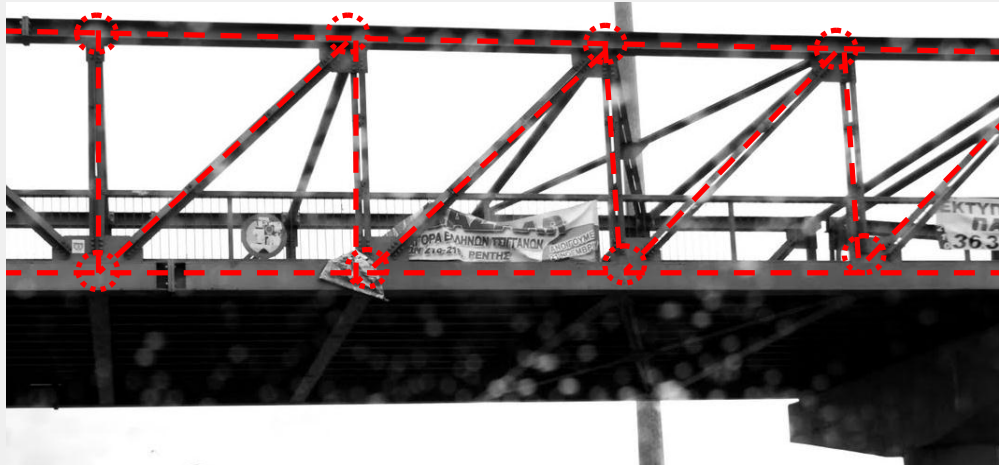


Στην περίπτωση κατά την οποία **όλες οι ράβδοι δικτυώματος βρίσκονται σε ένα επίπεδο και η φόρτιση του ανήκει στο επίπεδο αυτό**, το δικτύωμα αυτό αναφέρεται ως **επίπεδο**, ενώ σε αντίθετη περίπτωση, ο φορέας ονομάζεται **χωρικό δικτύωμα** ή **χωροδικτύωμα**.

Οι ράβδοι δικτυώματος καταπονούνται από **ομοιόμορφες θλιπτικές ή εφελκυστικές τάσεις** και έτσι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την κάλυψη μεγάλων ανοιγμάτων (>50 m).

# ΕΙΣΑΓΩΓΗ

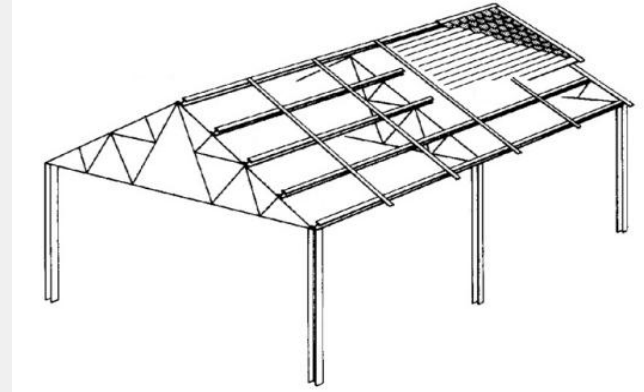
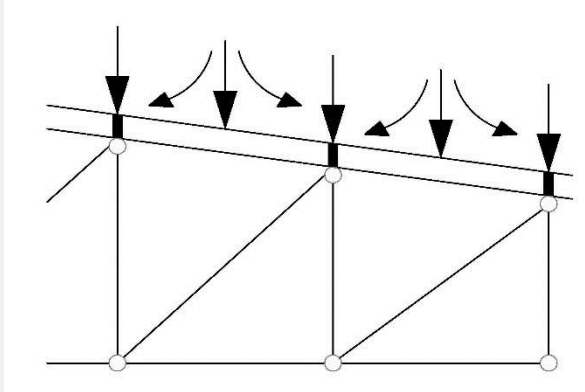
Για την ανάλυση των δικτυωμάτων εισάγονται οι ακόλουθες **βασικές απλοποιητικές παραδοχές**:



- Η **σύνδεση των ράβδων** στους κόμβους του δικτυώματος θεωρείται ως **ιδανικά αρθρωτή** (μηδενικές τριβές).
- Οι **άξονες** όλων των ράβδων του δικτυώματος θεωρούνται **ευθύγραμμοι**.
- Οι **άξονες** όλων των ράβδων **που συντρέχουν σε ένα κόμβο** τέμνονται προεκτεινόμενοι σε **ένα σημείο σύνδεσης** ('κεντρική' σύνδεση).

# ΕΙΣΑΓΩΓΗ

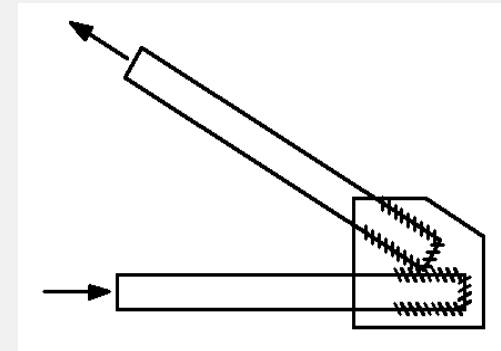
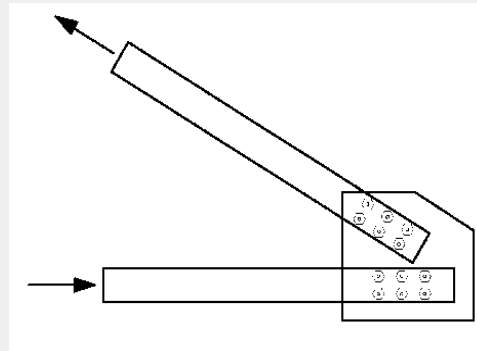
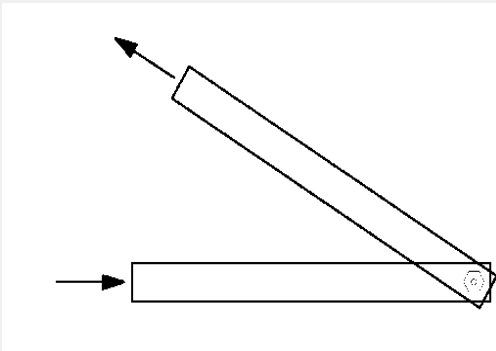
Για την ανάλυση των δικτυωμάτων εισάγονται οι ακόλουθες **βασικές απλοποιητικές παραδοχές**:



- Τα **εξωτερικά φορτία** συνίστανται αποκλειστικά σε **δυνάμεις που ενεργούν επί των κόμβων ή είναι παράλληλες με τους άξονες των ράβδων**.
- Οι ράβδοι του δικτυώματος θεωρούνται **εγκαρσίως αφόρτιστες**. Στις περιπτώσεις φόρτισης δικτυώματος με σημαντικά εξωτερικά **εγκάρσια φορτία** η αποκλειστική φόρτιση των κόμβων επιτυγχάνεται με τη βοήθεια συστήματος τεγίδων – διαδοκίδων.

# ΕΙΣΑΓΩΓΗ

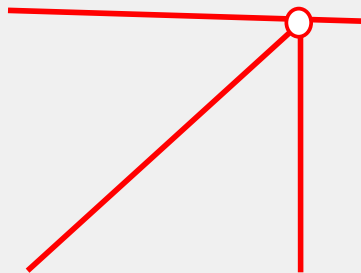
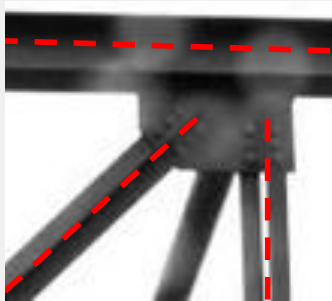
Οι **αποκλίσεις** από τις παραδοχές του ιδανικού δικτυώματος μπορεί οφείλονται στους εξής λόγους:



- Στους πραγματικούς κόμβους, ακόμη και αν αυτοί είναι εκ κατασκευής αρθρωτοί, **η τριβή στην άρθρωση δεν είναι μηδενική**. Πολύ περισσότερο, οι κόμβοι δεν μπορούν να θεωρηθούν ως ιδανικές αρθρώσεις στις περιπτώσεις **συγκολλητών, κοχλιωτών ή ηλωτών συνδέσεων** και ιδιαίτερα όταν ένα **δομικό στοιχείο δεν διακόπτεται στον κόμβο, αλλά είναι συνεχές**.

# ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι **αποκλίσεις** από τις παραδοχές του ιδανικού δικτυώματος μπορεί οφείλονται στους εξής λόγους:



- **Πρόσθετη μικρή καμπτική ένταση** αναπτύσσεται σε πολλές περιπτώσεις λόγω της **έκκεντρης σύνδεσης** των ράβδων στους κόμβους. Οι **άξονες των συνδεόμενων στοιχείων δεν συναντιούνται στο ίδιο σημείο**, γεγονός που δεν λαμβάνεται υπόψη στο απλοποιημένο προσομοίωμα του δικτυώματος. Η απόκλιση αυτή **αποφεύγεται** στις περιπτώσεις **βιομηχανοποιημένων χωροδικτυωμάτων**, των οποίων οι κόμβοι μπορούν να θεωρηθούν ως κεντρικά τοποθετημένες ιδανικές αρθρώσεις.

# ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι **αποκλίσεις** από τις παραδοχές του ιδανικού δικτυώματος μπορεί οφείλονται στους εξής λόγους:

- Σε περιπτώσεις συνεχούς άνω ή κάτω πέλματος στο οποίο παρουσιάζεται **μεταβολή της διατομής** (π.χ. λόγω ενίσχυσης ενός τμήματος με συγκόλληση ή κοχλίωση πρόσθετων ελασμάτων) εμφανίζεται **μικρό άλμα στον κεντροβαρικό άξονα των ράβδων** που αποτελούν το πέλμα. Αυτό λαμβάνεται απλοποιημένα υπόψη με τον καθορισμό ενός **"μέσου ουδέτερου άξονα"**. Με τον τρόπο αυτόν η πρόσθετη καμπτική ένταση λόγω της εκκεντρότητας διατηρείται σε χαμηλά (αμελητέα) επίπεδα.

# ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι **αποκλίσεις** από τις παραδοχές του ιδανικού δικτυώματος μπορεί οφείλονται στους εξής λόγους:

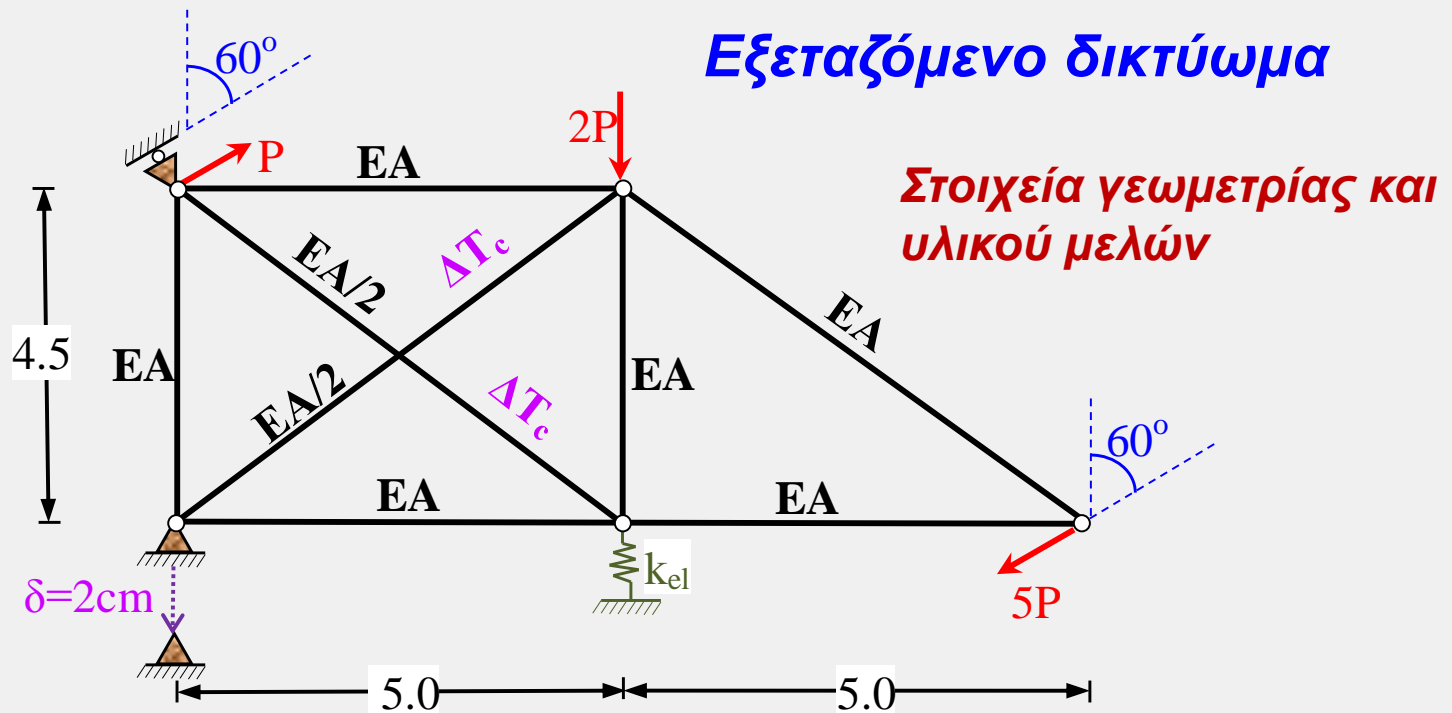
- Τα μη κατακόρυφα δομικά στοιχεία (άνω και κάτω πέλμα, διαγώνιες ράβδοι) **σε αντίθεση με την παραδοχή περί αποκλειστικά αξονικής φόρτισης φορτίζονται εγκάρσια** μεταξύ των κόμβων τους τουλάχιστον από **το ίδιο βάρος τους**, αλλά ενδεχομένως (κυρίως τα πέλματα) και από εγκάρσια εξωτερικά φορτία (συμβαίνει συχνά τεγίδες να στηρίζονται επάνω σε ράβδο μεταξύ δύο κόμβων). **Το ίδιο βάρος των ράβδων, αν και είναι κατανεμημένο κατά το μήκος τους, είναι συνήθως τόσο μικρό σε σχέση με τα φέροντα φορτία που επιτρέπει την εφαρμογή του ισόποσα στα δύο άκρα ως συγκεντρωμένα φορτία, όταν πρέπει να ληφθεί υπόψη.**

---

# *ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ*

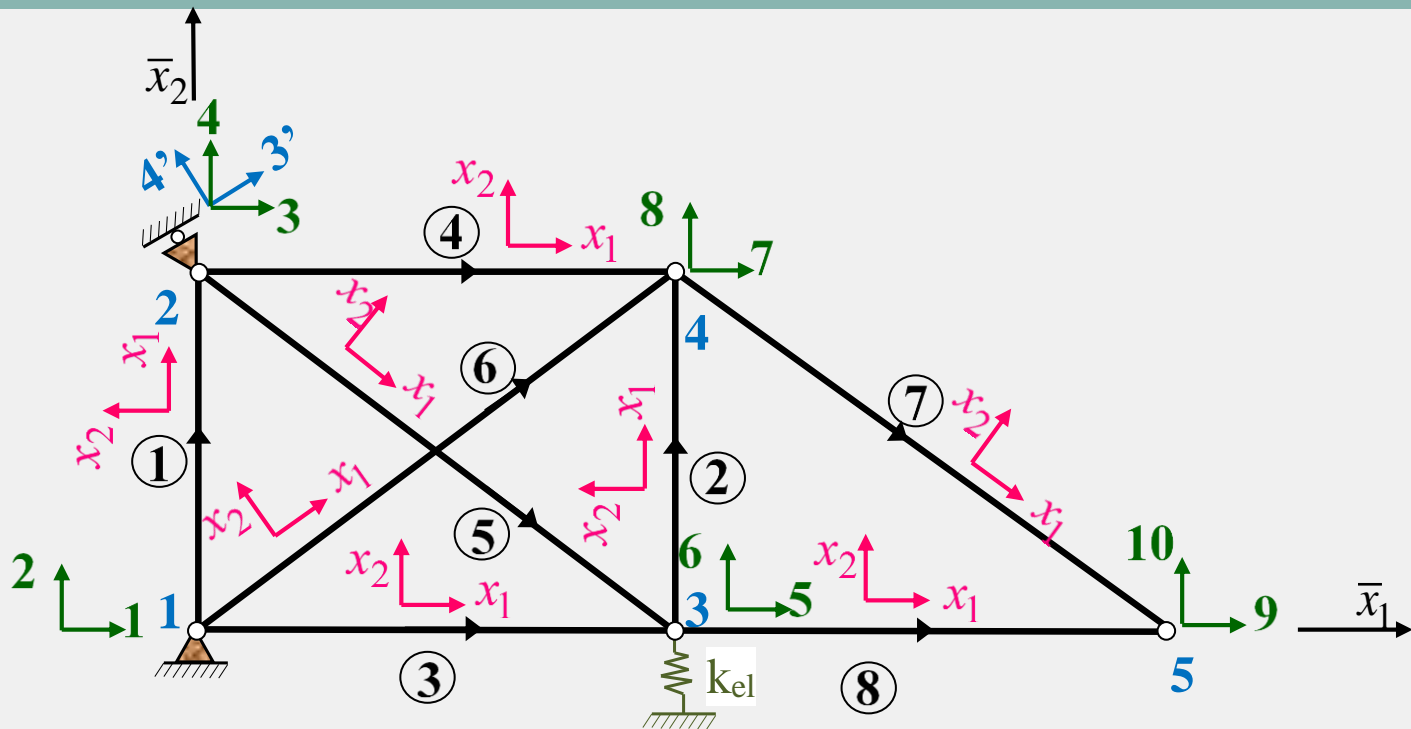
---

# ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ



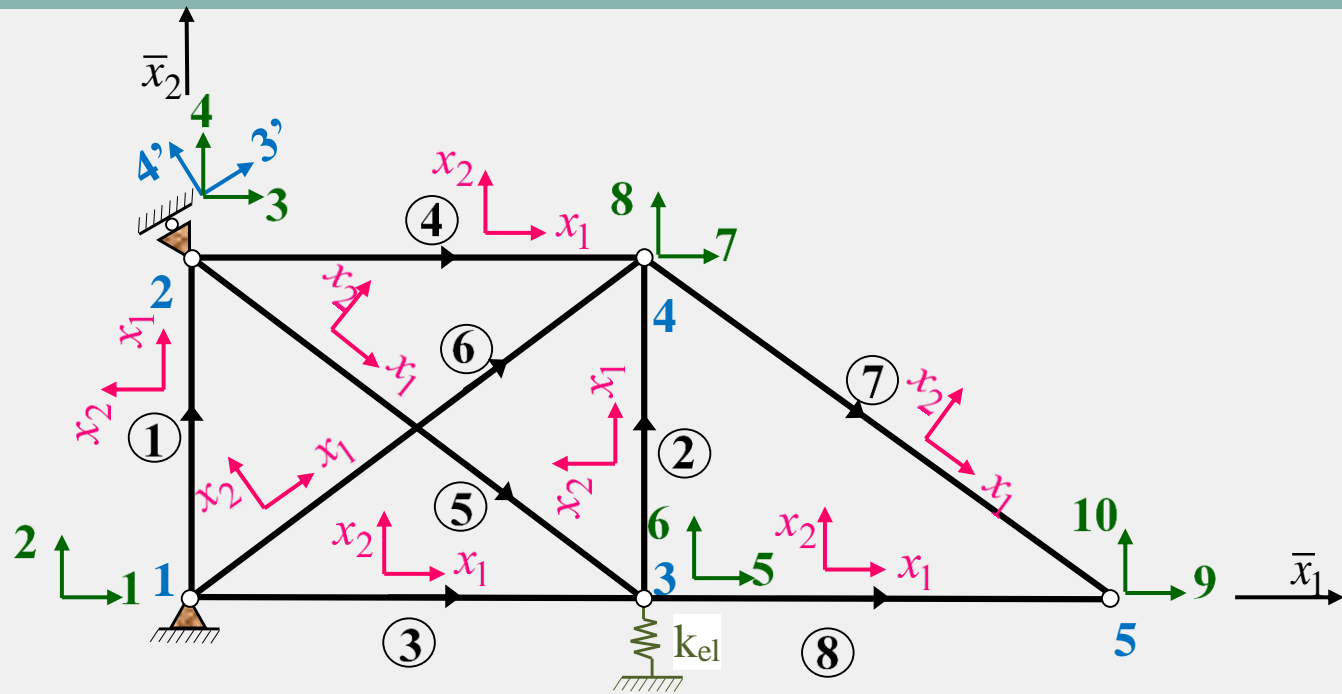
Τα μέλη του δικτυώματος είναι κατασκευασμένα από ομογενές και ισότροπο υλικό ( $E = 2.1 \times 10^8 \text{ kN} / \text{m}^2$ ) και είναι διατομής  $A = 10 \text{ cm}^2$  ή  $A/2$ .

# ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ



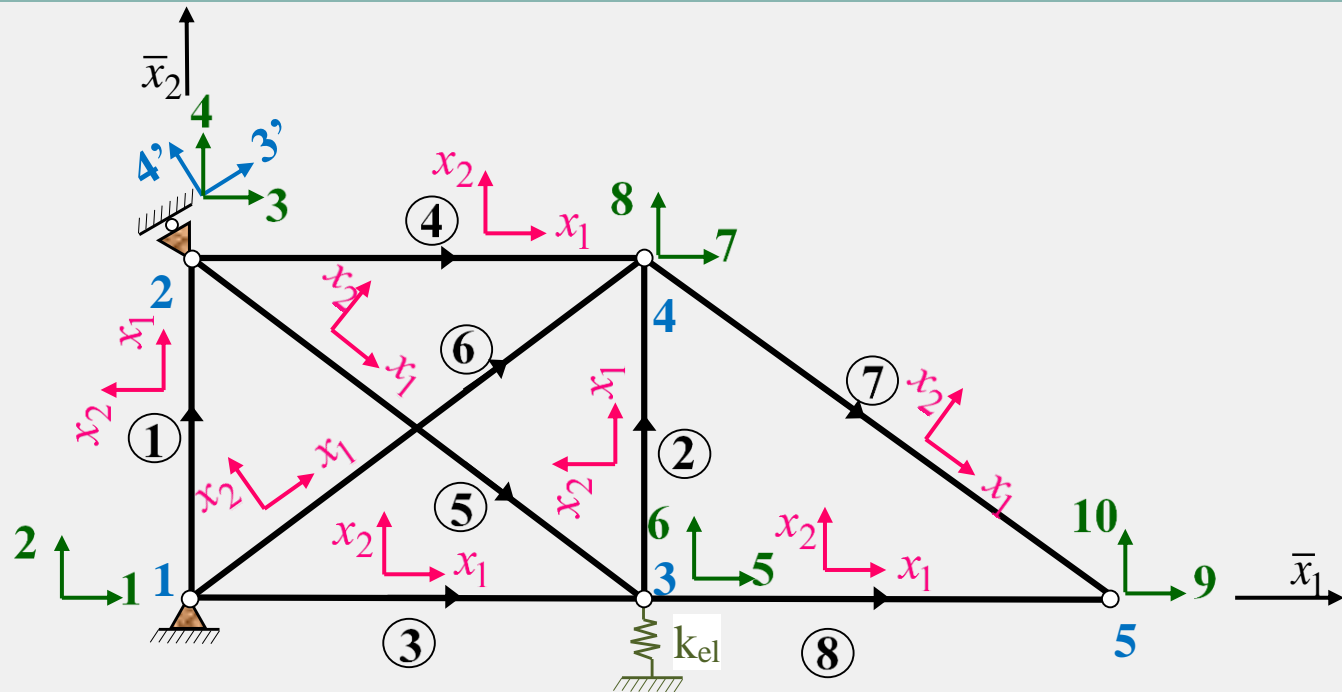
Σημείο εκκίνησης για την ανάλυση του επίπεδου δικτυώματος αποτελεί η **αρίθμηση των κόμβων και των μελών** του. Επίσης, επιλέγεται το δεξιόστροφο ορθογώνιο ως **καθολικό σύστημα αξόνων**, ως προς το οποίο θα γίνει η ανάλυση του φορέα και ο υπολογισμός των **κινηματικών μεγεθών** των κόμβων του και των **αντιδράσεων** των στηρίξεων του.

# ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ



Ακολουθως, εισάγεται **τοπικό σύστημα αναφοράς** για κάθε ένα από τα στοιχεία που συνθέτουν το δικτύωμα. Για τον καθορισμό του συστήματος αυτού, σε κάθε μέλος ορίζεται **ως άξονας  $x_1$  αυτός που έχει διεύθυνση εκείνη του μέλους και φορά από τον κόμβο με μικρότερο προς τον κόμβο με μεγαλύτερο αύξοντα αριθμό.**

# ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ



Τέλος, καθορίζονται οι **βαθμοί ελευθερίας κίνησης των κόμβων** του (κινηματική αοριστία), όπου στο βήμα αυτό **αμελείται ο τρόπος στήριξης του δικτυώματος**. Έτσι, γνωρίζοντας ότι **κάθε κόμβος διαθέτει δύο βαθμούς ελευθερίας κίνησης**, οι βαθμοί ελευθερίας κίνησης του φορέα θα είναι  $2N$ , όπου  $N$  ο αριθμός των κόμβων (nodes) του δικτυώματος.

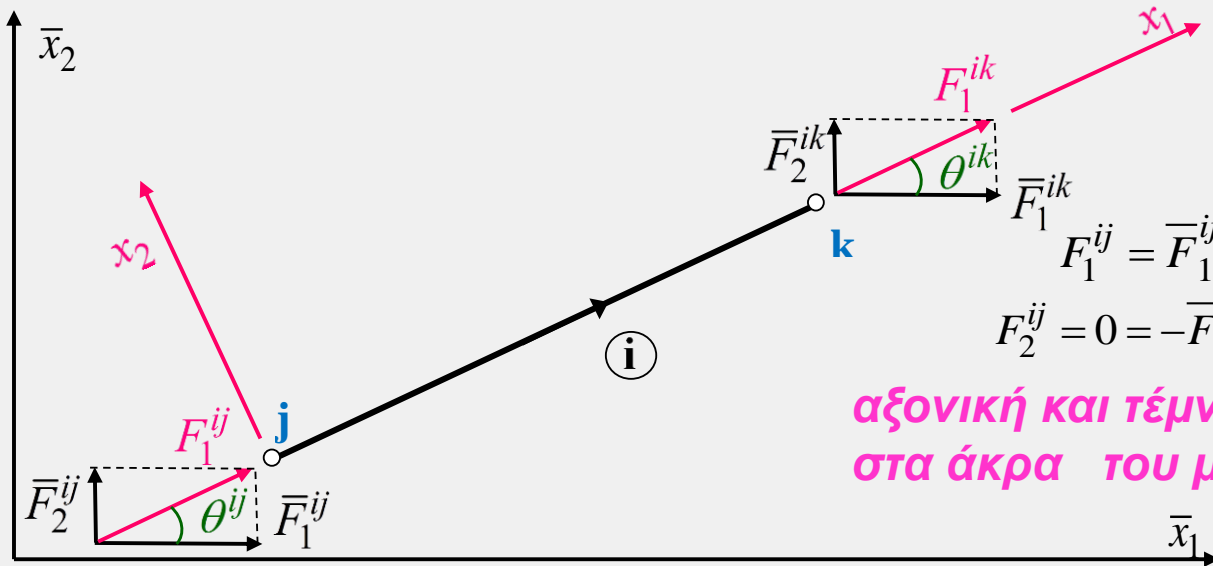
---

# ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΑΚΡΑΙΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ

---

# ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΑΚΡΑΙΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ

**Τοπικό και  
καθολικό  
διάνυσμα  
ακράιων  
δράσεων**



**αξονική και τέμνουσα δύναμη  
στα άκρα του μέλους**

**άκρου j**

$$\{A^{ij}\} = \begin{Bmatrix} F_1^{ij} \\ F_2^{ij} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{ij} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{A^{ik}\} = \begin{Bmatrix} F_1^{ik} \\ F_2^{ik} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{ik} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

**άκρου k**

$$\{A^i\} = \begin{Bmatrix} \{A^{ij}\} \\ \{A^{ik}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{ij} \\ F_2^{ij} \\ F_1^{ik} \\ F_2^{ik} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{ij} \\ 0 \\ F_1^{ik} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{A}^i\} = \begin{Bmatrix} \{A^{ij}\} \\ \{A^{ik}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_1^{ij} \\ \bar{F}_2^{ij} \\ \bar{F}_1^{ik} \\ \bar{F}_2^{ik} \end{Bmatrix}$$

**όλου του  
στοιχείου**

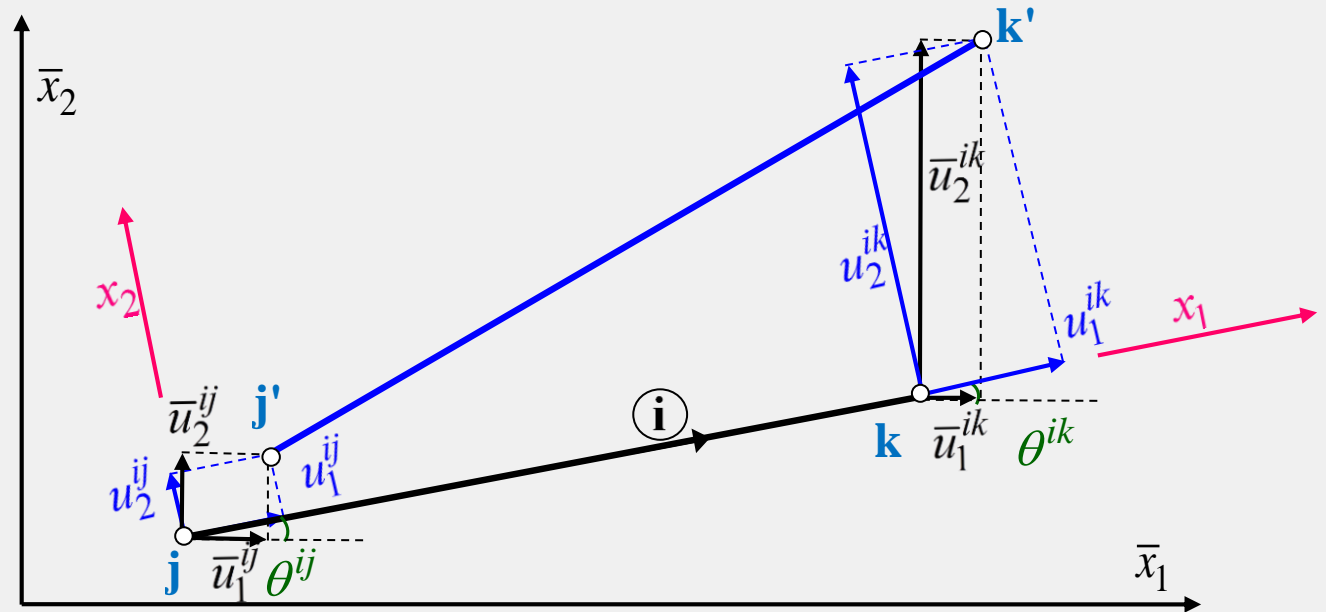
---

# ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΑΚΡΑΙΩΝ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ

---

# ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΑΚΡΑΙΩΝ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ

Τοπικό και  
καθολικό  
διάνυσμα  
ακραίων  
μετατοπίσεων



$$\{D^{ij}\} = \begin{Bmatrix} u_1^{ij} \\ u_2^{ij} \end{Bmatrix}$$

άκρου  $j$

$$\{D^{ik}\} = \begin{Bmatrix} u_1^{ik} \\ u_2^{ik} \end{Bmatrix}$$

άκρου  $k$

$$\{D^i\} = \begin{bmatrix} \{D^{ij}\} \\ \{D^{ik}\} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1^{ij} \\ u_2^{ij} \\ u_1^{ik} \\ u_2^{ik} \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{D}^i\} = \begin{bmatrix} \{\bar{D}^{ij}\} \\ \{\bar{D}^{ik}\} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} -ij \\ u_1^{ij} \\ -ik \\ u_2^{ij} \\ -ik \\ u_1^{ik} \\ -ik \\ u_2^{ik} \end{Bmatrix}$$

όλου του  
στοιχείου

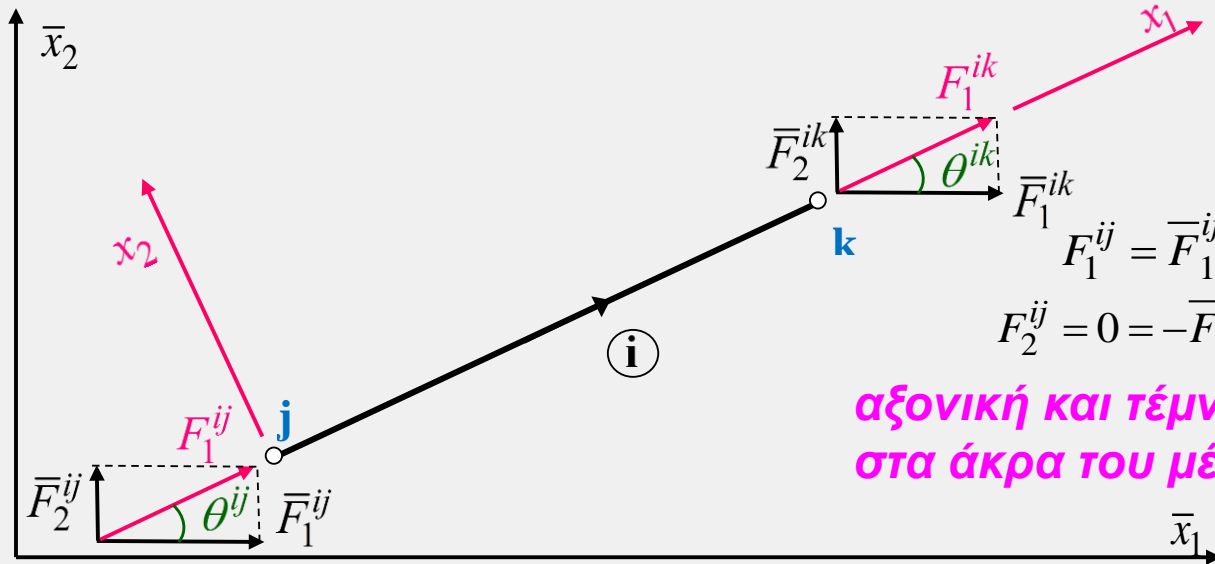
---

# ΜΗΤΡΩΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ

---

# ΜΗΤΡΩΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ

Στο άκρο  $j$   
μέλους  
επίπεδου  
δικτυώματος



αξονική και τέμνουσα δύναμη  
στα άκρα του μέλους

$$F_1^{ij} = \bar{F}_1^{ij} \cos \theta^{ij} + \bar{F}_2^{ij} \sin \theta^{ij}$$

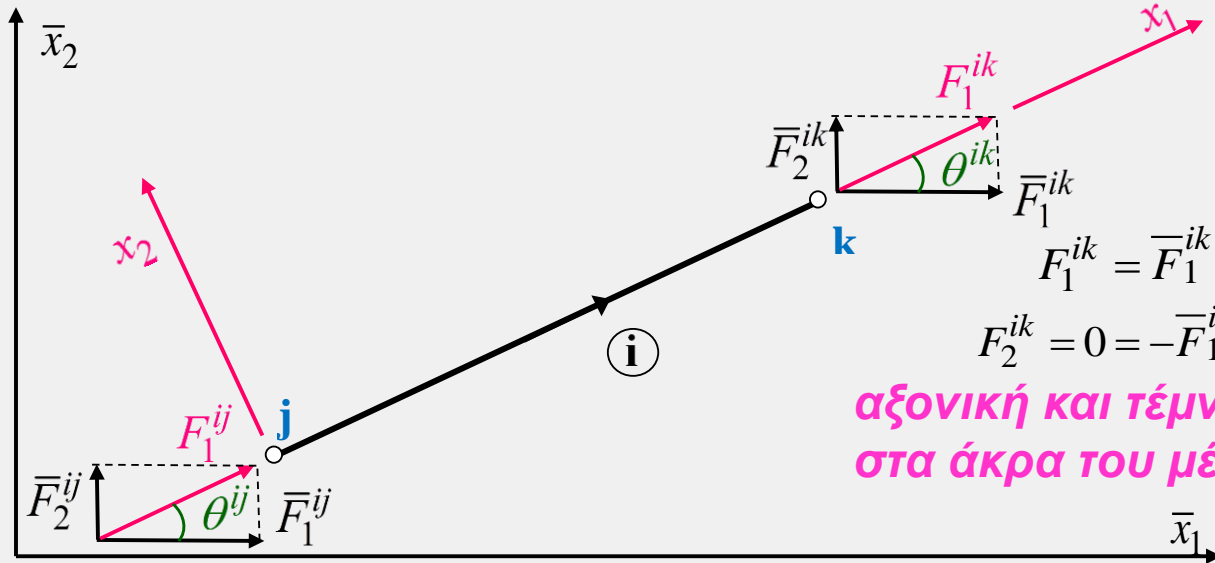
$$F_2^{ij} = 0 = -\bar{F}_1^{ij} \sin \theta^{ij} + \bar{F}_2^{ij} \cos \theta^{ij}$$

$$\{A^{ij}\} = \begin{Bmatrix} F_1^{ij} \\ F_2^{ij} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{ij} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta^{ij} & \sin \theta^{ij} \\ -\sin \theta^{ij} & \cos \theta^{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{F}_1^{ij} \\ \bar{F}_2^{ij} \end{Bmatrix} = [\Lambda_{PT}^{ij}] \{\bar{A}^{ij}\}$$

όπου  $[\Lambda_{PT}^{ij}] = \begin{bmatrix} \cos \theta^{ij} & \sin \theta^{ij} \\ -\sin \theta^{ij} & \cos \theta^{ij} \end{bmatrix}$

# ΜΗΤΡΩΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ

Παρομοίως  
στο άκρο  $k$   
μέλους  
επίπεδου  
δικτυώματος



$$F_1^{ik} = \bar{F}_1^{ik} \cos \theta^{ik} + \bar{F}_2^{ik} \sin \theta^{ik}$$

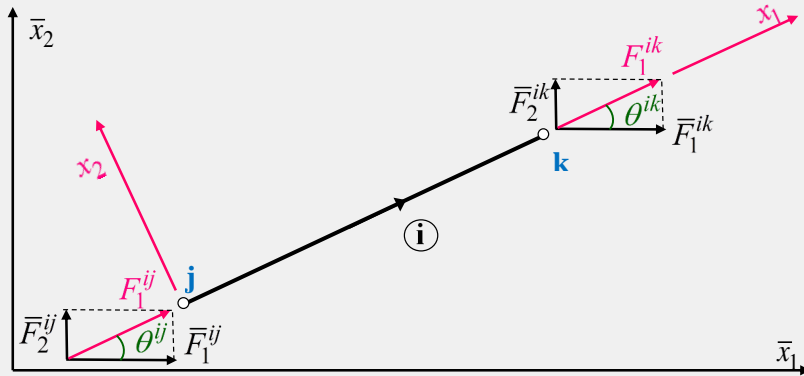
$$F_2^{ik} = 0 = -\bar{F}_1^{ik} \sin \theta^{ik} + \bar{F}_2^{ik} \cos \theta^{ik}$$

αξονική και τέμνουσα δύναμη  
στα άκρα του μέλους

$$\{A^{ik}\} = \begin{Bmatrix} F_1^{ik} \\ F_2^{ik} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{ik} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta^{ik} & \sin \theta^{ik} \\ -\sin \theta^{ik} & \cos \theta^{ik} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{F}_1^{ik} \\ \bar{F}_2^{ik} \end{Bmatrix} = [\Lambda_{PT}^{ik}] \{A^{ik}\}$$

όπου  $[\Lambda_{PT}^{ik}] = \begin{bmatrix} \cos \theta^{ik} & \sin \theta^{ik} \\ -\sin \theta^{ik} & \cos \theta^{ik} \end{bmatrix}$

# ΜΗΤΡΩΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ



ή συνολικά και στα δύο  
άκρα μέλους επίπεδου  
δικτυώματος

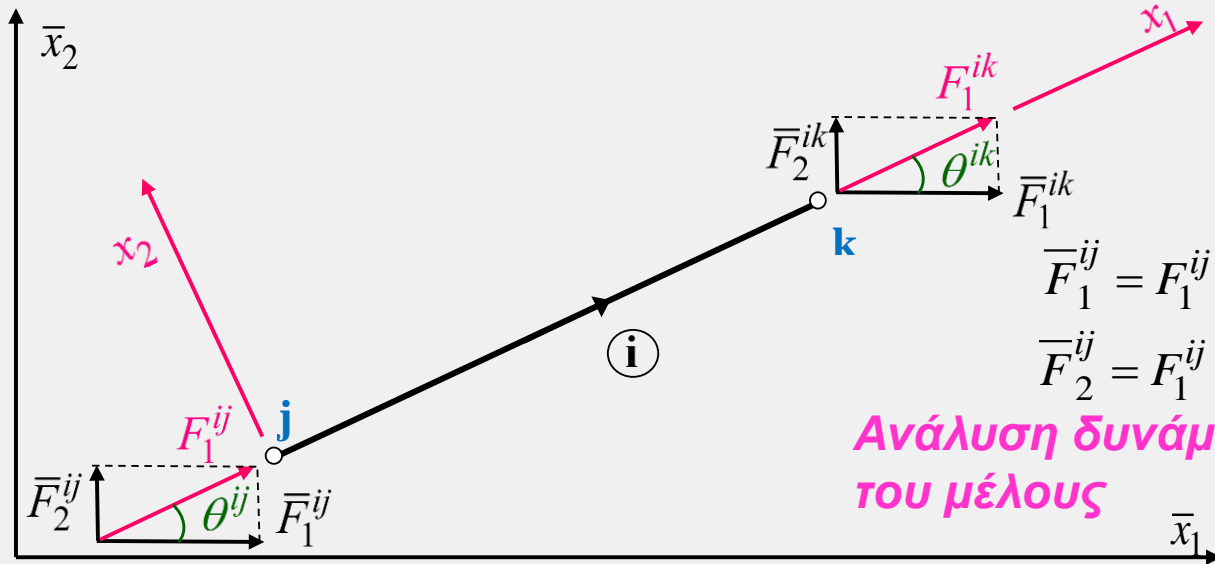
$$\{A^i\} = \begin{bmatrix} \{A^{ij}\} \\ \{A^{ik}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^{ij} \\ 0 \\ F_1^{ik} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta^{ij} & \sin \theta^{ij} & 0 & 0 \\ -\sin \theta^{ij} & \cos \theta^{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta^{ik} & \sin \theta^{ik} \\ 0 & 0 & -\sin \theta^{ik} & \cos \theta^{ik} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{F}_1^{ij} \\ \bar{F}_2^{ij} \\ \bar{F}_1^{ik} \\ \bar{F}_2^{ik} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} [\Lambda_{PT}^{ij}] & [0] \\ [0] & [\Lambda_{PT}^{ik}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\bar{A}^{ij}\} \\ \{\bar{A}^{ik}\} \end{bmatrix} = [\Lambda_{PT}^i] \{\bar{A}^i\}$$

Μητρώο  
μετασχηματισμού  
μέλους επίπεδου  
δικτυώματος

# ΜΗΤΡΩΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ

Αντίστροφα,  
στο άκρο  $j$   
(ή  $k$ ) μέλους  
επίπεδου  
δικτυώματος



$$\bar{F}_1^{ij} = F_1^{ij} \cos \theta^{ij} - F_2^{ij} \sin \theta^{ij}$$

$$\bar{F}_2^{ij} = F_1^{ij} \sin \theta^{ij} + F_2^{ij} \cos \theta^{ij}$$

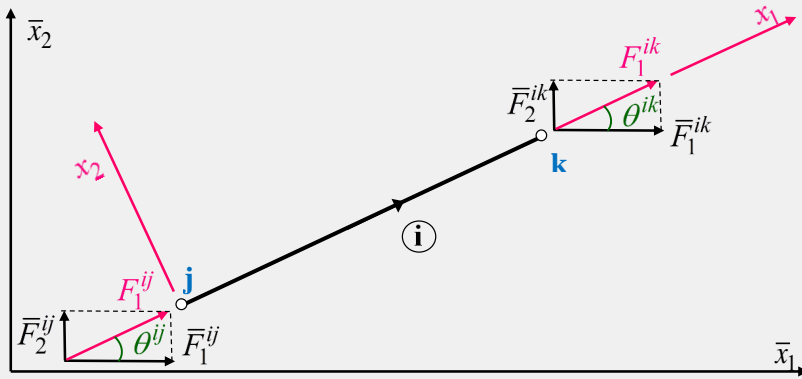
Ανάλυση δυνάμεων στα άκρα  
του μέλους

$$\left\{ \bar{A}^{ij} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \bar{F}_1^{ij} \\ \bar{F}_2^{ij} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} \cos \theta^{ij} & -\sin \theta^{ij} \\ \sin \theta^{ij} & \cos \theta^{ij} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} F_1^{ij} \\ F_2^{ij} \end{matrix} \right\} = \left[ \Lambda_{PT}^{ij} \right]^T \left\{ A^{ij} \right\}$$

$$\left[ \Lambda_{PT}^{ij} \right]^{-1} = \left[ \Lambda_{PT}^{ij} \right]^T$$

όπου  $\left[ \Lambda_{PT}^{ij} \right] = \begin{bmatrix} \cos \theta^{ij} & \sin \theta^{ij} \\ -\sin \theta^{ij} & \cos \theta^{ij} \end{bmatrix}$

# ΜΗΤΡΩΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ



και συνολικά και στα δύο  
άκρα μέλους επίπεδου  
δικτυώματος

Αντίστροφος  
μετασχηματισμός  
για μέλος  
επίπεδου  
δικτυώματος

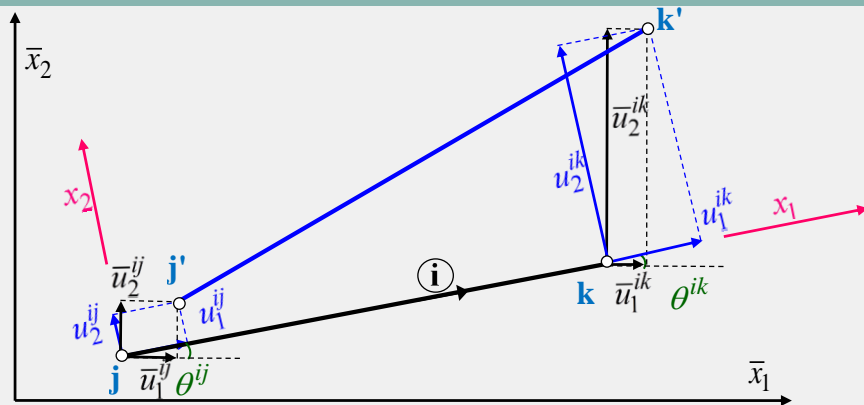
$$\left\{ \bar{A}^i \right\} = \begin{bmatrix} \left\{ \bar{A}^{ij} \right\} \\ \left\{ \bar{A}^{ik} \right\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[ \Lambda_{PT}^{ij} \right]^T & [0] \\ [0] & \left[ \Lambda_{PT}^{ik} \right]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left\{ A^{ij} \right\} \\ \left\{ A^{ik} \right\} \end{bmatrix} = \left[ \Lambda_{PT}^i \right]^T \left\{ A^i \right\}$$

όπου

$$\left[ \Lambda_{PT}^i \right] = \begin{bmatrix} \left[ \Lambda_{PT}^{ij} \right] & [0] \\ [0] & \left[ \Lambda_{PT}^{ik} \right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta^{ij} & \sin \theta^{ij} & 0 & 0 \\ -\sin \theta^{ij} & \cos \theta^{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta^{ik} & \sin \theta^{ik} \\ 0 & 0 & -\sin \theta^{ik} & \cos \theta^{ik} \end{bmatrix}$$

$$\left[ \Lambda_{PT}^i \right]^{-1} = \left[ \Lambda_{PT}^i \right]^T$$

# ΜΗΤΡΩΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ



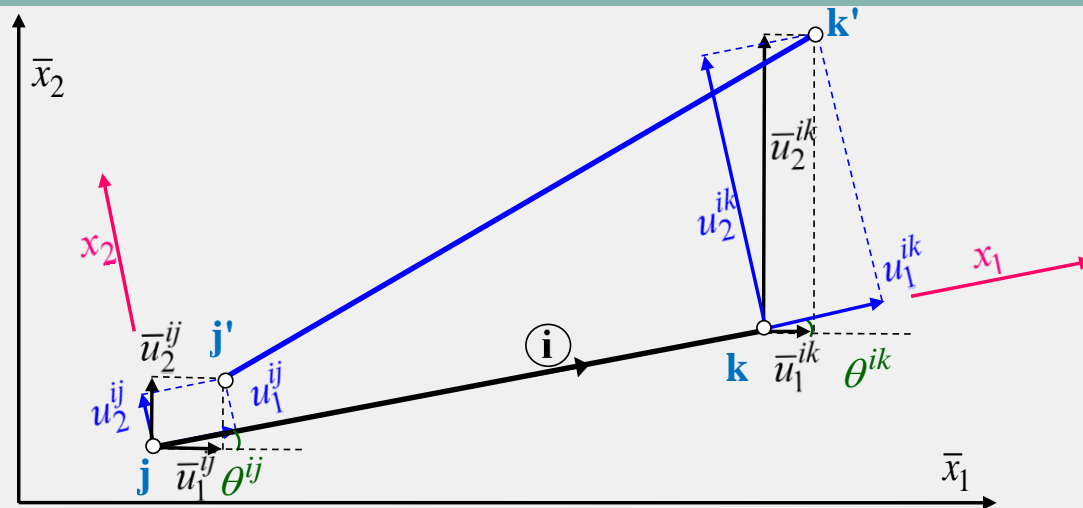
**‘Όμοια για τα διανύσματα  
ακραίων μετατοπίσεων  
θα ισχύει**

$$\left\{ D^i \right\} = \begin{bmatrix} \left\{ D^{ij} \right\} \\ \left\{ D^{ik} \right\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^{ij} \\ u_2^{ij} \\ u_1^{ik} \\ u_2^{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta^{ij} & \sin \theta^{ij} & 0 & 0 \\ -\sin \theta^{ij} & \cos \theta^{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta^{ik} & \sin \theta^{ik} \\ 0 & 0 & -\sin \theta^{ik} & \cos \theta^{ik} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -ij \\ u_1 \\ -ij \\ u_2 \\ -ik \\ u_1 \\ -ik \\ u_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \left[ \Lambda_{PT}^{ij} \right] & [0] \\ [0] & \left[ \Lambda_{PT}^{ik} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left\{ \overline{D}^{ij} \right\} \\ \left\{ \overline{D}^{ik} \right\} \end{bmatrix} = \left[ \Lambda_{PT}^i \right] \left\{ \overline{D}^i \right\}$$

**Μητρώο  
μετασχηματισμού  
μέλους επίπεδου  
δικτυώματος**

# ΜΗΤΡΩΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ



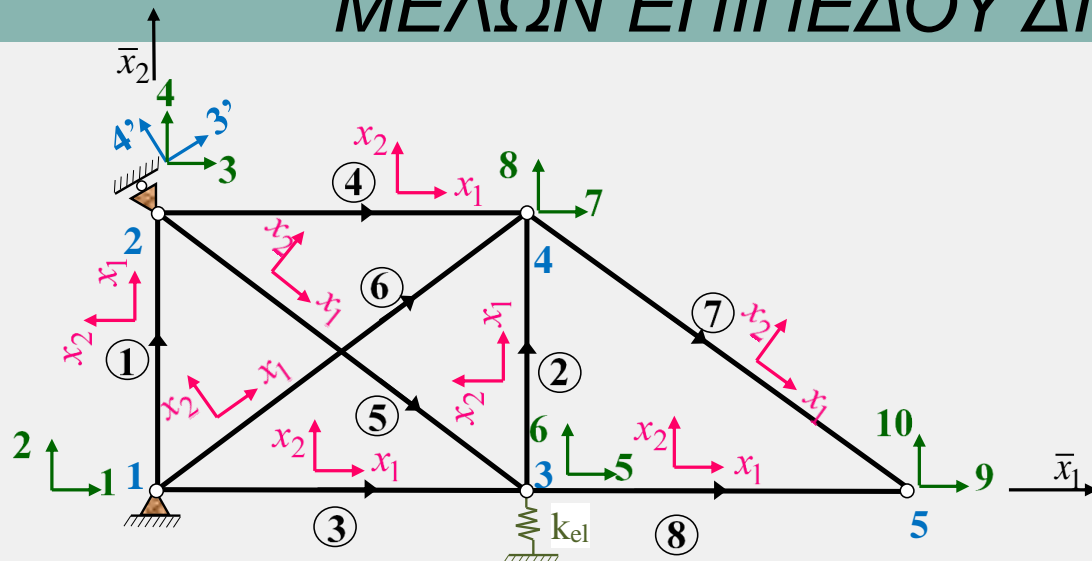
ή αντίστροφα

$$\left\{ \bar{D}^i \right\} = \begin{bmatrix} \left\{ \bar{D}^{ij} \right\} \\ \left\{ \bar{D}^{ik} \right\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[ \Lambda_{PT}^{ij} \right]^T & [0] \\ [0] & \left[ \Lambda_{PT}^{ik} \right]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left\{ D^{ij} \right\} \\ \left\{ D^{ik} \right\} \end{bmatrix} = \left[ \Lambda_{PT}^i \right]^T \left\{ D^i \right\}$$

$$\left[ \Lambda_{PT}^i \right]^{-1} = \left[ \Lambda_{PT}^i \right]^T$$

Ανάστροφο  
μητρώου  
μετασχηματισμού  
μέλους επίπεδου  
δικτυώματος

# Εφαρμογή -ΜΗΤΡΩΑ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΜΕΛΩΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ



Μόρφωση  
μητρώων  
μετασχηματισμού  
μελών

$\left[ \Lambda_{PT}^i \right]$

- Μέλος (1):  $\theta^{1j} = \theta^{1k} = \theta^1 = 90^\circ \Rightarrow \cos \theta^1 = 0., \sin \theta^1 = 1.$
- Μέλος (2):  $\theta^{2j} = \theta^{2k} = \theta^2 = 90^\circ \Rightarrow \cos \theta^2 = 0., \sin \theta^2 = 1.$
- Μέλος (3):  $\theta^{3j} = \theta^{3k} = \theta^3 = 0^\circ \Rightarrow \cos \theta^3 = 1., \sin \theta^3 = 0.$
- Μέλος (4):  $\theta^{4j} = \theta^{4k} = \theta^4 = 0^\circ \Rightarrow \cos \theta^4 = 1., \sin \theta^4 = 0.$
- Μέλος (5):  $\theta^{5j} = \theta^{5k} = \theta^5 = -41.987^\circ \Rightarrow \cos \theta^5 = 0.7433, \sin \theta^5 = -0.6690$
- Μέλος (6):  $\theta^{6j} = \theta^{6k} = \theta^6 = 41.987^\circ \Rightarrow \cos \theta^6 = 0.7433, \sin \theta^6 = 0.6690$
- Μέλος (7):  $\theta^{7j} = \theta^{7k} = \theta^7 = -41.987^\circ \Rightarrow \cos \theta^7 = 0.7433, \sin \theta^7 = -0.6690$
- Μέλος (8):  $\theta^{8j} = \theta^{8k} = \theta^8 = 0^\circ \Rightarrow \cos \theta^8 = 1., \sin \theta^8 = 0.$

---

# *ΤΟΠΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ*

---

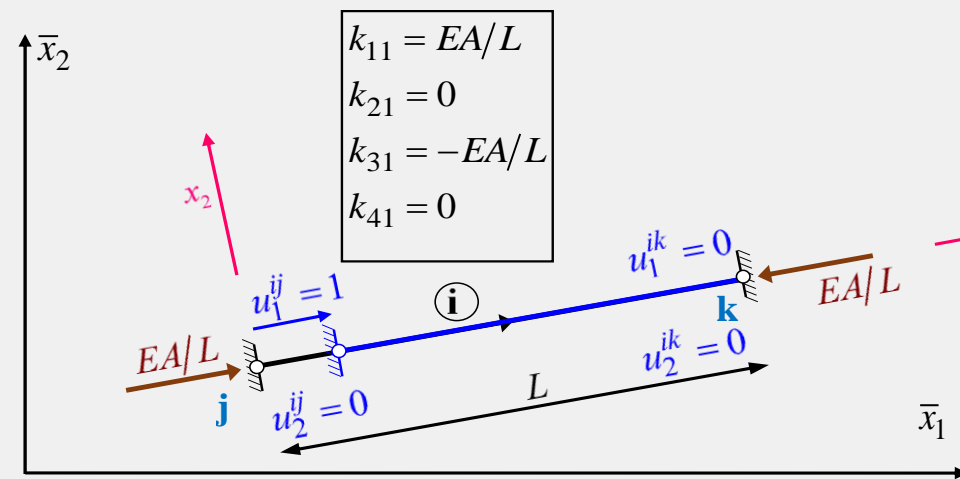
# ΤΟΠΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ

## Μόρφωση τοπικού μητρώου στιβαρότητας μέλους επίπεδου δικτύωματος

$$\begin{Bmatrix} F_1^{ij} \\ F_2^{ij} \\ F_1^{ik} \\ F_2^{ik} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{ij} \\ 0 \\ F_1^{ik} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^i & k_{12}^i & k_{13}^i & k_{14}^i \\ k_{21}^i & k_{22}^i & k_{23}^i & k_{24}^i \\ k_{31}^i & k_{32}^i & k_{33}^i & k_{34}^i \\ k_{41}^i & k_{42}^i & k_{43}^i & k_{44}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{ij} \\ u_2^{ij} \\ u_1^{ik} \\ u_2^{ik} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \{A^{ij}\} \\ \{A^{ik}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_{jj}^i] & [k_{jk}^i] \\ [k_{kj}^i] & [k_{kk}^i] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{D^{ij}\} \\ \{D^{ik}\} \end{bmatrix}$$

$$\{A^i\} = [k^i] \{D^i\}$$

$$F_1^{ij} = k_{11}^i \cdot u_1^{ij} + k_{12}^i \cdot u_2^{ij} + k_{13}^i \cdot u_1^{ik} + k_{14}^i \cdot u_2^{ik}$$

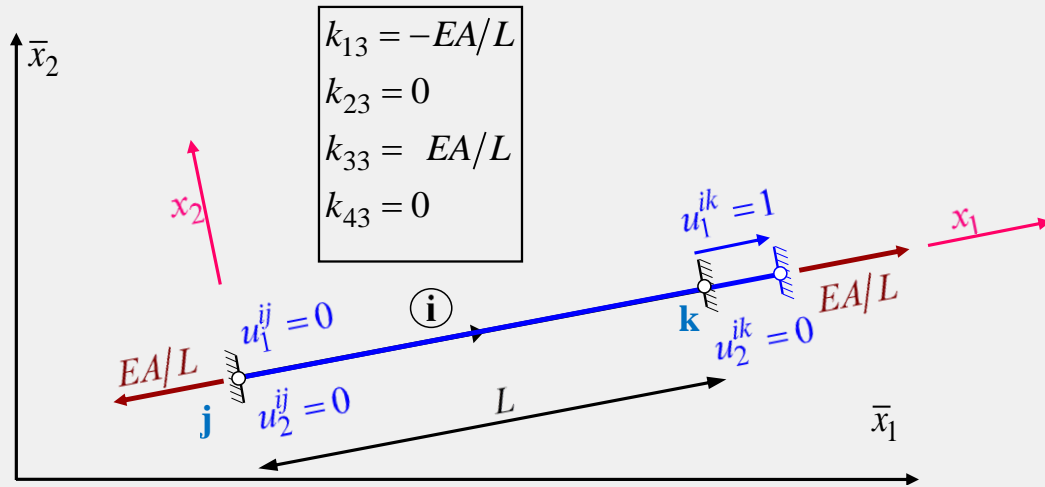


Μοναδιαία μετατόπιση στο άκρο j μέλους ε.δ.

το τυχόν στοιχείο  $k_{mn}^i$  του τοπικού μητρώου στιβαρότητας του μέλους  $i$  δηλώνει την αναπτυσσόμενη τοπική ακραία δράση κατά τον τοπικό βαθμό ελευθερίας  $m$  όταν επιβληθεί μοναδιαία και μοναδική ακραία μετακίνηση κατά τον τοπικό βαθμό ελευθερίας  $n$  του μέλους  $i$ , δηλαδή με ταυτόχρονο μηδενισμό των υπόλοιπων τοπικών βαθμών ελευθερίας του μέλους.

# ΤΟΠΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ

## Μόρφωση τοπικού μητρώου στιβαρότητας μέλους επίπεδου δικτύωματος



το τυχόν στοιχείο  $k_{mn}^i$  του τοπικού μητρώου στιβαρότητας του μέλους  $i$  δηλώνει την αναπτυσσόμενη τοπική ακραία δράση κατά τον τοπικό βαθμό ελευθερίας  $m$  όταν επιβληθεί μοναδιαία και μοναδική ακραία μετακίνηση κατά τον τοπικό βαθμό ελευθερίας  $n$  του μέλους  $i$ , δηλαδή με ταυτόχρονο μηδενισμό των υπόλοιπων τοπικών βαθμών ελευθερίας του μέλους.

Μοναδιαία μετατόπιση στο άκρο  $k$  μέλους ε.δ.

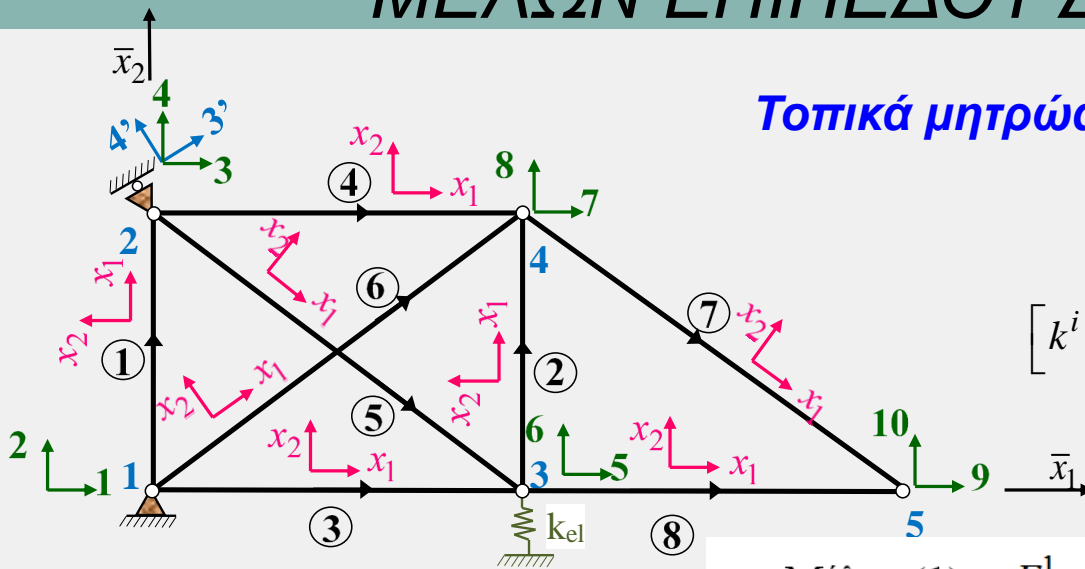
$$[k^i] = \begin{bmatrix} [k_{jj}^i] & [k_{jk}^i] \\ [k_{kj}^i] & [k_{kk}^i] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & -\frac{E^i A^i}{L^i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & \frac{E^i A^i}{L^i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\{A^i\} = [k^i] \{D^i\}$$

Τοπικό μητρώο  
στιβαρότητας μέλους

# Εφαρμογή - ΤΟΠΙΚΑ ΜΗΤΡΩΑ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΜΕΛΩΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ

## Τοπικά μητρώα στιβαρότητας μελών



$$[k^i] = \begin{bmatrix} [k_{jj}^i] & [k_{jk}^i] \\ [k_{kj}^i] & [k_{kk}^i] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & -\frac{E^i A^i}{L^i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & \frac{E^i A^i}{L^i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## Στοιχεία γεωμετρίας και υλικού μελών

- Μέλος (1) :  $E^1 = 2.1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ ,  $A^1 = 10 \text{ cm}^2$ ,  $L^1 = 4.5 \text{ m}$
- Μέλος (2) :  $E^2 = 2.1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ ,  $A^2 = 10 \text{ cm}^2$ ,  $L^2 = 4.5 \text{ m}$
- Μέλος (3) :  $E^3 = 2.1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ ,  $A^3 = 10 \text{ cm}^2$ ,  $L^3 = 5.0 \text{ m}$
- Μέλος (4) :  $E^4 = 2.1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ ,  $A^4 = 10 \text{ cm}^2$ ,  $L^4 = 5.0 \text{ m}$
- Μέλος (5) :  $E^5 = 2.1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ ,  $A^5 = 5 \text{ cm}^2$ ,  $L^5 = 6.7268 \text{ m}$
- Μέλος (6) :  $E^6 = 2.1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ ,  $A^6 = 5 \text{ cm}^2$ ,  $L^6 = 6.7268 \text{ m}$
- Μέλος (7) :  $E^7 = 2.1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ ,  $A^7 = 10 \text{ cm}^2$ ,  $L^7 = 6.7268 \text{ m}$
- Μέλος (8) :  $E^8 = 2.1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ ,  $A^8 = 10 \text{ cm}^2$ ,  $L^8 = 5.0 \text{ m}$

---

# *ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ*

---

# ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ

## Μόρφωση καθολικού μητρώου στιβαρότητας μέλους επίπεδου δικτυώματος

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_1^{ij} \\ \bar{F}_2^{ij} \\ \bar{F}_1^{ik} \\ \bar{F}_2^{ik} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{k}_{11}^i & \bar{k}_{12}^i & \bar{k}_{13}^i & \bar{k}_{14}^i \\ \bar{k}_{21}^i & \bar{k}_{22}^i & \bar{k}_{23}^i & \bar{k}_{24}^i \\ \bar{k}_{31}^i & \bar{k}_{32}^i & \bar{k}_{33}^i & \bar{k}_{34}^i \\ \bar{k}_{41}^i & \bar{k}_{42}^i & \bar{k}_{43}^i & \bar{k}_{44}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1^{ij} \\ \bar{u}_2^{ij} \\ \bar{u}_1^{ik} \\ \bar{u}_2^{ik} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \left\{ \bar{A}^{ij} \right\} \\ \left\{ \bar{A}^{ik} \right\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[ \bar{k}_{jj}^i \right] & \left[ \bar{k}_{jk}^i \right] \\ \left[ \bar{k}_{kj}^i \right] & \left[ \bar{k}_{kk}^i \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left\{ \bar{D}^{ij} \right\} \\ \left\{ \bar{D}^{ik} \right\} \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \bar{A}^i \right\} = \left[ \bar{k}^i \right] \left\{ \bar{D}^i \right\}$$

$$\begin{aligned} \left\{ A^i \right\} &= \left[ k^i \right] \left\{ D^i \right\} \Rightarrow \left[ \Lambda_{PT}^i \right] \left\{ \bar{A}^i \right\} = \left[ k^i \right] \left[ \Lambda_{PT}^i \right] \left\{ \bar{D}^i \right\} \\ &\Rightarrow \left\{ \bar{A}^i \right\} = \left[ \Lambda_{PT}^i \right]^T \left[ k^i \right] \left[ \Lambda_{PT}^i \right] \left\{ \bar{D}^i \right\} \\ &\Rightarrow \left[ \bar{k}^i \right] = \left[ \Lambda_{PT}^i \right]^T \left[ k^i \right] \left[ \Lambda_{PT}^i \right] \end{aligned}$$

το τυχόν στοιχείο  $\bar{k}_{mn}^i$  του καθολικού μητρώου στιβαρότητας του μέλους  $i$  δηλώνει την αναπτυσσόμενη καθολική ακραία δράση κατά τον καθολικό βαθμό ελευθερίας  $m$  όταν επιβληθεί μοναδιαία και μοναδική ακραία μετακίνηση κατά τον καθολικό βαθμό ελευθερίας  $n$  του μέλους  $i$ , δηλαδή με ταυτόχρονο μηδενισμό των υπόλοιπων τοπικών βαθμών ελευθερίας του μέλους.

# ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΗΤΡΩΩΝ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ

- Κάθε μητρώο στιβαρότητας είναι **συμμετρικό**, δηλαδή  $k_{mm} > 0$ . Η ιδιότητα αυτή επιβεβαιώνεται από την αρχή της αμοιβαιότητας των έργων Betti-Maxwell.

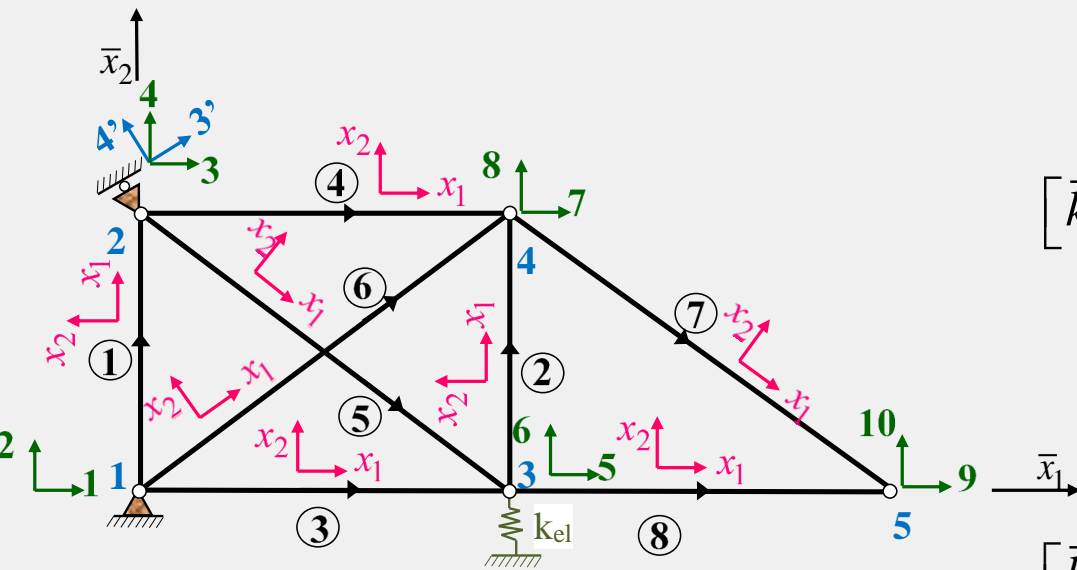
# ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΗΤΡΩΩΝ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ

- Κάθε μητρώο στιβαρότητας είναι **συμμετρικό**, δηλαδή  $k_{mm} > 0$  . Η ιδιότητα αυτή επιβεβαιώνεται από την αρχή της αμοιβαιότητας των έργων Betti-Maxwell.
- Τα **διαγώνια στοιχεία** μητρώου στιβαρότητας είναι πάντα **θετικά**  $k_{mm} > 0$  . Επίσης, τα **διαγώνια στοιχεία** μητρώου στιβαρότητας είναι **μη μηδενικά**. Κατ' εξαίρεση το τοπικό μητρώο στιβαρότητας μέλους δικτυώματος και πιθανόν αυτό του αντίστοιχου καθολικού, εμφανίζει μηδενικά στοιχεία σε διαγώνιες θέσεις (δεν ορίζεται τέμνουσα δύναμη σε μέλος δικτυώματος).

# ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΗΤΡΩΩΝ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ

- Κάθε μητρώο στιβαρότητας είναι **συμμετρικό**, δηλαδή  $k_{mm} > 0$ . Η ιδιότητα αυτή επιβεβαιώνεται από την αρχή της αμοιβαιότητας των έργων Betti-Maxwell.
- Τα **διαγώνια στοιχεία** μητρώου στιβαρότητας είναι πάντα **θετικά**  $k_{mm} > 0$ . Επίσης, τα **διαγώνια στοιχεία** μητρώου στιβαρότητας είναι **μη μηδενικά**. Κατ' εξαίρεση το τοπικό μητρώο στιβαρότητας μέλους δικτυώματος και πιθανόν αυτό του αντίστοιχου καθολικού, εμφανίζει μηδενικά στοιχεία σε διαγώνιες θέσεις (δεν ορίζεται τέμνουσα δύναμη σε μέλος δικτυώματος).
- Η **ορίζουσα μητρώου στιβαρότητας είναι μηδενική**. Το φυσικό νόημα της ιδιότητας αυτής γίνεται αντιληπτό από το γεγονός ότι κατά τη μόρφωση του μητρώου στιβαρότητας του στοιχείου ή φορέα δεν έχει ληφθεί υπόψη ο τρόπος στήριξης του (στερεό σώμα).

# Εφαρμογή - ΚΑΘΟΛΙΚΑ ΜΗΤΡΩΑ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΜΕΛΩΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ



Καθολικά μητρώα στιβαρότητας μελών

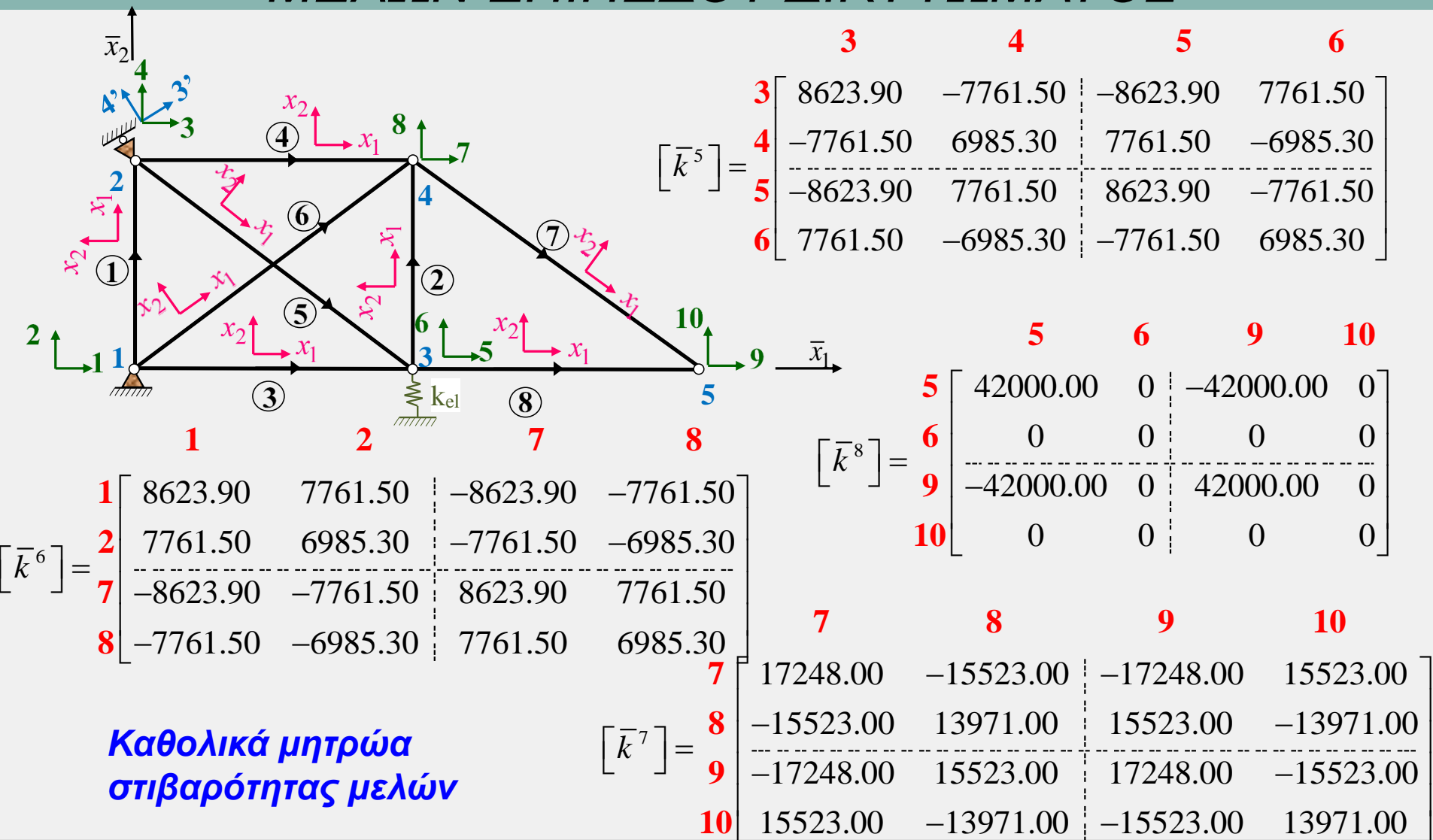
$$[\bar{k}^3] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 42000.00 & 0 & -42000.00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -42000.00 & 0 & 42000.00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$[\bar{k}^1] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 46666.67 & 0 & -46666.67 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -46666.67 & 0 & 46666.67 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$[\bar{k}^2] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 46666.67 & 0 & -46666.67 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -46666.67 & 0 & 46666.67 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$[\bar{k}^4] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 42000.00 & 0 & -42000.00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -42000.00 & 0 & 42000.00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

# Εφαρμογή - ΚΑΘΟΛΙΚΑ ΜΗΤΡΩΑ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΜΕΛΩΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ



---

# ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΕΠΙΚΟΜΒΙΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ

---

# ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΕΠΙΚΟΜΒΙΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ

**Συνιστώσες των επικόμβιων δράσεων και επικόμβιων μετατοπίσεων των  $N$  κόμβων δικτυώματος**

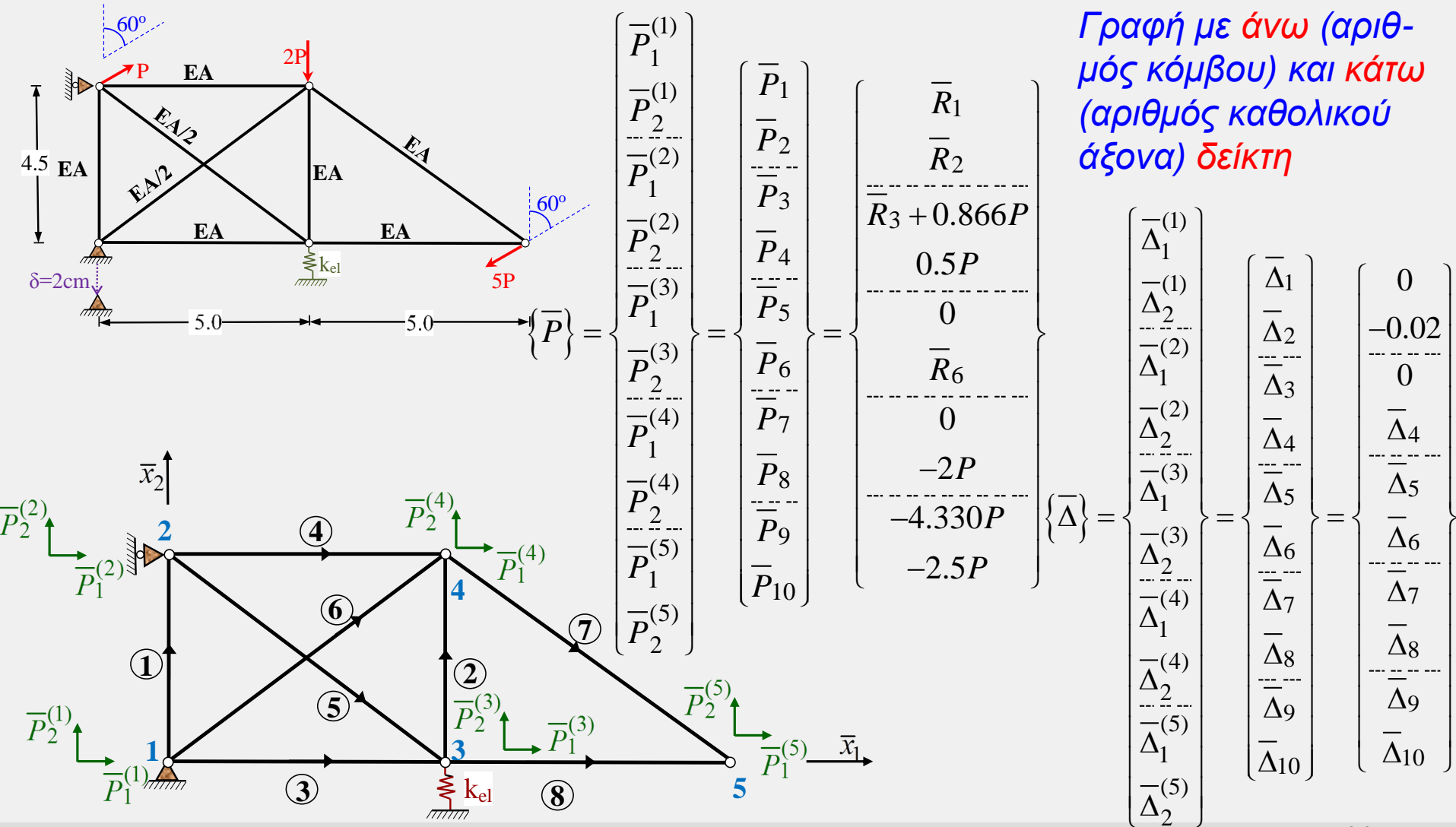
$$\{\bar{P}\} = \begin{bmatrix} \{\bar{P}^{(1)}\} \\ \{\bar{P}^{(2)}\} \\ \vdots \\ \{\bar{P}^{(N)}\} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1^{(1)} \\ \bar{P}_2^{(1)} \\ \hline \bar{P}_1^{(2)} \\ \bar{P}_2^{(2)} \\ \vdots \\ \bar{P}_1^{(N)} \\ \bar{P}_2^{(N)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \hline \bar{P}_3 \\ \bar{P}_4 \\ \vdots \\ \bar{P}_{2N-1} \\ \bar{P}_{2N} \end{Bmatrix}$$

**Εναλλακτικές μορφές  
γραφής διανυσμάτων**

$$\{\bar{\Delta}\} = \begin{bmatrix} \{\bar{\Delta}^{(1)}\} \\ \{\bar{\Delta}^{(2)}\} \\ \vdots \\ \{\bar{\Delta}^{(N)}\} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(1)} \\ \bar{\Delta}_2^{(1)} \\ \hline \bar{\Delta}_1^{(2)} \\ \bar{\Delta}_2^{(2)} \\ \vdots \\ \bar{\Delta}_1^{(N)} \\ \bar{\Delta}_2^{(N)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \hline \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \vdots \\ \bar{\Delta}_{2N-1} \\ \bar{\Delta}_{2N} \end{Bmatrix}$$

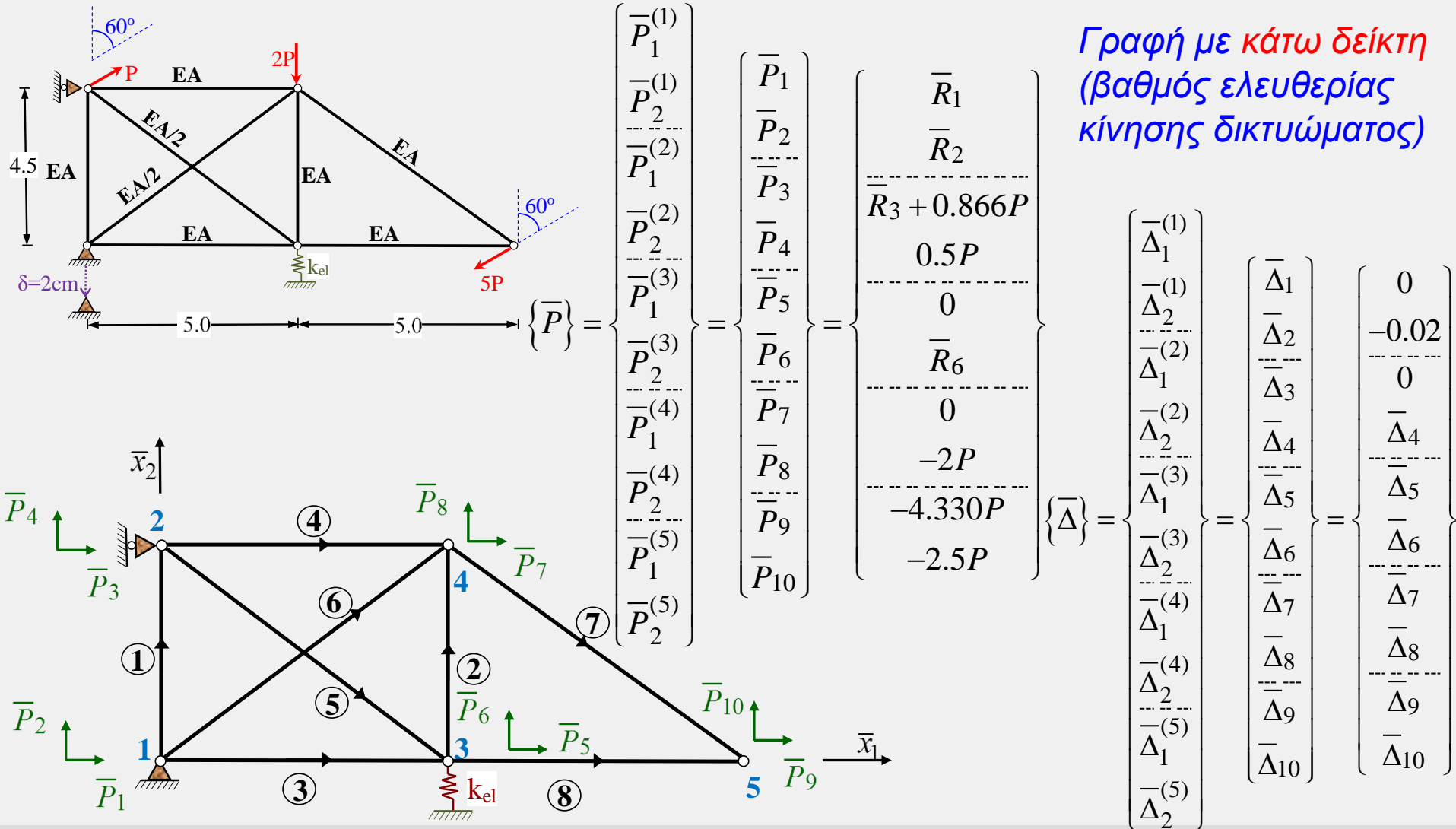
Από τις **μετατοπίσεις** των κόμβων κάποιες είναι **γνωστές** και οι υπόλοιπες **άγνωστες**, ανάλογα με το εάν οι αντίστοιχοι βαθμοί ελευθερίας κόμβου είναι **δεσμευμένοι** ή **ελεύθεροι**. Αντίστοιχα, υπάρχουν **γνωστές δράσεις**, που είναι τα εξωτερικά φορτία των κόμβων και **άγνωστες**, που είναι οι αντιδράσεις στις στηρίξεις τους.

# Εφαρμογή - ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΕΠΙΚΟΜΒΙΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ



Γραφή με **άνω** (αριθμός κόμβου) και **κάτω** (αριθμός καθολικού άξονα) **δείκτη**

# Εφαρμογή - ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΕΠΙΚΟΜΒΙΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ



Γραφή με **κάτω δείκτη**  
(βαθμός ελευθερίας  
κίνησης δικτυώματος)

---

# *ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ*

---

# ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ

**Μόρφωση καθολικού μητρώου στιβαρότητας φορέα επίπεδου δικτυώματος**

$$\begin{bmatrix} \{\bar{P}^{(1)}\} \\ \{\bar{P}^{(2)}\} \\ \vdots \\ \{\bar{P}^{(N)}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{11}] & [\bar{K}_{12}] & \dots & [\bar{K}_{1,N}] \\ [\bar{K}_{21}] & [\bar{K}_{22}] & \dots & [\bar{K}_{2,N}] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [\bar{K}_{N,1}] & [\bar{K}_{N,2}] & \dots & [\bar{K}_{N,N}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\bar{\Delta}^{(1)}\} \\ \{\bar{\Delta}^{(2)}\} \\ \vdots \\ \{\bar{\Delta}^{(N)}\} \end{bmatrix} \quad [\bar{K}_{nm}] = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11}^{nm} & \bar{K}_{12}^{nm} \\ \bar{K}_{21}^{nm} & \bar{K}_{22}^{nm} \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \{\bar{P}^{(n)}\} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1^{(n)} \\ \bar{P}_2^{(n)} \end{Bmatrix} \\ \{\bar{\Delta}^{(m)}\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(m)} \\ \bar{\Delta}_2^{(m)} \end{Bmatrix} \end{cases}$$

$$\{\bar{P}\} = [\bar{K}]\{\bar{\Delta}\}$$

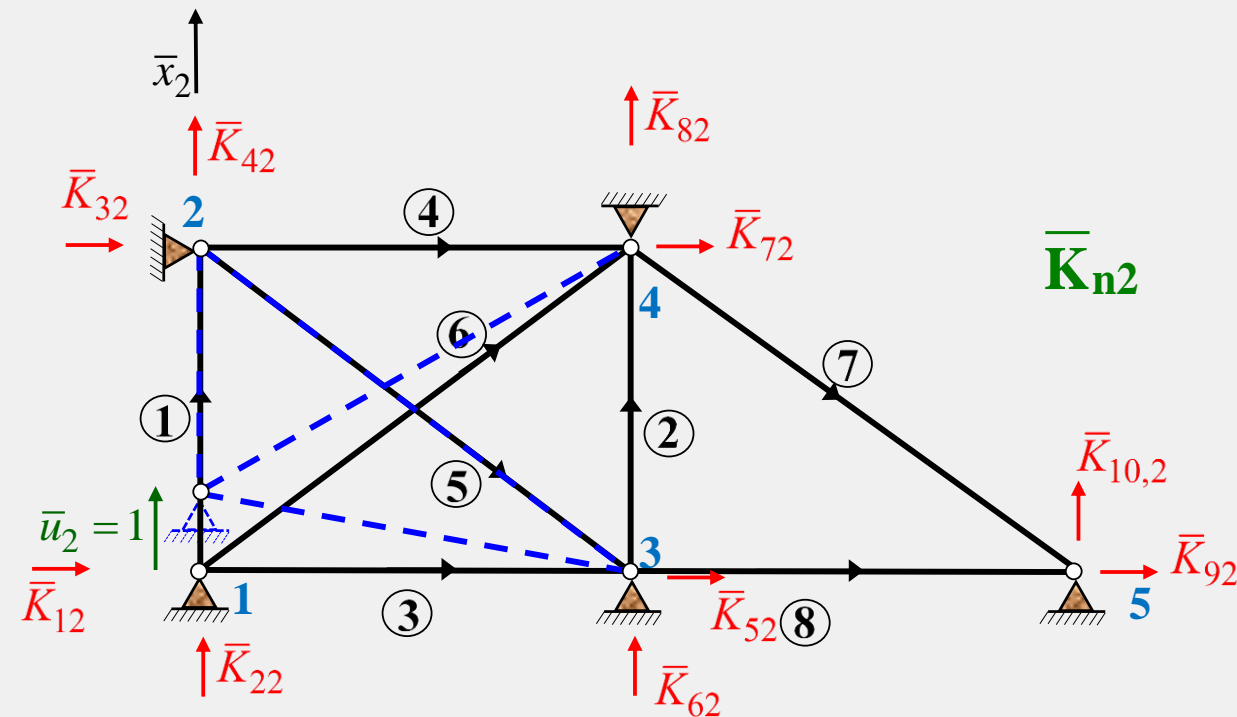
$$\begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \hline \bar{P}_3 \\ \bar{P}_4 \\ \hline \vdots \\ \hline \bar{P}_{2N-1} \\ \bar{P}_{2N} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} & \bar{K}_{13} & \bar{K}_{14} & \dots & \bar{K}_{1,2N-1} & \bar{K}_{1,2N} \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} & \bar{K}_{23} & \bar{K}_{24} & \dots & \bar{K}_{2,2N-1} & \bar{K}_{2,2N} \\ \hline \bar{K}_{31} & \bar{K}_{32} & \bar{K}_{33} & \bar{K}_{34} & \dots & \bar{K}_{3,2N-1} & \bar{K}_{3,2N} \\ \bar{K}_{41} & \bar{K}_{42} & \bar{K}_{43} & \bar{K}_{44} & \dots & \bar{K}_{4,2N-1} & \bar{K}_{4,2N} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \hline \bar{K}_{2N-1,1} & \bar{K}_{2N-1,2} & \bar{K}_{2N-1,3} & \bar{K}_{2N-1,4} & \dots & \bar{K}_{2N-1,2N-1} & \bar{K}_{2N-1,2N} \\ \bar{K}_{2N,1} & \bar{K}_{2N,2} & \bar{K}_{2N,3} & \bar{K}_{2N,4} & \dots & \bar{K}_{2N,2N-1} & \bar{K}_{2N,2N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \hline \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \hline \vdots \\ \hline \bar{\Delta}_{2N-1} \\ \bar{\Delta}_{2N} \end{Bmatrix}$$

**Καθολικό  
μητρώο  
στιβαρό-  
τητας  
φορέα**

# ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ

Στοιχεία καθολικού μητρώου στιβαρότητας φορέα επίπεδου δικτυώματος

$$\left\{ \bar{P}^{(n)} \right\} = \left[ \bar{K}_{n1} \right] \left\{ \bar{\Delta}^{(1)} \right\} + \left[ \bar{K}_{n2} \right] \left\{ \bar{\Delta}^{(2)} \right\} + \dots + \left[ \bar{K}_{nm} \right] \left\{ \bar{\Delta}^{(m)} \right\} + \dots + \left[ \bar{K}_{n,N} \right] \left\{ \bar{\Delta}^{(N)} \right\}$$



$$\left\{ \bar{\Delta}^{(m)} \right\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(m)} \\ \bar{\Delta}_2^{(m)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ \bar{\Delta}^{(k)} \right\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(k)} \\ \bar{\Delta}_2^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

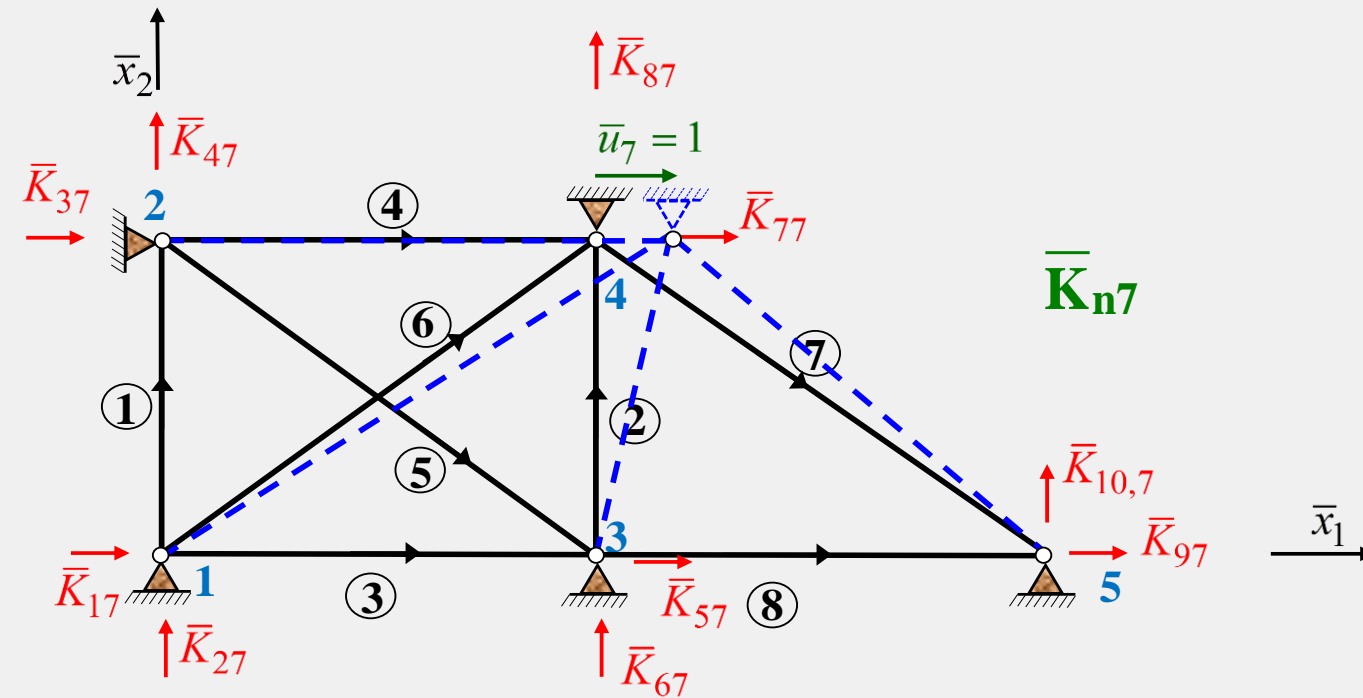
$$k=1,2,\dots,N, \quad k \neq m$$

$$\xrightarrow{\bar{x}_1} \left\{ \bar{P}^{(n)} \right\} = \left[ \bar{K}_{nm} \right] \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

# ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ

Στοιχεία καθολικού μητρώου στιβαρότητας φορέα επίπεδου δικτυώματος

$$\left\{ \bar{P}^{(n)} \right\} = \left[ \bar{K}_{n1} \right] \left\{ \bar{\Delta}^{(1)} \right\} + \left[ \bar{K}_{n2} \right] \left\{ \bar{\Delta}^{(2)} \right\} + \dots + \left[ \bar{K}_{nm} \right] \left\{ \bar{\Delta}^{(m)} \right\} + \dots + \left[ \bar{K}_{n,N} \right] \left\{ \bar{\Delta}^{(N)} \right\}$$



$$\left\{ \bar{\Delta}^{(m)} \right\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(m)} \\ \bar{\Delta}_2^{(m)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ \bar{\Delta}^{(k)} \right\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(k)} \\ \bar{\Delta}_2^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

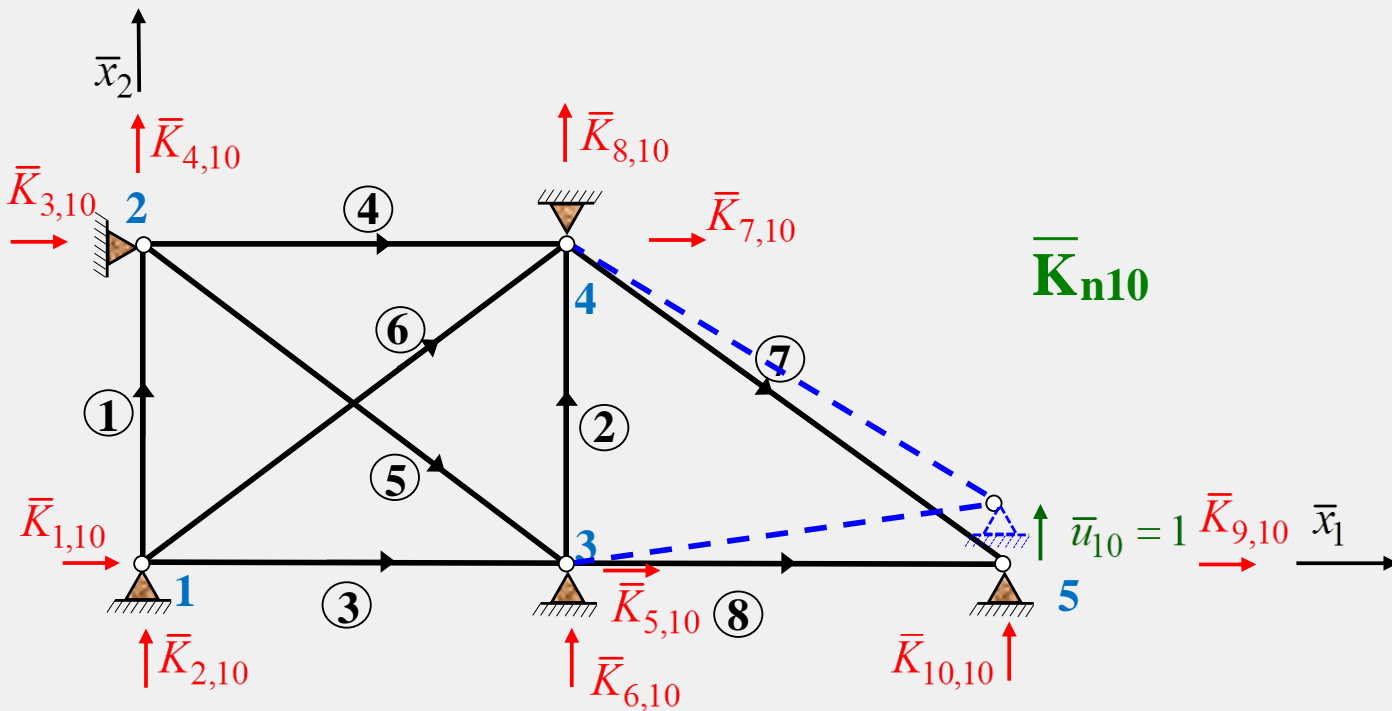
$$k=1,2,\dots,N, \quad k \neq m$$

$$\left\{ \bar{P}^{(n)} \right\} = \left[ \bar{K}_{nm} \right] \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

# ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ

Στοιχεία καθολικού μητρώου στιβαρότητας φορέα επίπεδου δικτυώματος

$$\left\{ \bar{P}^{(n)} \right\} = \left[ \bar{K}_{n1} \right] \left\{ \bar{\Delta}^{(1)} \right\} + \left[ \bar{K}_{n2} \right] \left\{ \bar{\Delta}^{(2)} \right\} + \dots + \left[ \bar{K}_{nm} \right] \left\{ \bar{\Delta}^{(m)} \right\} + \dots + \left[ \bar{K}_{n,N} \right] \left\{ \bar{\Delta}^{(N)} \right\}$$



$$\left\{ \bar{\Delta}^{(m)} \right\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(m)} \\ \bar{\Delta}_2^{(m)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ \bar{\Delta}^{(k)} \right\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(k)} \\ \bar{\Delta}_2^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$k=1,2,\dots,N, \quad k \neq m$$

$$\left\{ \bar{P}^{(n)} \right\} = \left[ \bar{K}_{nm} \right] \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

# ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ

Διατύπωση μητρωικών εξισώσεων ισορροπίας που συνθέτουν το καθολικό μητρώο στιβαρότητας φορέα επίπεδου δικτύωματος

$\{\bar{\Delta}^{(4)}\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(4)} \\ \bar{\Delta}_2^{(4)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \end{Bmatrix}$

$\{\bar{P}^{(4)}\} - \{\bar{A}^{2k}\} - \{\bar{A}^{4k}\} - \{\bar{A}^{6k}\} - \{\bar{A}^{7j}\} = \{0\}$

$\{\bar{A}^{2k}\} = [\bar{k}_{kj}^2] \{\bar{D}^{2j}\} + [\bar{k}_{kk}^2] \{\bar{D}^{2k}\}$

$\{\bar{A}^{4k}\} = [\bar{k}_{kj}^4] \{\bar{D}^{4j}\} + [\bar{k}_{kk}^4] \{\bar{D}^{4k}\}$

$\{\bar{A}^{6k}\} = [\bar{k}_{kj}^6] \{\bar{D}^{6j}\} + [\bar{k}_{kk}^6] \{\bar{D}^{6k}\}$

$\{\bar{A}^{7j}\} = [\bar{k}_{jj}^7] \{\bar{D}^{7j}\} + [\bar{k}_{jk}^7] \{\bar{D}^{7k}\}$

$\{\bar{\Delta}^{(4)}\} = \{\bar{D}^{2k}\} = \{\bar{D}^{4k}\} = \{\bar{D}^{6k}\} = \{\bar{D}^{7j}\}$

$\{\bar{\Delta}^{(3)}\} = \{\bar{D}^{2j}\} \quad \{\bar{\Delta}^{(5)}\} = \{\bar{D}^{7j}\} \quad \{\bar{\Delta}^{(1)}\} = \{\bar{D}^{6j}\} \quad \{\bar{\Delta}^{(2)}\} = \{\bar{D}^{4j}\}$

$\{\bar{P}^{(4)}\} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1^{(4)} \\ \bar{P}_2^{(4)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2P \end{Bmatrix}$

$\{\bar{P}^{(4)}\} = [\bar{k}_{kj}^2] \{\bar{\Delta}^{(3)}\} + [\bar{k}_{kk}^2] \{\bar{\Delta}^{(4)}\} + [\bar{k}_{kj}^4] \{\bar{\Delta}^{(2)}\} + [\bar{k}_{kk}^4] \{\bar{\Delta}^{(4)}\} + [\bar{k}_{kj}^6] \{\bar{\Delta}^{(1)}\} + [\bar{k}_{kk}^6] \{\bar{\Delta}^{(4)}\} + [\bar{k}_{jj}^7] \{\bar{\Delta}^{(4)}\} + [\bar{k}_{jk}^7] \{\bar{\Delta}^{(5)}\} + \left( [\bar{k}_{kk}^2] + [\bar{k}_{kk}^4] + [\bar{k}_{kk}^6] + [\bar{k}_{jj}^7] \right) \{\bar{\Delta}^{(4)}\} + [\bar{k}_{jk}^7] \{\bar{\Delta}^{(5)}\}$

# ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ

## Βήματα σύνθεσης του καθολικού μητρώου στιβαρότητας φορέα

Η **σύνθεση** του καθολικού μητρώου στιβαρότητας  $[\bar{K}]$  του επίπεδου δικτυώματος **βασίζεται στις εξισώσεις ισορροπίας των κόμβων του** (λαμβάνοντας υπόψη το συμβιβαστό των μετατοπίσεων τους). Για τη σύνθεση αυτή ακολουθούνται τα πιο κάτω βήματα

- 1) Για κάθε **μέλος** του δικτυώματος **υπολογίζεται το καθολικό μητρώο στιβαρότητας** με τη βοήθεια της σχέσης  $[\bar{k}^i] = [\Lambda_{PT}^i]^T [k^i] [\Lambda_{PT}^i]$ ,

με τη μορφή

$$\begin{bmatrix} \{ \bar{A}^{ij} \} \\ \{ \bar{A}^{ik} \} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{k}_{jj}^i] & [\bar{k}_{jk}^i] \\ [\bar{k}_{kj}^i] & [\bar{k}_{kk}^i] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{ \bar{D}^{ij} \} \\ \{ \bar{D}^{ik} \} \end{bmatrix}$$

δηλαδή επιμερίζοντας το μητρώο αυτό σε 4 υπομητρώα (2X2).

- 2) Κάθε ένα από τα 4 προαναφερθέντα **υπομητρώα** του μέλους **μεταφέρεται** στο καθολικό μητρώο στιβαρότητας της σχέσης

$$\begin{bmatrix} \{ \bar{P}^{(1)} \} \\ \{ \bar{P}^{(2)} \} \\ \vdots \\ \{ \bar{P}^{(N)} \} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{11}] & [\bar{K}_{12}] & \dots & [\bar{K}_{1,N}] \\ [\bar{K}_{21}] & [\bar{K}_{22}] & \dots & [\bar{K}_{2,N}] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [\bar{K}_{N,1}] & [\bar{K}_{N,2}] & \dots & [\bar{K}_{N,N}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{ \bar{\Delta}^{(1)} \} \\ \{ \bar{\Delta}^{(2)} \} \\ \vdots \\ \{ \bar{\Delta}^{(N)} \} \end{bmatrix}$$

# ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ

## Βήματα σύνθεσης του καθολικού μητρώου στιβαρότητας φορέα

2) Κάθε ένα από τα 4 προαναφερθέντα υπομητρώα του μέλους μεταφέρεται στο καθολικό μητρώο στιβαρότητας της σχέσης

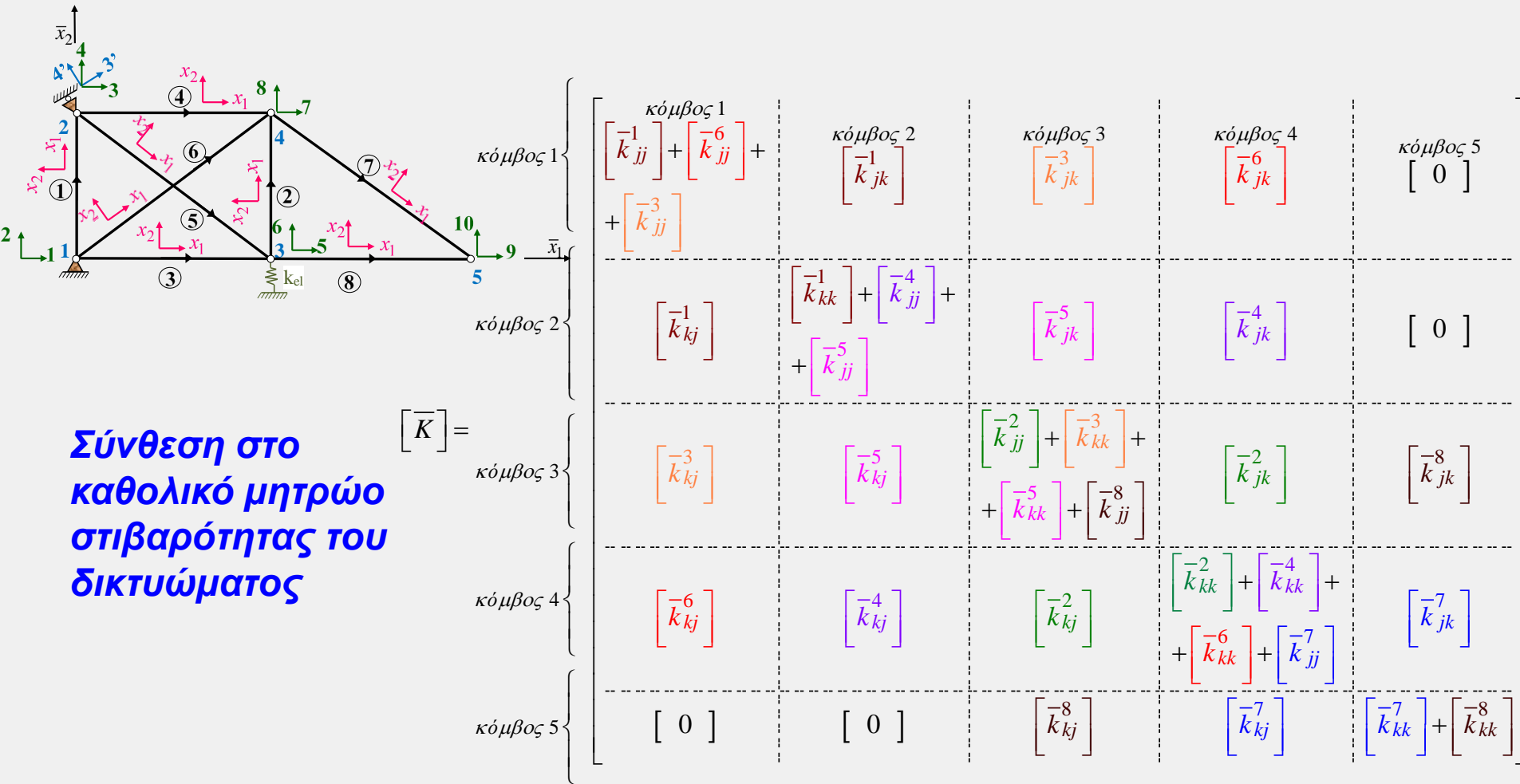
$$\begin{Bmatrix} \bar{P}^{(1)} \\ \bar{P}^{(2)} \\ \vdots \\ \bar{P}^{(N)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} & \dots & \bar{K}_{1,N} \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} & \dots & \bar{K}_{2,N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{K}_{N,1} & \bar{K}_{N,2} & \dots & \bar{K}_{N,N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}^{(1)} \\ \bar{\Delta}^{(2)} \\ \vdots \\ \bar{\Delta}^{(N)} \end{Bmatrix} \text{ ως}$$

το  $\begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^i \end{bmatrix}$  στη γραμμή με αύξοντα αριθμό τον αριθμό του κόμβου αρχής και στη στήλη με αύξοντα αριθμό τον αριθμό του κόμβου αρχής του μέλους

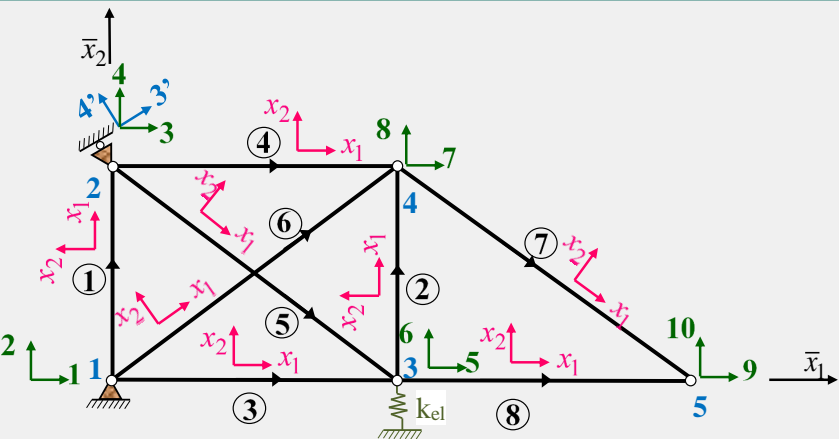
το  $\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^i \end{bmatrix}$  στη γραμμή με αύξοντα αριθμό τον αριθμό του κόμβου αρχής και στη στήλη με αύξοντα αριθμό τον αριθμό του κόμβου πέρατος του μέλους κ.ο.κ.

3) Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να ολοκληρωθεί για όλα τα μέλη του δικτυώματος, με την παρατήρηση ότι σε περίπτωση που στην ίδια θέση καταλήγουν περισσότερα του ενός μητρώα, αυτά αθροίζονται.

# Εφαρμογή - ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ



# Εφαρμογή - ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ



Καθολικό μητρώο  
στιβαρότητας δικτυώματος

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} 50623.90 & & & & & & & & & \\ 7761.50 & 53651.97 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 50623.90 & & & & & & & \\ 0 & -46666.67 & -7761.50 & 53651.97 & & & & & & \\ -42000.00 & 0 & -8623.90 & 7761.50 & 92623.90 & & & & & \\ 0 & 0 & 7761.50 & -6985.30 & -7761.50 & 53651.97 & & & & \\ -8623.90 & -7761.50 & -42000.00 & 0 & 0 & 0 & 67871.90 & & & \\ -7761.50 & -6985.30 & 0 & 0 & 0 & -46666.67 & -7761.50 & 67622.97 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -42000.00 & 0 & -17248.00 & 15523.00 & 59248.00 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15523.00 & -13971.00 & -15523.00 & 13971.00 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

---

*ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΗ (ΑΝΑΔΙΑΤΑΞΗ)  
ΚΑΘΟΛΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ  
ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ ΛΟΓΩ  
ΣΤΗΡΙΞΗΣ – ΜΗΤΡΩΟ ΑΝΑΔΙΑΤΑΞΗΣ*

---

# ΑΝΑΔΙΑΤΑΞΗ ΒΑΘΜΩΝ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ

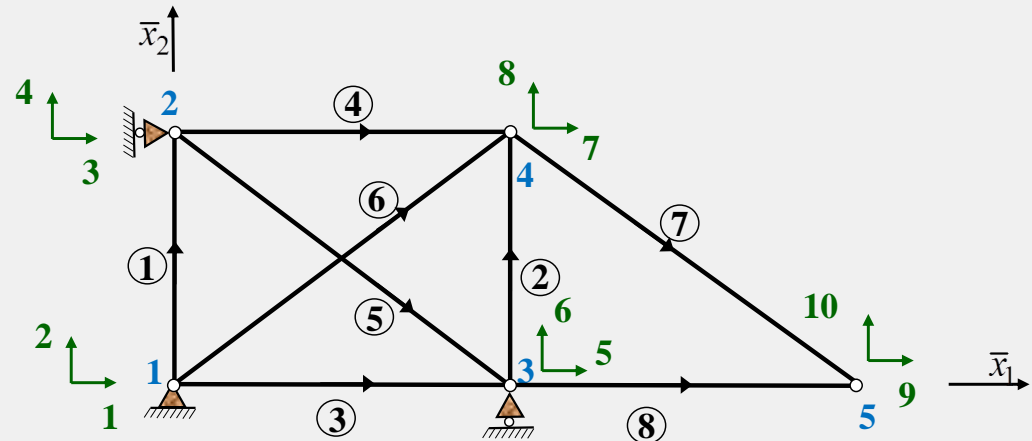
Η **μεθοδολογία διαχωρισμού των γνωστών από τα άγνωστα μεγέθη** στα διανύσματα ολικών επικόμβιων δράσεων και ολικών επικόμβιων μετατοπίσεων επιτυγχάνεται με τη μετάθεση στοιχείων στα διανύσματα αυτά ή όπως αλλιώς καλείται **αναδιάταξη των διανυσμάτων** αυτών. Πιο συγκεκριμένα επιδιώκεται η αναδιάταξη των στοιχείων των διανυσμάτων επικόμβιων δράσεων και επικόμβιων μετατοπίσεων, έτσι ώστε και στα δύο διανύσματα **να προηγούνται οι ελεύθεροι βαθμοί ελευθερίας** (γνωστές επικόμβιες δράσεις και άγνωστες επικόμβιες μετατοπίσεις) **και να έπονται οι δεσμευμένοι βαθμοί ελευθερίας** (άγνωστες επικόμβιες δράσεις και γνωστές επικόμβιες μετατοπίσεις). Είναι προφανές ότι η προαναφερθείσα αναδιάταξη θα έχει ως άμεσο αποτέλεσμα και την απαιτούμενη τροποποίηση του καθολικού μητρώου στιβαρότητας του δικτυώματος.

**Αρχική αρίθμηση β.ε.**

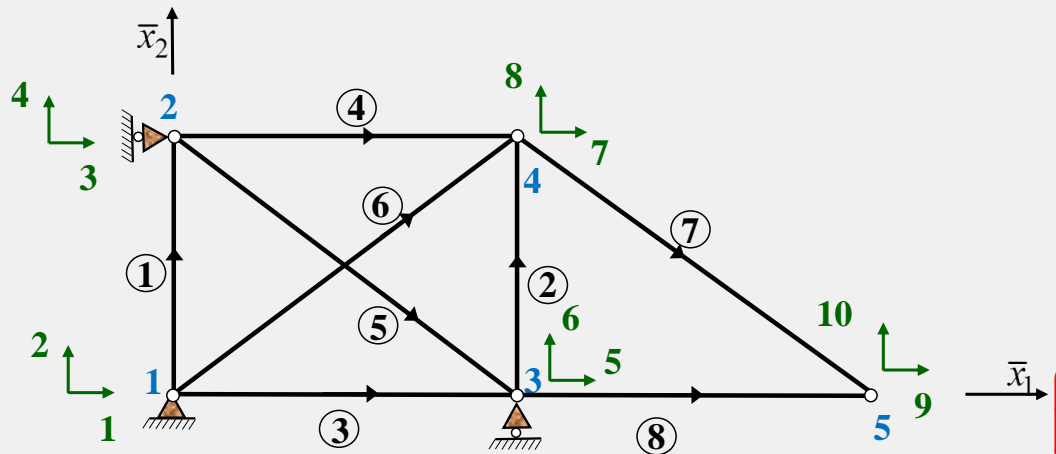
{ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 }

**Τελική αρίθμηση β.ε.**

{ 4 5 7 8 9 10 | 1 2 3 6 }



# ΜΟΡΦΩΣΗ ΜΗΤΡΩΟΥ ΑΝΑΔΙΑΤΑΞΗΣ



**Μητρώο  
αναδιάταξης  
δικτυώματος**

**Τροποποιημένα  
(λόγω αναδιάταξης)  
διανύσματα  
επικόμβιων δράσεων  
και μετατοπίσεων  
δικτυώματος**

$$\{\bar{P}_m\} = [V] \{\bar{P}\}$$

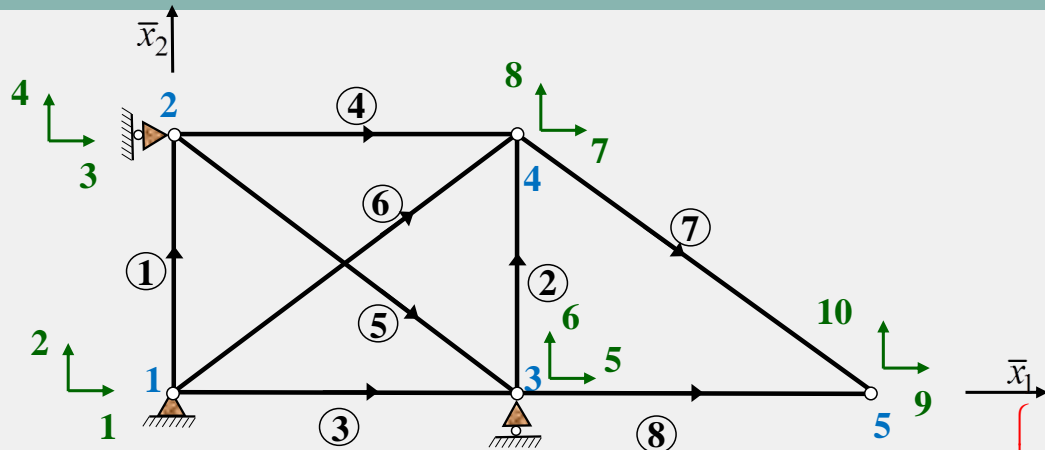
$$\{\bar{\Delta}_m\} = [V] \{\bar{\Delta}\}$$

*ελεύθεροι  
βαθμοί  
( free )*

*δεσμευμένοι  
βαθμοί  
( supported )*

$$\begin{Bmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ \hline 1 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ \hline 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{Bmatrix}$$

# ΑΝΑΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΕΠΙΚΟΜΒΙΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ



Τροποποιημένο (λόγω αναδιάταξης) διάνυσμα επικόμβιων δράσεων δικτυώματος

$$\{\bar{P}_m\} = [V] \{\bar{P}\}$$

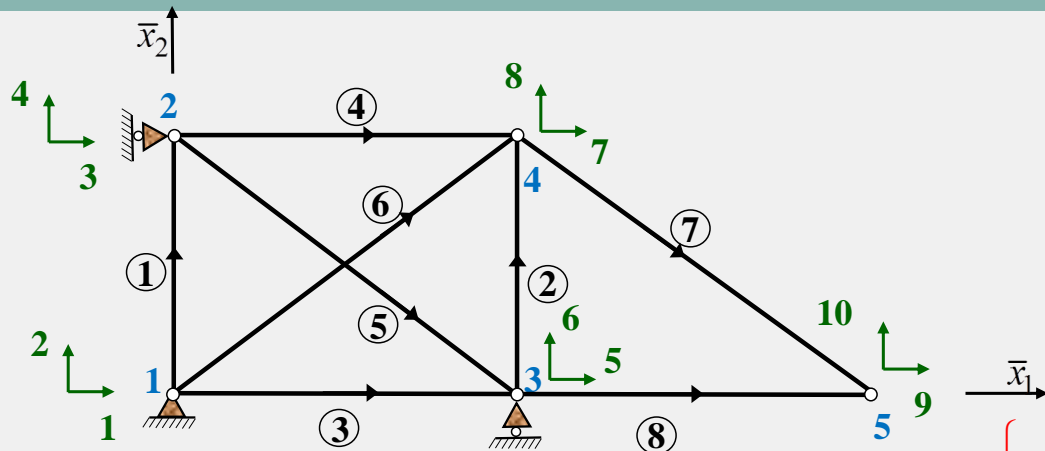
$$\{\bar{P}\} = [V]^T \{\bar{P}_m\}$$

ελεύθεροι  
βαθμοί  
(free)

δεσμευμένοι  
βαθμοί  
(supported)

$$\begin{Bmatrix} \bar{P}_4 \\ \bar{P}_5 \\ \bar{P}_7 \\ \bar{P}_8 \\ \bar{P}_9 \\ \bar{P}_{10} \\ \hline \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_3 \\ \bar{P}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_3 \\ \bar{P}_4 \\ \bar{P}_5 \\ \bar{P}_6 \\ \hline \bar{P}_7 \\ \bar{P}_8 \\ \bar{P}_9 \\ \bar{P}_{10} \end{Bmatrix}$$

# ΑΝΑΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΕΠΙΚΟΜΒΙΩΝ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ



Τροποποιημένο (λόγω  
αναδιάταξης) διάνυσμα  
επικόμβιων μετατοπίσεων  
δικτυώματος

$$\{\bar{\Delta}_m\} = [V] \{\bar{\Delta}\}$$

$$\{\bar{\Delta}\} = [V]^T \{\bar{\Delta}_m\}$$

ελεύθεροι  
βαθμοί  
( free )

δεσμευμένοι  
βαθμοί  
( supported )

$$\begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \bar{\Delta}_{10} \\ \hline \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \hline \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \bar{\Delta}_{10} \end{Bmatrix}$$

# ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΗ (ΑΝΑΔΙΑΤΑΞΗ) ΚΑΘΟΛΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ

Είναι προφανές ότι η **προαναφερθείσα αναδιάταξη** θα έχει ως άμεσο αποτέλεσμα και την **απαιτούμενη τροποποίηση του καθολικού μητρώου στιβαρότητας** του δικτυώματος.

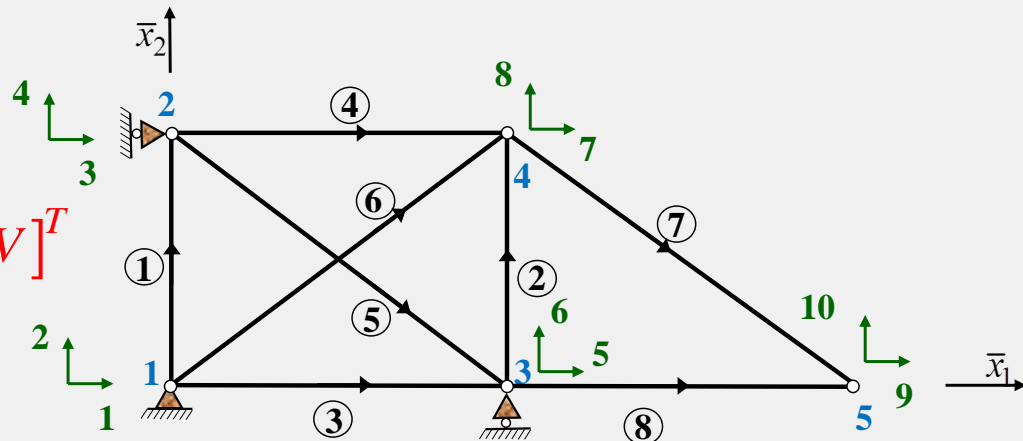
$$\begin{aligned} \{\bar{P}\} &= [V]^T \{\bar{P}_m\} \\ \{\bar{\Delta}\} &= [V]^T \{\bar{\Delta}_m\} \end{aligned} \quad \{\bar{P}\} = [\bar{K}]\{\bar{\Delta}\} \quad \Rightarrow \quad [V]^T \{\bar{P}_m\} = [\bar{K}][V]^T \{\bar{\Delta}_m\} \quad [V][V]^T = [I] \quad \Rightarrow$$

$$\{\bar{P}_m\} = [V][\bar{K}][V]^T \{\bar{\Delta}_m\}$$

$$\{\bar{P}_m\} = [\bar{K}_m]\{\bar{\Delta}_m\}$$

**Τροποποιημένο  
(αναδιατεταγμένο)  
καθολικό μητρώο  
στιβαρότητας**

$$[\bar{K}_m] = [V][\bar{K}][V]^T$$



# ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΗ (ΑΝΑΔΙΑΤΑΞΗ) ΚΑΘΟΛΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ

**Τροποποιημένη  
(αναδιατεταγμένη)  
μητρική εξίσωση  
ισορροπίας**

$$\{\bar{P}_m\} = [\bar{K}_m] \{\bar{\Delta}_m\}$$

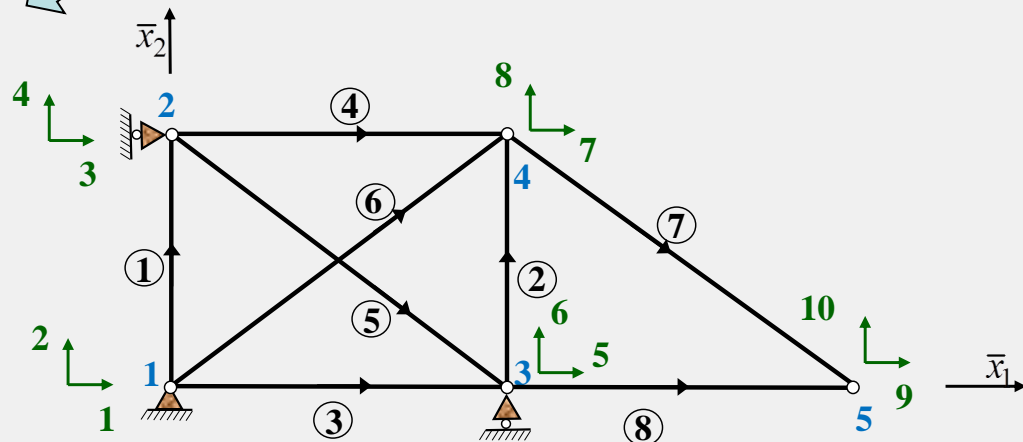
**πλήθος ελεύθερων και δεσμευμένων  
βαθμών ελευθερίας**  $N_f + N_s = 2N$

$$\begin{bmatrix} \{\bar{P}_f\} \\ \{\bar{P}_s\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{ff}] & [\bar{K}_{fs}] \\ [\bar{K}_{sf}] & [\bar{K}_{ss}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\bar{\Delta}_f\} \\ \{\bar{\Delta}_s\} \end{bmatrix}$$

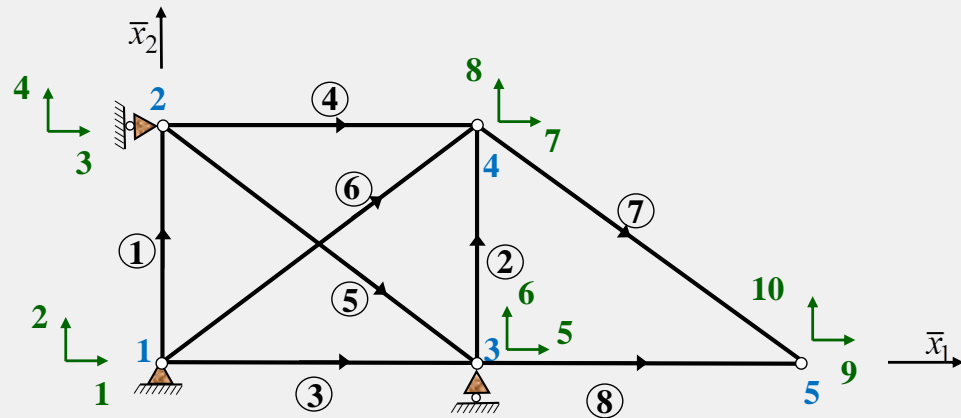
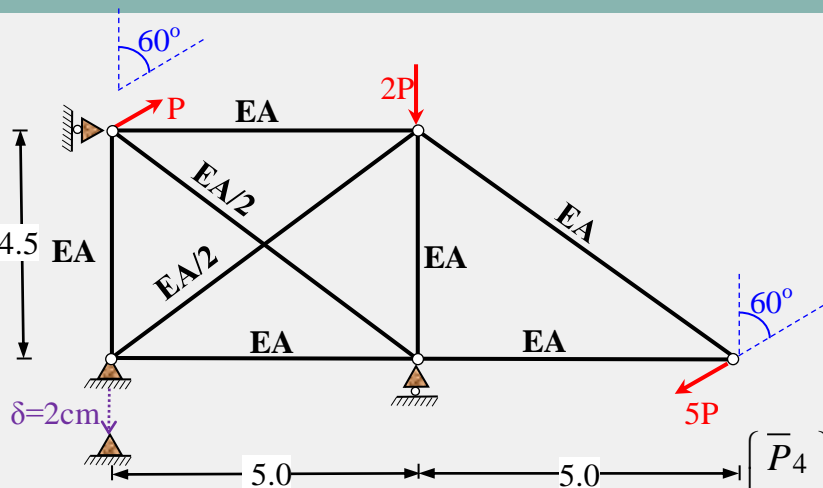
$$\begin{aligned} \{\bar{P}_f\} &= [\bar{K}_{ff}] \{\bar{\Delta}_f\} + [\bar{K}_{fs}] \{\bar{\Delta}_s\} \\ \{\bar{P}_s\} &= [\bar{K}_{sf}] \{\bar{\Delta}_f\} + [\bar{K}_{ss}] \{\bar{\Delta}_s\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\bar{\Delta}_f\} &= [\bar{K}_{ff}]^{-1} \left( \{\bar{P}_f\} - [\bar{K}_{fs}] \{\bar{\Delta}_s\} \right) \\ \{\bar{P}_s\} &= [\bar{K}_{sf}] \{\bar{\Delta}_f\} + [\bar{K}_{ss}] \{\bar{\Delta}_s\} \end{aligned}$$

**Επίλυση –  
Επικόμβιες μετατοπίσεις κατά  
τους ελεύθερους και επικόβιες  
δράσεις (αντιδράσεις) κατά τους  
δεσμευμένους β.ε.**



# Εφαρμογή - ΑΝΑΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΕΠΙΚΟΜΒΙΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ



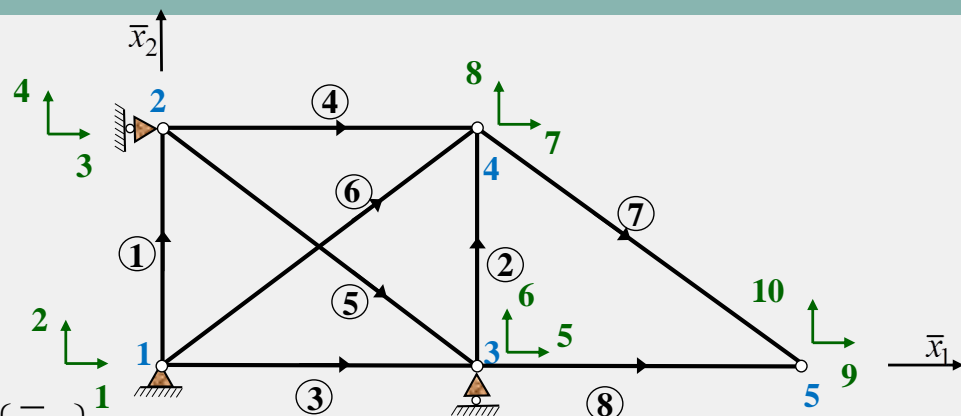
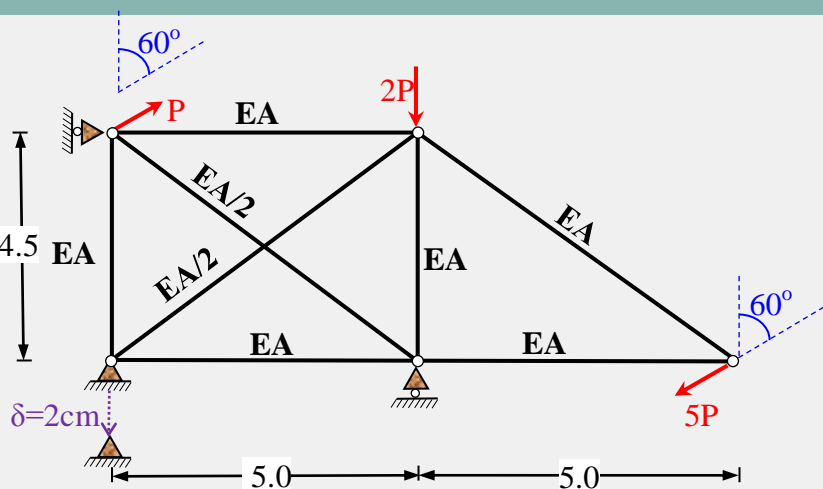
Τροποποιημένο (λόγω αναδιάταξης) διάνυσμα επικόμβιων δράσεων δικτυώματος

$$\{\bar{P}_m\} = [V]\{\bar{P}\}$$

$$\{\bar{P}\} = [V]^T\{\bar{P}_m\}$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{P}_4 \\ \bar{P}_5 \\ \bar{P}_7 \\ \bar{P}_8 \\ \bar{P}_9 \\ \bar{P}_{10} \\ \hline \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_3 \\ \bar{P}_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\bar{P}_f\} \\ \{\bar{P}_s\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5P \\ 0 \\ 0 \\ -2P \\ -4.330P \\ -2.5P \\ \hline \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \\ \bar{R}_3 + 0.866P \\ \bar{R}_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \\ \bar{R}_3 + 0.866P \\ 0.5P \\ 0 \\ \bar{R}_6 \\ 0 \\ -2P \\ -4.330P \\ -2.5P \end{Bmatrix}$$

# Εφαρμογή - ΑΝΑΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΕΠΙΚΟΜΒΙΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ



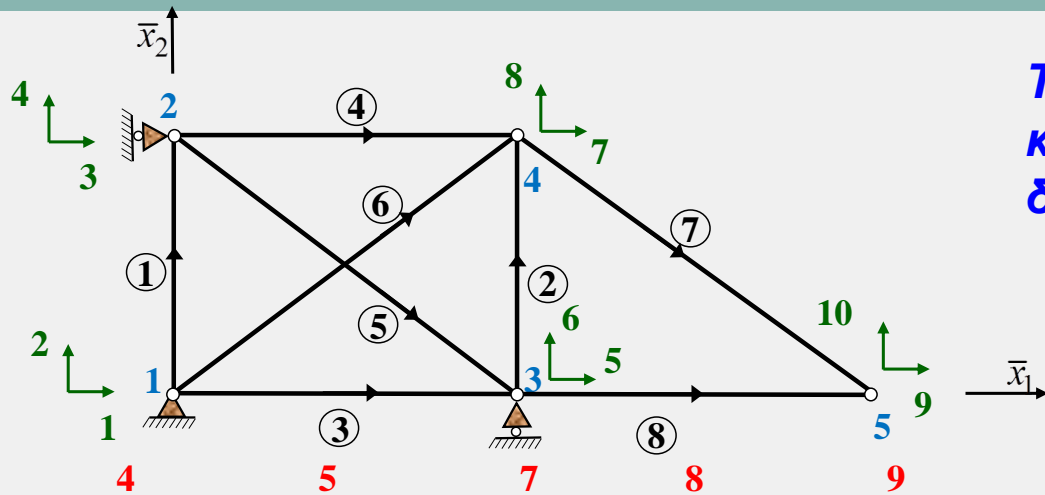
$$\begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \bar{\Delta}_{10} \\ \hline \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \bar{\Delta}_{10} \\ \hline 0 \\ -0.02 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \bar{\Delta}_{10} \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.02 \\ 0 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ 0 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \bar{\Delta}_{10} \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{\Delta}_m\} = [V]\{\bar{\Delta}\}$$

$$\{\bar{\Delta}\} = [V]^T \{\bar{\Delta}_m\}$$

Τροποποιημένο (λόγω  
αναδιάταξης) διάνυσμα  
επικόμβιων μετατοπίσεων  
δικτυώματος

# Εφαρμογή - ΑΝΑΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΟ ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ

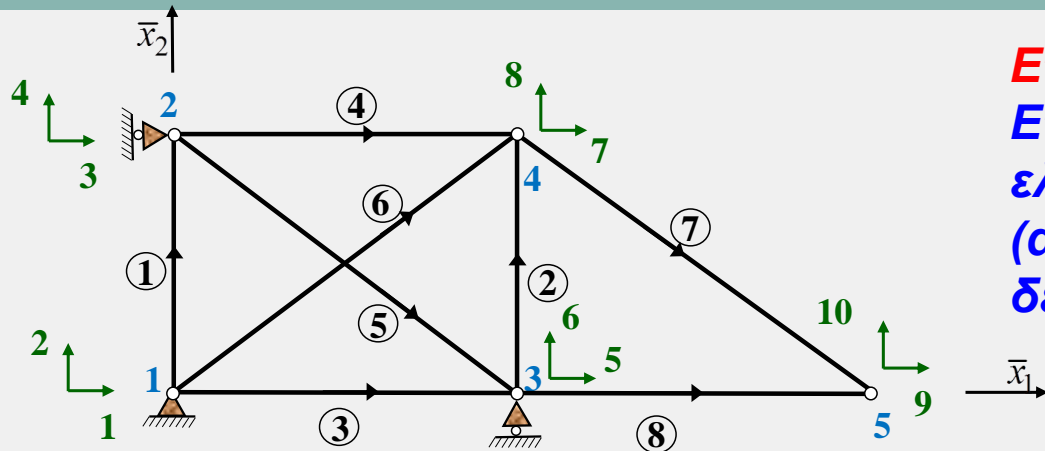


Τροποποιημένο (λόγω αναδιάταξης) καθολικό μητρώο στιβαρότητας δικτύωματος

$$[\bar{K}_m] = [V][\bar{K}][V]^T = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{ff}] & [\bar{K}_{fs}] \\ [\bar{K}_{sf}] & [\bar{K}_{ss}] \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 53651.97 & & & & & & & & & \\ 7761.50 & 92623.90 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 67871.90 & & & & & & & \\ 0 & 0 & -7761.50 & 67622.97 & & & & & & \\ 0 & -42000.00 & -17248.00 & 15523.00 & 59248.00 & & & & & \\ 0 & 0 & 15523.00 & -13971.00 & -15523.00 & 13971.00 & & & & \\ 0 & -42000.00 & -8623.90 & -7761.50 & 0 & 0 & 50623.90 & & & \\ -46666.67 & 0 & -7761.50 & -6985.30 & 0 & 0 & 7761.50 & 53651.97 & & \\ -7761.50 & -8623.90 & -42000.00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 50623.90 & \\ -6985.30 & -7761.50 & 0 & -46666.67 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7761.50 & 53651.97 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{matrix}$$

# Εφαρμογή - ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ



**Επίλυση –**  
Επικόμβιες μετατοπίσεις κατά τους ελεύθερους και επικόβιες δράσεις (αντιδράσεις) κατά τους δεσμευμένους β.ε.

$$\{\bar{\Delta}_f\} = [\bar{K}_{ff}]^{-1} (\{\bar{P}_f\} - [\bar{K}_{fs}]\{\bar{\Delta}_s\})$$

$$\{\bar{P}_s\} = [\bar{K}_{sf}]\{\bar{\Delta}_f\} + [\bar{K}_{ss}]\{\bar{\Delta}_s\}$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \\ \bar{R}_3 \\ \bar{R}_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -222.8936P \\ -207.5021P \\ 227.2236P \\ 211.5021P \end{Bmatrix}$$

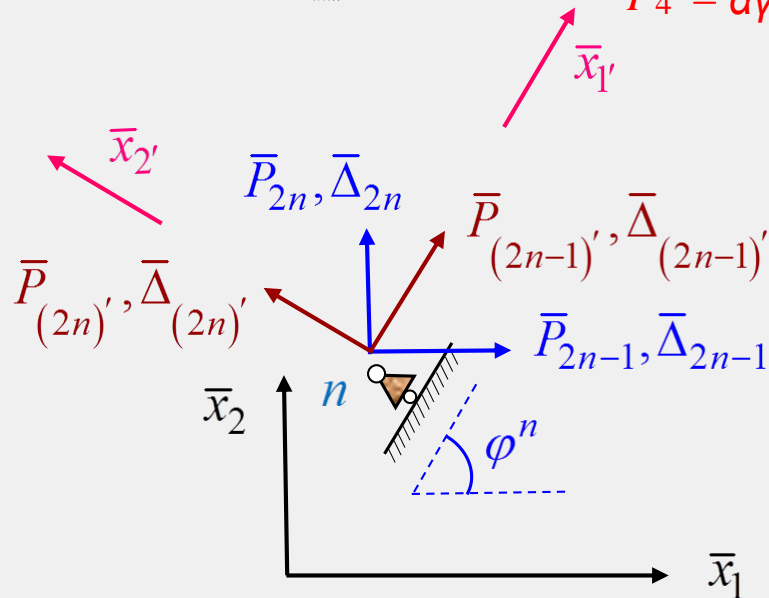
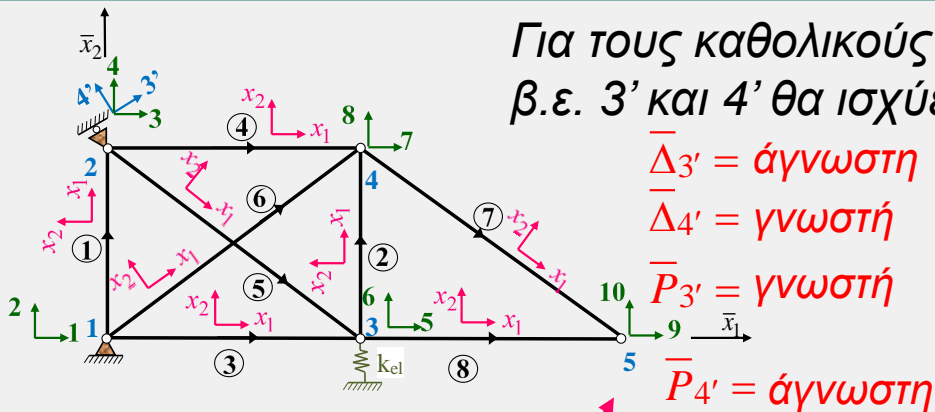
$$\{\bar{\Delta}_f\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \bar{\Delta}_{10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_2^{(2)} \\ \bar{\Delta}_1^{(3)} \\ \bar{\Delta}_1^{(4)} \\ \bar{\Delta}_2^{(4)} \\ \bar{\Delta}_1^{(5)} \\ \bar{\Delta}_2^{(5)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0178 \\ 0.0026 \\ -0.0027 \\ -0.0023 \\ 0.0024 \\ 0.0032 \end{Bmatrix}$$

---

# ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΘΟΛΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ ΛΟΓΩ ΚΕΚΛΙΜΕΝΗΣ ΣΤΗΡΙΞΗΣ – ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΣΤΗΡΙΞΗ

---

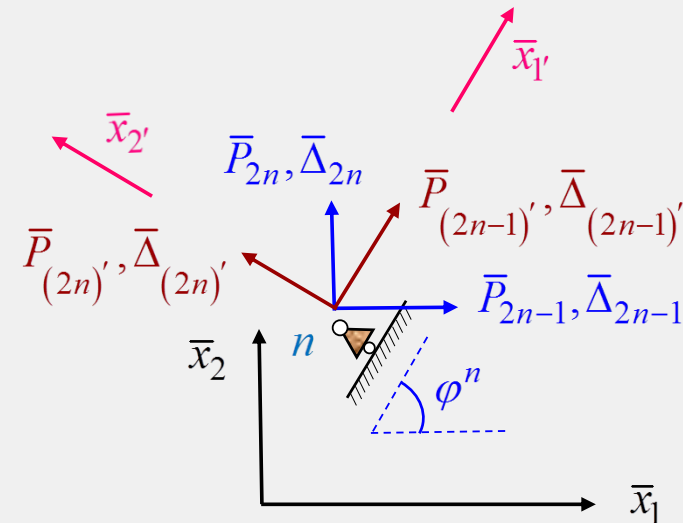
# ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΘΟΛΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ ΛΟΓΩ ΚΕΚΛΙΜΕΝΗΣ ΣΤΗΡΙΞΗΣ – ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΣΤΗΡΙΞΗ



Για τον κόμβο του δικτυώματος ο οποίος φέρει κεκλιμένη στήριξη απαιτείται **τροποποίηση του καθολικού συστήματος αξόνων** έτσι ώστε να μπορεί να ληφθεί υπόψη η προαναφερθείσα στήριξη. Η εν λόγω τροποποίηση θα πρέπει **να προηγηθεί της αναδιάταξης** που περιγράφηκε ήδη, μια και όπως προαναφέρθηκε η μόρφωση του μητρώου αναδιάταξης υιοθετώντας το αρχικό καθολικό σύστημα αξόνων είναι αδύνατη.

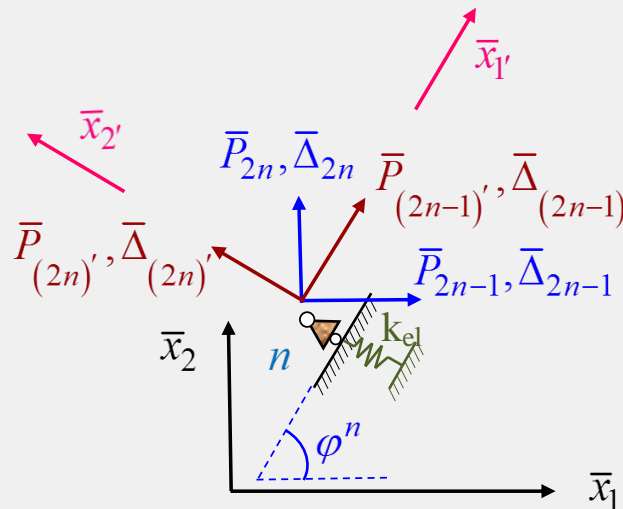
# ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΘΟΛΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ ΛΟΓΩ ΚΕΚΛΙΜΕΝΗΣ ΣΤΗΡΙΞΗΣ – ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΣΤΗΡΙΞΗ

Αρχικό και τελικό καθολικό σύστημα αξόνων στον κόμβο (n) επίπεδου δικτυώματος στηριζόμενου σε ακλόνητη ή ελαστική κεκλιμένη κύλιση



συνιστώσες επικόμβιων δράσεων κόμβου (n) στο αρχικό και το τροποποιημένο σύστημα αξόνων

$$\left\{ \bar{P}^{(n)} \right\} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1^{(n)} \\ \bar{P}_2^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_{2n-1} \\ \bar{P}_{2n} \end{Bmatrix} \quad \left\{ \bar{P}'^{(n)} \right\} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_{1'}^{(n)} \\ \bar{P}_{2'}^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_{(2n-1)'} \\ \bar{P}_{(2n)'} \end{Bmatrix}$$



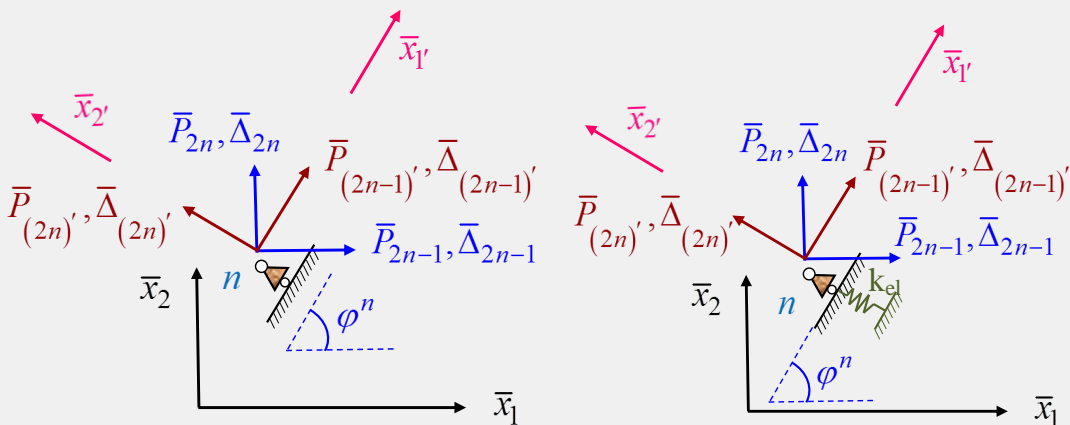
συνιστώσες επικόμβιων μετατοπίσεων κόμβου (n) στο αρχικό και το τροποποιημένο σύστημα αξόνων

$$\left\{ \bar{\Delta}^{(n)} \right\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(n)} \\ \bar{\Delta}_2^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_{2n-1} \\ \bar{\Delta}_{2n} \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ \bar{\Delta}'^{(n)} \right\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_{1'}^{(n)} \\ \bar{\Delta}_{2'}^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_{(2n-1)'} \\ \bar{\Delta}_{(2n)'} \end{Bmatrix}$$

# ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΘΟΛΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ ΛΟΓΩ ΚΕΚΛΙΜΕΝΗΣ ΣΤΗΡΙΞΗΣ – ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΣΤΗΡΙΞΗ

**Σχέσεις μετασχηματισμού συνιστωσών επικόμβιων δράσεων ή επικόμβιων μετατοπίσεων**



$$\begin{bmatrix} r^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi^n & \sin \varphi^n \\ -\sin \varphi^n & \cos \varphi^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r^n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} r^n \end{bmatrix}^T$$

**συνιστώσες επικόμβιων δράσεων**

$$\begin{Bmatrix} \bar{P}_1^{(n)} \\ \bar{P}_2^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi^n & \sin \varphi^n \\ -\sin \varphi^n & \cos \varphi^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{P}_1^{(n)} \\ \bar{P}_2^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{P}_1^{(n)} \\ \bar{P}_2^{(n)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{P}_1^{(n)} \\ \bar{P}_2^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi^n & -\sin \varphi^n \\ \sin \varphi^n & \cos \varphi^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{P}_1^{(n)} \\ \bar{P}_2^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r^n \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \bar{P}_1^{(n)} \\ \bar{P}_2^{(n)} \end{Bmatrix}$$

**συνιστώσες επικόμβιων μετατοπίσεων**

$$\begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(n)} \\ \bar{\Delta}_2^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi^n & \sin \varphi^n \\ -\sin \varphi^n & \cos \varphi^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(n)} \\ \bar{\Delta}_2^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(n)} \\ \bar{\Delta}_2^{(n)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(n)} \\ \bar{\Delta}_2^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi^n & -\sin \varphi^n \\ \sin \varphi^n & \cos \varphi^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(n)} \\ \bar{\Delta}_2^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r^n \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(n)} \\ \bar{\Delta}_2^{(n)} \end{Bmatrix}$$

# ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΘΟΛΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ ΛΟΓΩ ΚΕΚΛΙΜΕΝΗΣ ΣΤΗΡΙΞΗΣ – ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΣΤΗΡΙΞΗ

Ένταξη των σχέσεων μετασχηματισμού σε αντίστοιχες σχέσεις που περιλαμβάνουν το σύνολο των δράσεων ή των μετατοπίσεων των κόμβων του δικτύωματος

$$\begin{bmatrix} \{\bar{P}^{(1)}\} \\ \{\bar{P}^{(2)}\} \\ \vdots \\ \{\bar{P}^{(n)}\} \\ \vdots \\ \{\bar{P}^{(N)}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}_1^{(1)} \\ \bar{P}_2^{(1)} \\ \bar{P}_1^{(2)} \\ \bar{P}_2^{(2)} \\ \vdots \\ \bar{P}_{1'}^{(n)} \\ \bar{P}_{2'}^{(n)} \\ \vdots \\ \bar{P}_1^{(N)} \\ \bar{P}_2^{(N)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \cos \varphi^n & \sin \varphi^n & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\sin \varphi^n & \cos \varphi^n & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P}_1^{(1)} \\ \bar{P}_2^{(1)} \\ \bar{P}_1^{(2)} \\ \bar{P}_2^{(2)} \\ \vdots \\ \bar{P}_1^{(n)} \\ \bar{P}_2^{(n)} \\ \vdots \\ \bar{P}_1^{(N)} \\ \bar{P}_2^{(N)} \end{bmatrix}$$

ή πιο συνοπτικά

$$\{\bar{P}_m\} = [R^n] \{\bar{P}\}$$

$$\{\bar{\Delta}_m\} = [R^n] \{\bar{\Delta}\}$$

Αντίστροφες σχέσεις

$$\{\bar{P}\} = [R^n]^T \{\bar{P}_m\}$$

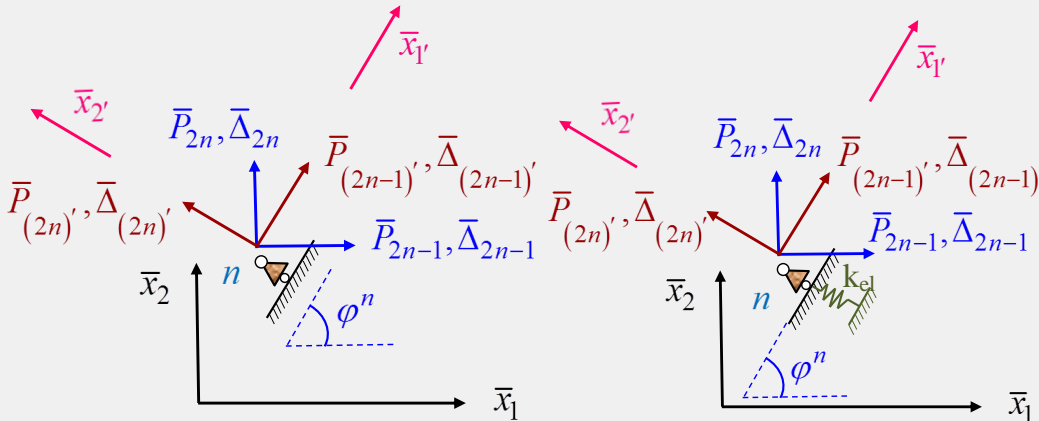
$$\{\bar{\Delta}\} = [R^n]^T \{\bar{\Delta}_m\}$$

όπου

$[R^n]$  μητρώο  
περιστροφής  
(μετασχηματισμού)

# ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΘΟΛΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ ΛΟΓΩ ΚΕΚΛΙΜΕΝΗΣ ΣΤΗΡΙΞΗΣ – ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΣΤΗΡΙΞΗ

**Τροποποίηση καθολικού μητρώου στιβαρότητας λόγω κεκλιμένης στήριξης**



**Τροποποιημένο καθολικό μητρώο στιβαρότητας**

$$[\bar{K}_m] = [R^n][\bar{K}][R^n]^T$$

**Σχέσεις μετασχηματισμού**

$$\{\bar{P}_m\} = [R^n]\{\bar{P}\}$$

$$\{\bar{\Delta}_m\} = [R^n]\{\bar{\Delta}\}$$

**Αντίστροφες σχέσεις**

$$\{\bar{P}\} = [R^n]^T\{\bar{P}_m\}$$

$$\{\bar{\Delta}\} = [R^n]^T\{\bar{\Delta}_m\}$$

$$\{\bar{P}\} = [\bar{K}]\{\bar{\Delta}\} \longrightarrow [R^n]^T\{\bar{P}_m\} = [\bar{K}][R^n]^T\{\bar{\Delta}_m\}$$

Ακολουθεί αναδιάταξη του μητρώου στιβαρότητας (2η τροποποίηση)

$$\{\bar{P}_m\} = [R^n][\bar{K}][R^n]^T\{\bar{\Delta}_m\}$$

$$[\bar{K}_{mm}] = [V][\bar{K}_m][V]^T =$$

$$[V][R^n][\bar{K}][R^n]^T[V]^T$$

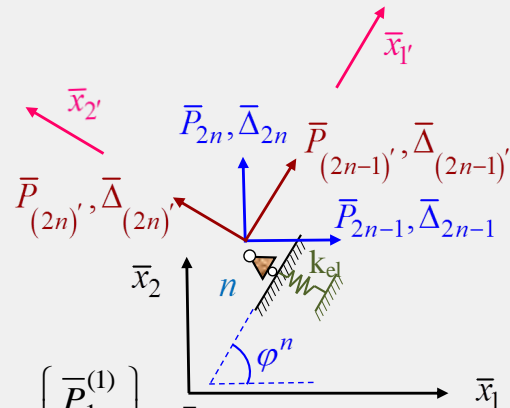
# ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΘΟΛΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΛΟΓΩ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΣΤΗΡΙΞΗΣ

Τροποποίηση καθολικού μητρώου στιβαρότητας λόγω ελαστικής στήριξης

Τροποποιημένη εξίσωση ισορροπίας

$$\{\bar{P}\} = [\bar{K}]\{\bar{\Delta}\} + k_{el} \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \quad \dots \quad 0 \quad 0\}^T$$

ή πιο αναλυτικά



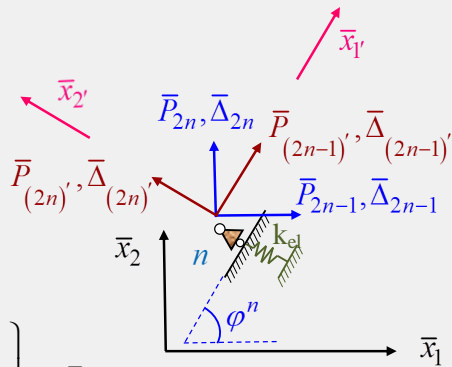
$$\begin{Bmatrix} \bar{P}_1^{(1)} \\ \bar{P}_2^{(1)} \\ \bar{P}_1^{(2)} \\ \bar{P}_2^{(2)} \\ \vdots \\ \bar{P}_1^{(n)} \\ \bar{P}_2^{(n)} \\ \vdots \\ \bar{P}_1^{(N)} \\ \bar{P}_2^{(N)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} & & \bar{K}_{13} & \bar{K}_{14} & \dots & \bar{K}_{1,2n-1} & \bar{K}_{1,2n} & \dots & \bar{K}_{1,2N-1} & \bar{K}_{1,2N} \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} & & \bar{K}_{23} & \bar{K}_{24} & \dots & \bar{K}_{2,2n-1} & \bar{K}_{2,2n} & \dots & \bar{K}_{2,2N-1} & \bar{K}_{2,2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{K}_{31} & \bar{K}_{32} & & \bar{K}_{33} & \bar{K}_{34} & \dots & \bar{K}_{3,2n-1} & \bar{K}_{3,2n} & \dots & \bar{K}_{3,2N-1} & \bar{K}_{3,2N} \\ \bar{K}_{41} & \bar{K}_{42} & & \bar{K}_{43} & \bar{K}_{44} & \dots & \bar{K}_{4,2n-1} & \bar{K}_{4,2n} & \dots & \bar{K}_{4,2N-1} & \bar{K}_{4,2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{K}_{2n-1,1} & \bar{K}_{2n-1,2} & & \bar{K}_{2n-1,3} & \bar{K}_{2n-1,4} & \dots & \bar{K}_{2n-1,2n-1} & \bar{K}_{2n-1,2n} & \dots & \bar{K}_{2n-1,2N-1} & \bar{K}_{2n-1,2N} \\ \bar{K}_{2n,1} & \bar{K}_{2n,2} & & \bar{K}_{2n,3} & \bar{K}_{2n,4} & \dots & \bar{K}_{2n,2n-1} & \bar{K}_{2n,2n} & \dots & \bar{K}_{2n,2N-1} & \bar{K}_{2n,2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{K}_{2N-1,1} & \bar{K}_{2N-1,2} & & \bar{K}_{2N-1,3} & \bar{K}_{2N-1,4} & \dots & \bar{K}_{2N-1,2n-1} & \bar{K}_{2N-1,2n} & \dots & \bar{K}_{2N-1,2N-1} & \bar{K}_{2N-1,2N} \\ \bar{K}_{2N,1} & \bar{K}_{2N,2} & & \bar{K}_{2N,3} & \bar{K}_{2N,4} & \dots & \bar{K}_{2N,2n-1} & \bar{K}_{2N,2n} & \dots & \bar{K}_{2N,2N-1} & \bar{K}_{2N,2N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(1)} \\ \bar{\Delta}_2^{(1)} \\ \bar{\Delta}_1^{(2)} \\ \bar{\Delta}_2^{(2)} \\ \vdots \\ \bar{\Delta}_1^{(n)} \\ \bar{\Delta}_2^{(n)} \\ \vdots \\ \bar{\Delta}_1^{(N)} \\ \bar{\Delta}_2^{(N)} \end{Bmatrix} + k_{el} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

# ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΘΟΛΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΛΟΓΩ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΣΤΗΡΙΞΗΣ

Τροποποίηση καθολικού μητρώου στιβαρότητας λόγω ελαστικής στήριξης

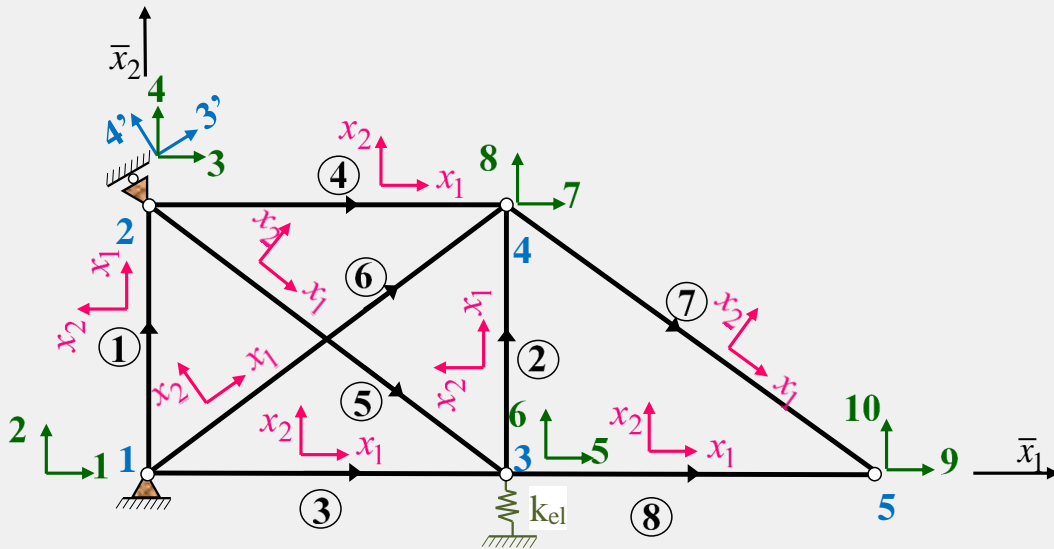
και επομένως

Τροποποιημένη εξίσωση ισορροπίας



$$\begin{Bmatrix} \bar{P}_1^{(1)} \\ \bar{P}_2^{(1)} \\ \vdots \\ \bar{P}_1^{(n)} \\ \bar{P}_2^{(n)} \\ \vdots \\ \bar{P}_1^{(N)} \\ \bar{P}_2^{(N)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} & \bar{K}_{13} & \bar{K}_{14} & \dots & \bar{K}_{1,2n-1} & \bar{K}_{1,2n} & \dots & \bar{K}_{1,2N-1} & \bar{K}_{1,2N} \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} & \bar{K}_{23} & \bar{K}_{24} & \dots & \bar{K}_{2,2n-1} & \bar{K}_{2,2n} & \dots & \bar{K}_{2,2N-1} & \bar{K}_{2,2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{K}_{2n-1,1} & \bar{K}_{2n-1,2} & \bar{K}_{2n-1,3} & \bar{K}_{2n-1,4} & \dots & \bar{K}_{2n-1,2n-1} & \bar{K}_{2n-1,2n} & \dots & \bar{K}_{2n-1,2N-1} & \bar{K}_{2n-1,2N} \\ \bar{K}_{2n,1} & \bar{K}_{2n,2} & \bar{K}_{2n,3} & \bar{K}_{2n,4} & \dots & \bar{K}_{2n,2n-1} & \bar{K}_{2n,2n} + k_{el} & \dots & \bar{K}_{2n,2N-1} & \bar{K}_{2n,2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{K}_{2N-1,1} & \bar{K}_{2N-1,2} & \bar{K}_{2N-1,3} & \bar{K}_{2N-1,4} & \dots & \bar{K}_{2N-1,2n-1} & \bar{K}_{2N-1,2n} & \dots & \bar{K}_{2N-1,2N-1} & \bar{K}_{2N-1,2N} \\ \bar{K}_{2N,1} & \bar{K}_{2N,2} & \bar{K}_{2N,3} & \bar{K}_{2N,4} & \dots & \bar{K}_{2N,2n-1} & \bar{K}_{2N,2n} & \dots & \bar{K}_{2N,2N-1} & \bar{K}_{2N,2N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(1)} \\ \bar{\Delta}_2^{(1)} \\ \vdots \\ \bar{\Delta}_1^{(n)} \\ \bar{\Delta}_2^{(n)} \\ \vdots \\ \bar{\Delta}_1^{(N)} \\ \bar{\Delta}_2^{(N)} \end{Bmatrix}$$

# Εφαρμογή - ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΘΟΛΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΛΟΓΩ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΣΤΗΡΙΞΗΣ



Τροποποίηση υπομητρώου (3,3) καθολικού μητρώου στιβαρότητας δικτυώματος λόγω ελαστικής στήριξης

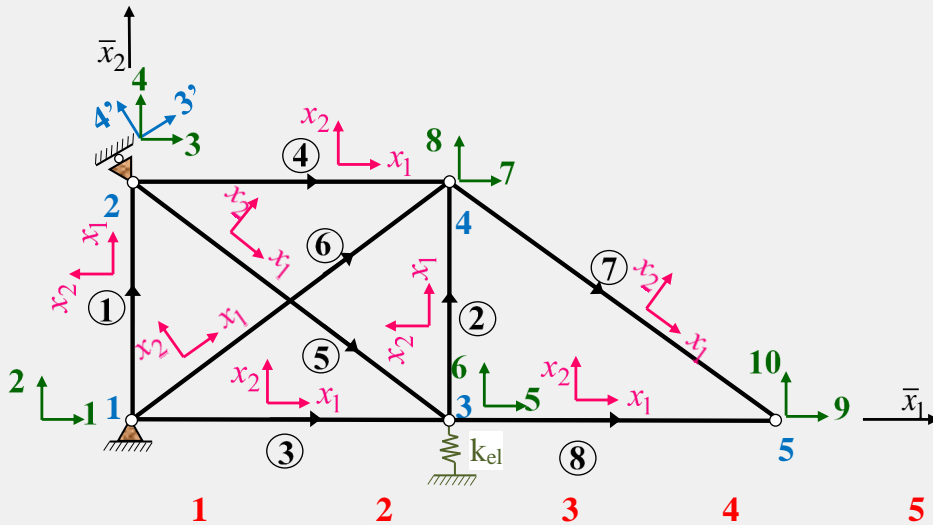
$$[\bar{K}_{3,3}] = [\bar{k}_{jj}^2] + [\bar{k}_{kk}^3] + [\bar{k}_{kk}^5] + [\bar{k}_{jj}^8] + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_{el} \end{bmatrix} =$$

β.ε. 5

β.ε. 6

$$= \begin{matrix} \text{β.ε. 5} \\ \text{β.ε. 6} \end{matrix} \begin{bmatrix} \bar{k}_{11}^2 + \bar{k}_{33}^3 + \bar{k}_{33}^5 + \bar{k}_{11}^8 & \bar{k}_{12}^2 + \bar{k}_{34}^3 + \bar{k}_{34}^5 + \bar{k}_{12}^8 \\ \bar{k}_{21}^2 + \bar{k}_{43}^3 + \bar{k}_{43}^5 + \bar{k}_{21}^8 & \bar{k}_{22}^2 + \bar{k}_{44}^3 + \bar{k}_{44}^5 + \bar{k}_{22}^8 + k_{el} \end{bmatrix}$$

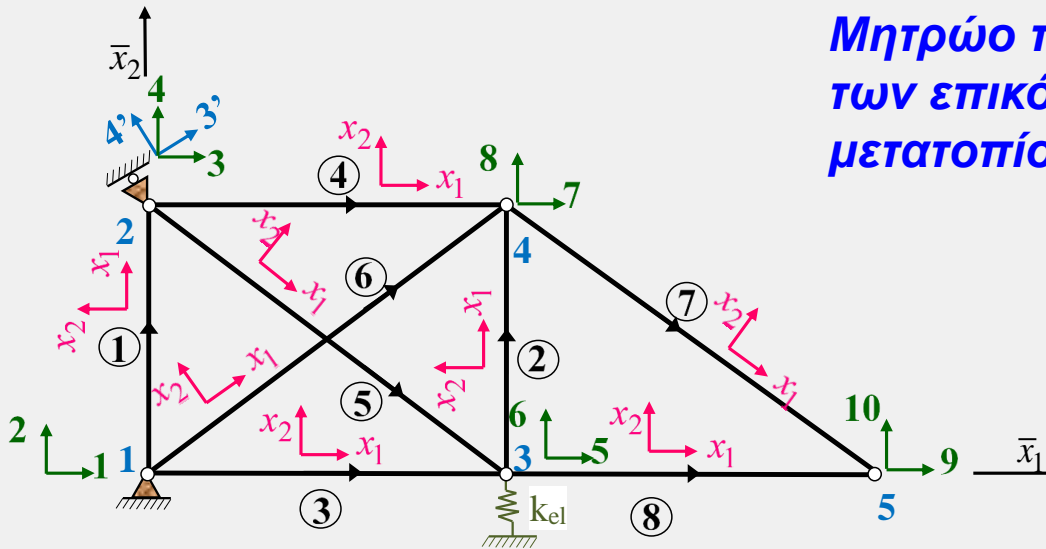
# Εφαρμογή - ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΘΟΛΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΛΟΓΩ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΣΤΗΡΙΞΗΣ



Τροποποιημένο καθολικό  
μητρώο στιβαρότητας  
δικτυώματος λόγω ελαστικής  
στήριξης (1<sup>η</sup> τροποποίηση)

$$[\bar{K}_m] = \begin{bmatrix} 50623.90 & & & & & & & & & \\ 7761.50 & 53651.97 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 50623.90 & & & & & & & \\ 0 & -46666.67 & -7761.50 & 53651.97 & & & & & & \\ -42000.00 & 0 & -8623.90 & 7761.50 & 92623.90 & & & & & \\ 0 & 0 & 7761.50 & -6985.30 & -7761.50 & 83651.97 & & & & \\ -8623.90 & -7761.50 & -42000.00 & 0 & 0 & 0 & 67871.90 & & & \\ -7761.50 & -6985.30 & 0 & 0 & 0 & -46666.67 & -7761.50 & 67622.97 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -42000.00 & 0 & -17248.00 & 15523.00 & 59248.00 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15523.00 & -13971.00 & -15523.00 & 13971.00 \end{bmatrix}$$

# Εφαρμογή - ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΘΟΛΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΛΟΓΩ ΛΟΞΗΣ ΣΤΗΡΙΞΗΣ



Μητρώο περιστροφής (μετασχηματισμού)  
των επικόμβιων δράσεων ή των επικόμβιων  
μετατοπίσεων του κόμβου 2

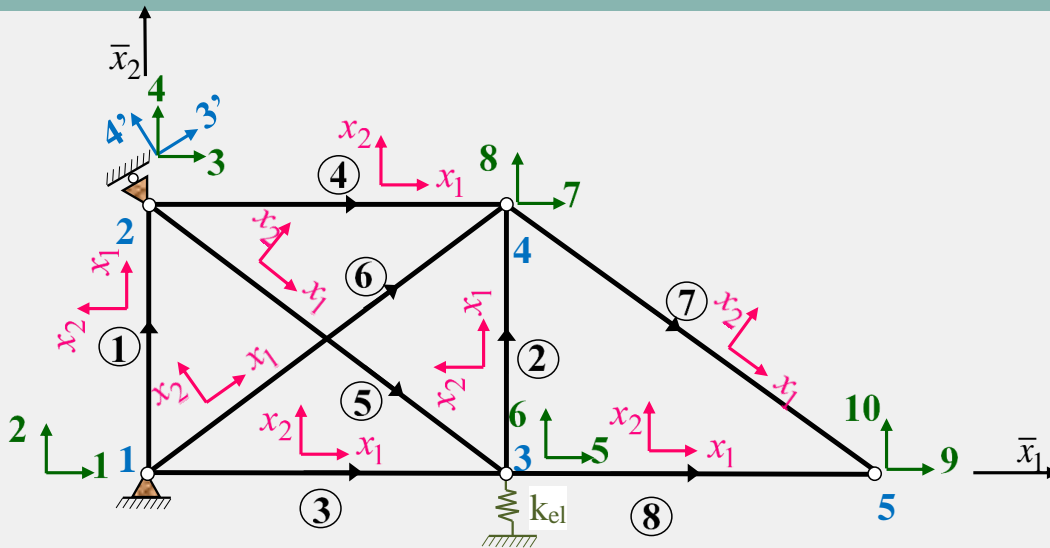
$$[r^2] = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix}$$

Ένταξη μητρώου περιστροφής  
(μετασχηματισμού) του κόμβου 2  
σε μητρώο περιστροφής του  
συνόλου του δικτύωματος

$$[R^2] =$$

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	$\cos 30^\circ$	$\sin 30^\circ$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	$-\sin 30^\circ$	$\cos 30^\circ$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

# Εφαρμογή - ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΘΟΛΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΛΟΓΩ ΛΟΞΗΣ ΣΤΗΡΙΞΗΣ

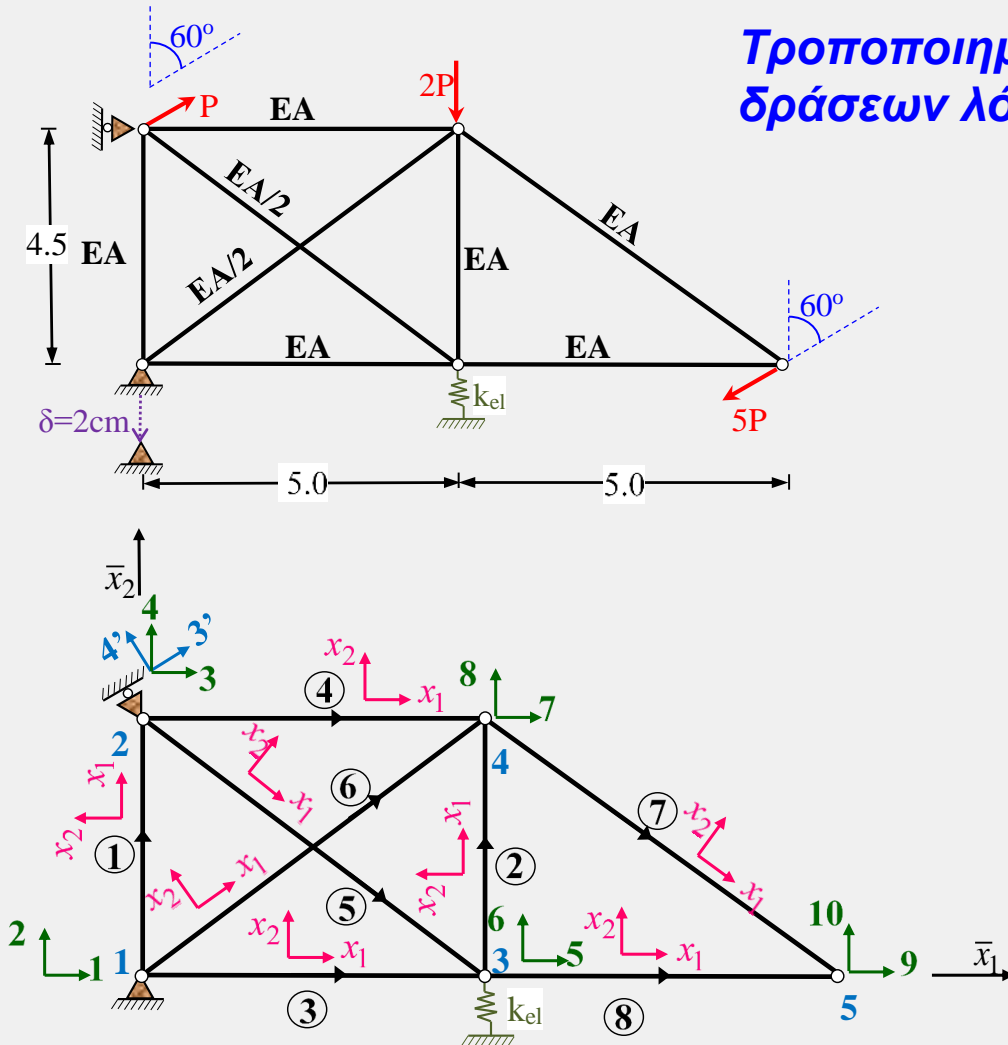


Τροποποιημένο καθολικό  
μητρώο στιβαρότητας  
δικτυώματος λόγω λοξής  
στήριξης (2<sup>η</sup> τροποποίηση)

	1	2	3'	4'	5	6	7	8	9	10	
$[K_{mm}] =$	50623.90	7761.50	0	0	-42000.00	0	-8623.90	-7761.50	0	0	1
	7761.50	53651.97	-23333.34	-40413.34	0	0	-7761.50	-6985.30	0	0	2
	0	-23333.34	44657.23	-2569.25	-3587.55	3228.81	-36372	0	0	0	3'
	0	-40413.34	-2569.25	59614.05	11033.41	-9930.02	21000	0	0	0	4'
	-42000.00	0	-3587.55	11033.41	92623.90	-7761.50	0	0	-42000.00	0	5
	0	0	3228.81	-9930.02	-7761.50	83651.97	0	-46666.67	0	0	6
	-8623.90	-7761.50	-36372	21000	0	0	67871.90	-7761.50	-17248.00	15523.00	7
	-7761.50	-6985.30	0	0	0	-46666.67	-7761.50	67622.97	15523.00	-13971.00	8
	0	0	0	0	-42000.00	0	-17248.00	15523.00	59248.00	-15523.00	9
	0	0	0	0	0	0	15523.00	-13971.00	-15523.00	13971.00	10

# Εφαρμογή - ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΟΛΙΚΩΝ ΕΠΙΚΟΜΒΙΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ - ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ

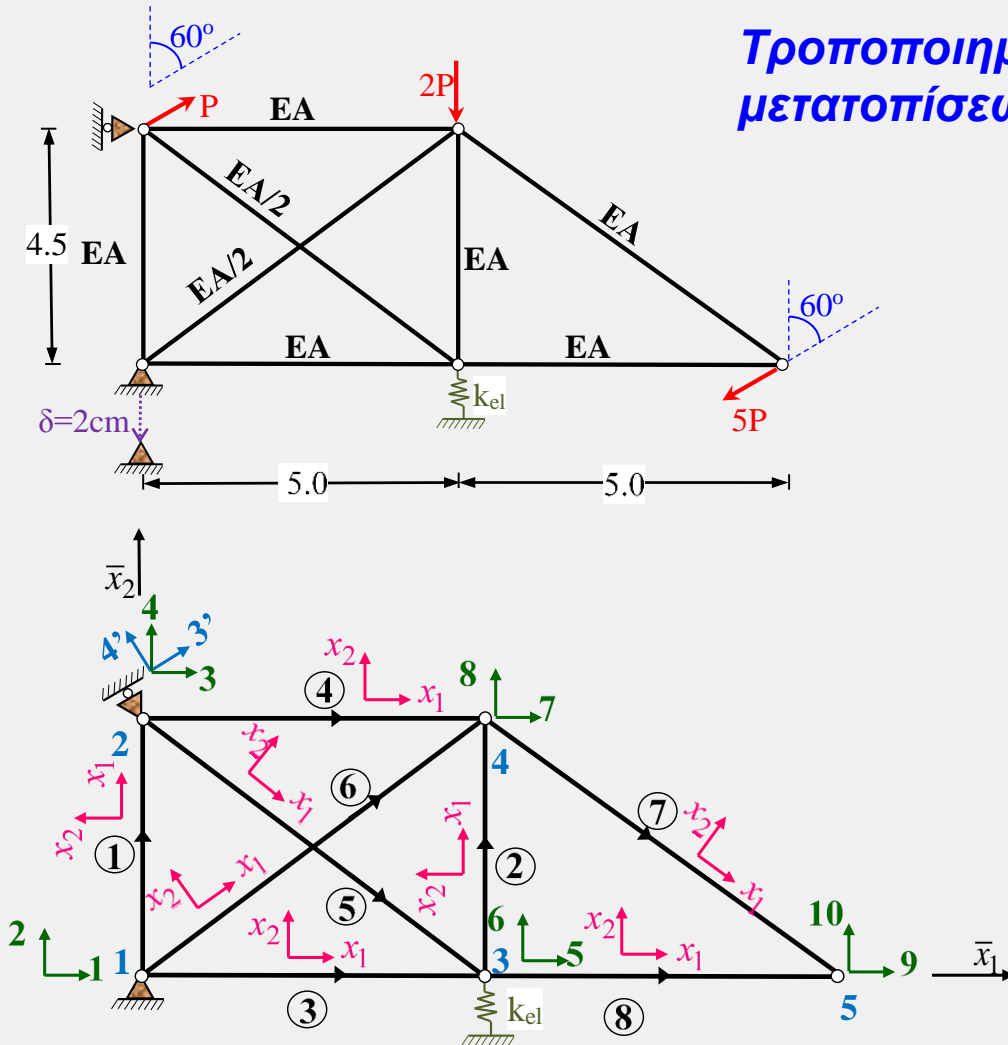
Τροποποιημένο διάνυσμα ολικών επικόμβιων δράσεων λόγω λοξής και ελαστικής στήριξης



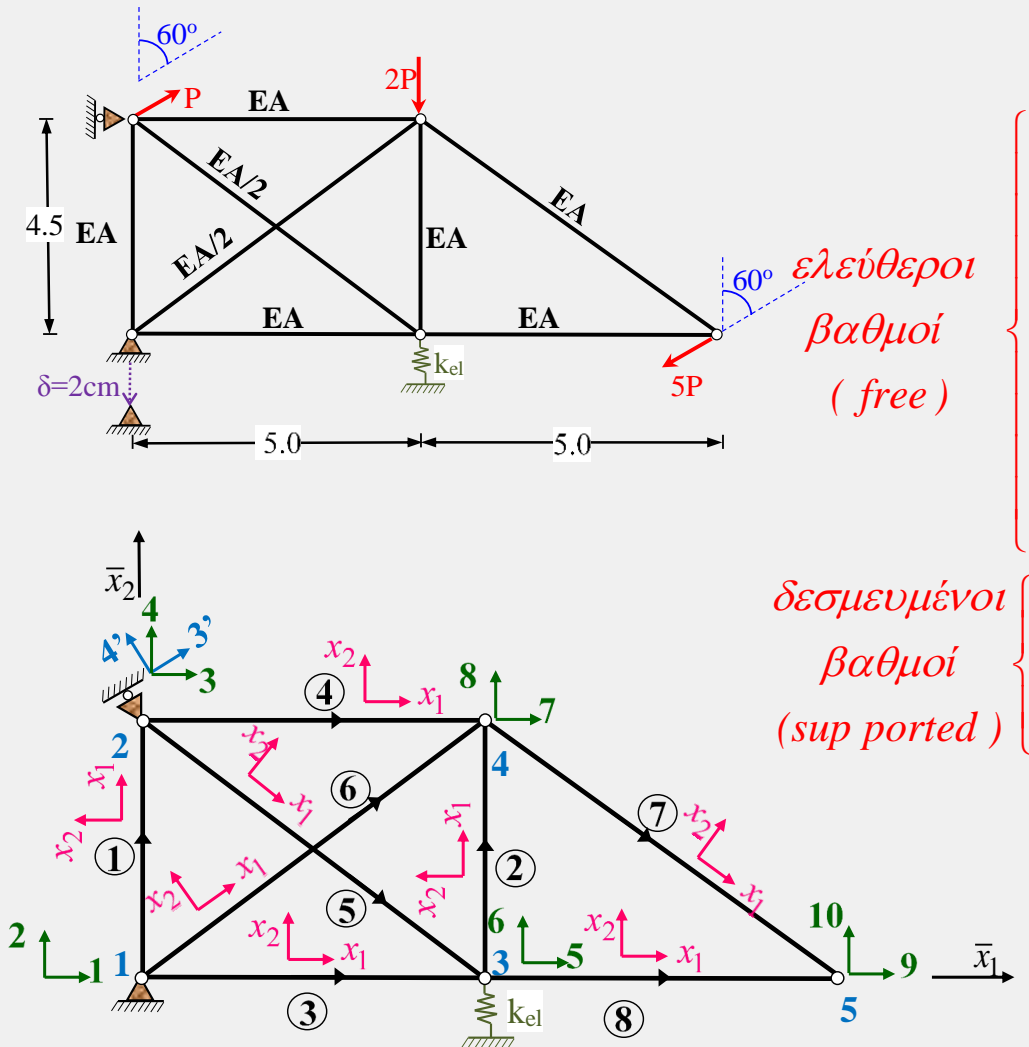
$$\{\bar{P}_m\} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1^{(1)} \\ \bar{P}_2^{(1)} \\ \bar{P}_{1'}^{(2)} \\ \bar{P}_{2'}^{(2)} \\ \bar{P}_1^{(3)} \\ \bar{P}_2^{(3)} \\ \bar{P}_1^{(4)} \\ \bar{P}_2^{(4)} \\ \bar{P}_1^{(5)} \\ \bar{P}_2^{(5)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_{3'} \\ \bar{P}_{4'} \\ \bar{P}_5 \\ \bar{P}_6 \\ \bar{P}_7 \\ \bar{P}_8 \\ \bar{P}_9 \\ \bar{P}_{10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \\ P \\ \bar{R}_{4'} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2P \\ -4.330P \\ -2.5P \end{Bmatrix}$$

# Εφαρμογή - ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΟΛΙΚΩΝ ΕΠΙΚΟΜΒΙΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ - ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ

Τροποποιημένο διάνυσμα ολικών επικόμβιων μετατοπίσεων λόγω λοξής και ελαστικής στήριξης



# Εφαρμογή - ΜΟΡΦΩΣΗ ΜΗΤΡΩΟΥ ΑΝΑΔΙΑΤΑΞΗΣ



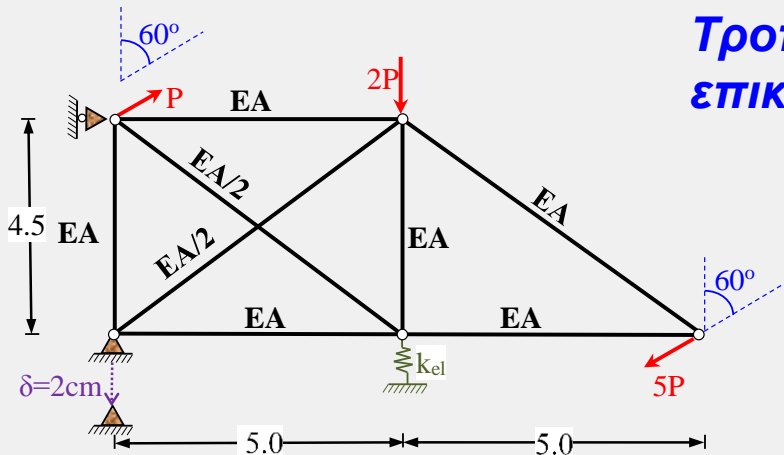
## Μητρώο αναδιάταξης δικτυώματος

$$\begin{Bmatrix} 3' \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ \hline 1 \\ 2 \\ 4' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3' \\ 4' \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ \hline 8 \\ 9 \\ 10 \end{Bmatrix}$$

Τροποποιημένα (λόγω αναδιάταξης) διανύσματα επικόμβιων δράσεων και μετατοπίσεων δικτυώματος

$$\{\bar{P}_{mm}\} = [V]\{\bar{P}_m\} \quad \{\bar{\Delta}_{mm}\} = [V]\{\bar{\Delta}_m\}$$

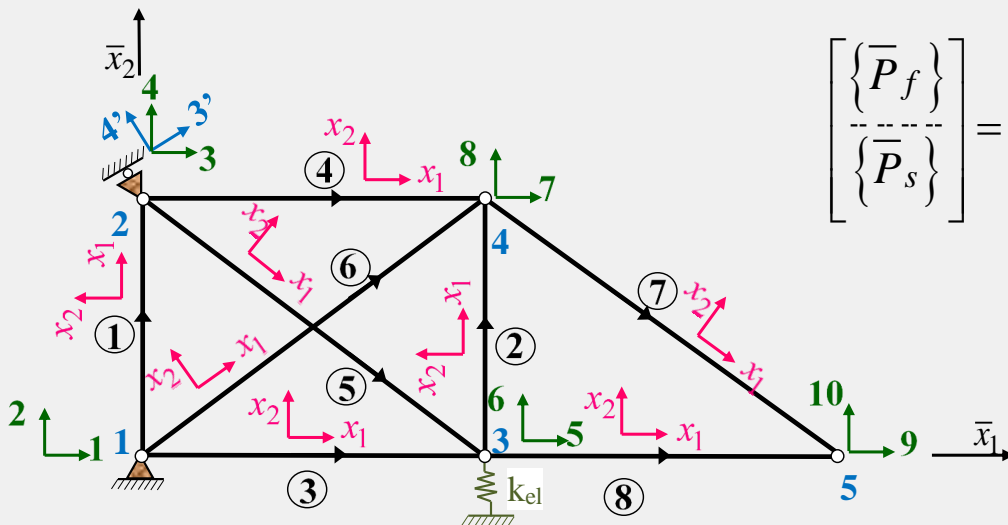
# Εφαρμογή - ΑΝΑΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΟΛΙΚΩΝ ΕΠΙΚΟΜΒΙΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ - ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ



Τροποποιημένα (λόγω αναδιάταξης) διανύσματα  
επικόμβιων δράσεων και μετατοπίσεων δικτυώματος

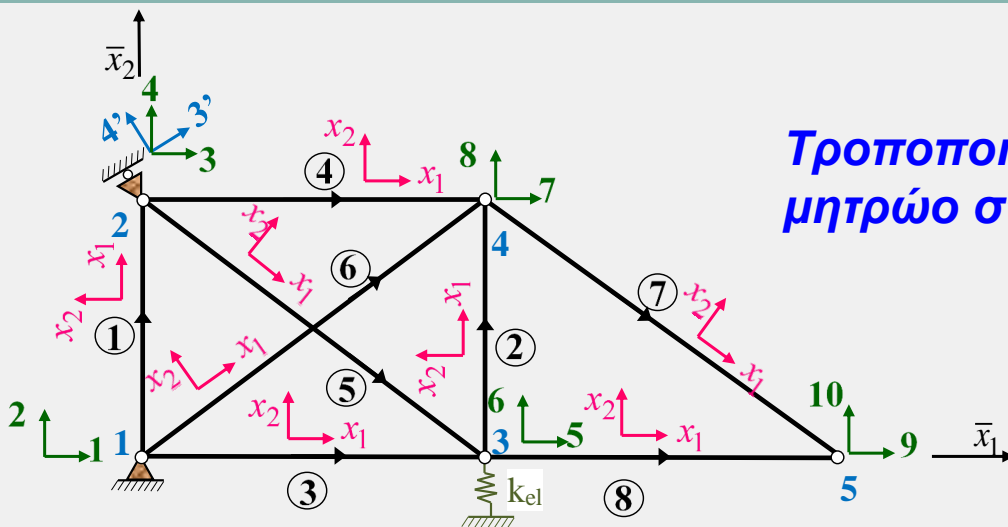
$$\{\bar{P}_{mm}\} = [V]\{\bar{P}_m\}$$

$$\{\bar{\Delta}_{mm}\} = [V]\{\bar{\Delta}_m\}$$



$$\begin{Bmatrix} \{\bar{P}_f\} \\ \{\bar{P}_s\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_{3'} \\ \bar{P}_5 \\ \bar{P}_6 \\ \bar{P}_7 \\ \bar{P}_8 \\ \bar{P}_9 \\ \bar{P}_{10} \\ \hline \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_{4'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2P \\ -4.330P \\ -2.5P \\ \hline \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \\ \bar{R}_{4'} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{\Delta}_f\} \\ \{\bar{\Delta}_s\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_{3'} \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \bar{\Delta}_{10} \\ \hline \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_{4'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_{3'} \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \bar{\Delta}_{10} \\ \hline 0 \\ -0.02 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

# Εφαρμογή - ΑΝΑΔΙΑΤΑΞΗ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ

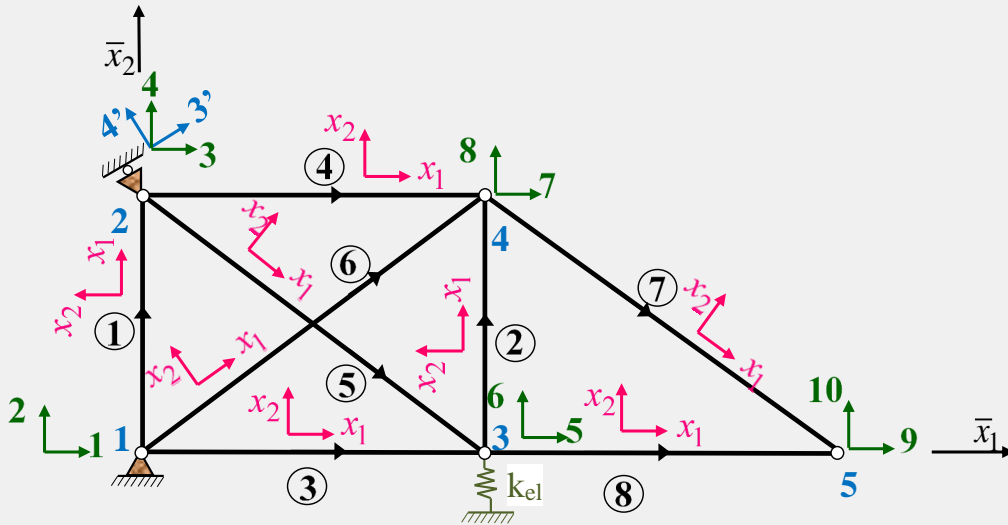


Τροποποιημένο (λόγω αναδιάταξης) καθολικό μητρώο στιβαρότητας δικτυώματος

$$[\bar{K}_{mm}] = [V][\bar{K}_m][V]^T = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{ff}] & [\bar{K}_{fs}] \\ [\bar{K}_{sf}] & [\bar{K}_{ss}] \end{bmatrix} =$$

	3'	5	6	7	8	9	10		1	2	4'	
=	44657.23	-3587.55	3228.81	-36372	0	0	0		0	-23333.34	-2569.25	3'
	-3587.55	92623.90	-7761.50	0	0	-42000.00	0		-42000.00	0	11033.41	5
	3228.81	-7761.50	83651.97	0	-46666.67	0	0		0	0	-9930.02	6
	-36372	0	0	67871.90	-7761.50	-17248.00	15523.00		-8623.90	-7761.50	21000	7
	0	0	-46666.67	-7761.50	67622.97	15523.00	-13971.00		-7761.50	-6985.30	0	8
	0	-42000.00	0	-17248.00	15523.00	59248.00	-15523.00		0	0	0	9
	0	0	0	15523.00	-13971.00	-15523.00	13971.00		0	0	0	10
	0	-42000.00	0	-8623.90	-7761.50	0	0		50623.90	7761.50	0	1
	-23333.34	0	0	-7761.50	-6985.30	0	0		7761.50	53651.97	-40413.34	2
	-2569.25	11033.41	-9930.02	21000	0	0	0		0	-40413.34	59614.05	4'

# Εφαρμογή - ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ



**Επίλυση –**  
Επικόμβιες μετατοπίσεις κατά τους ελεύθερους και επικόβιες δράσεις (αντιδράσεις) κατά τους δεσμευμένους β.ε.

$$\{\bar{\Delta}_f\} = [\bar{K}_{ff}]^{-1} (\{\bar{P}_f\} - [\bar{K}_{fs}]\{\bar{\Delta}_s\})$$

$$\{\bar{P}_s\} = [\bar{K}_{sf}]\{\bar{\Delta}_f\} + [\bar{K}_{ss}]\{\bar{\Delta}_s\}$$

$$\{\bar{P}_s\} = \begin{Bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \\ \bar{R}_{4'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 131.33P \\ -110.18P \\ 255.73P \end{Bmatrix}$$

$$\bar{R}_2^{(3)} = \bar{R}_6 = k_{el} \bar{\Delta}_2^{(3)}$$

$$\{\bar{\Delta}_f\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_{3'} \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \bar{\Delta}_{10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(2)} \\ \bar{\Delta}_1^{(3)} \\ \bar{\Delta}_2^{(3)} \\ \bar{\Delta}_1^{(4)} \\ \bar{\Delta}_2^{(4)} \\ \bar{\Delta}_1^{(5)} \\ \bar{\Delta}_2^{(5)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0334 \\ -0.0020 \\ 0.0036 \\ -0.0277 \\ 0.0044 \\ -0.0021 \\ 0.0326 \end{Bmatrix}$$

---

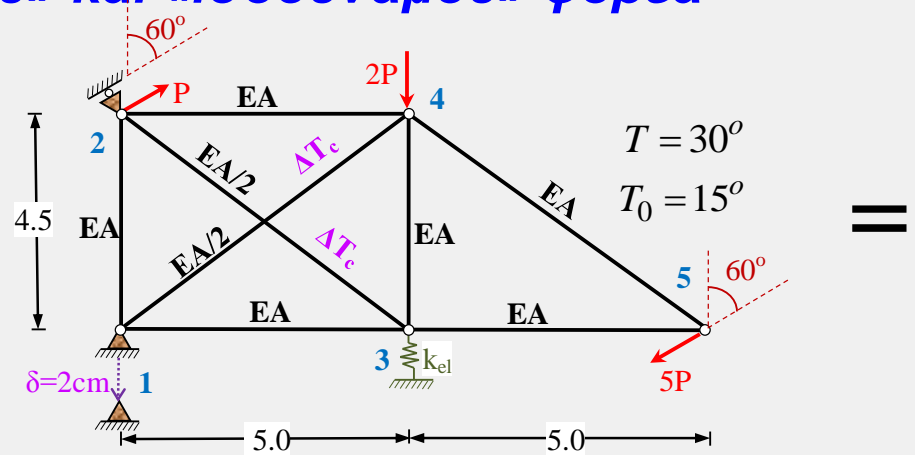
# ΕΠΙΠΕΔΟ ΔΙΚΤΥΩΜΑ ΥΠΟΒΑΛΛΟΜΕΝΟ ΣΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΑ ΦΟΡΤΙΑ

---

# ΕΠΙΠΕΔΟ ΔΙΚΤΥΩΜΑ ΥΠΟΒΑΛΛΟΜΕΝΟ ΣΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΑ ΦΟΡΤΙΑ

Επαλληλία «παγιωμένου» και «ισοδύναμου» φορέα

Αρχικός φορέας



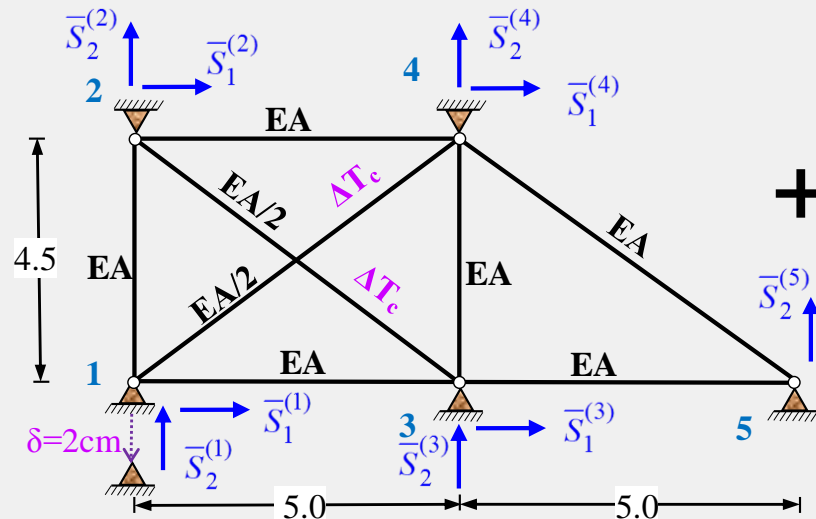
=

Δράσεις  
παγίωσης

Παγιωμένοι  
κόμβοι

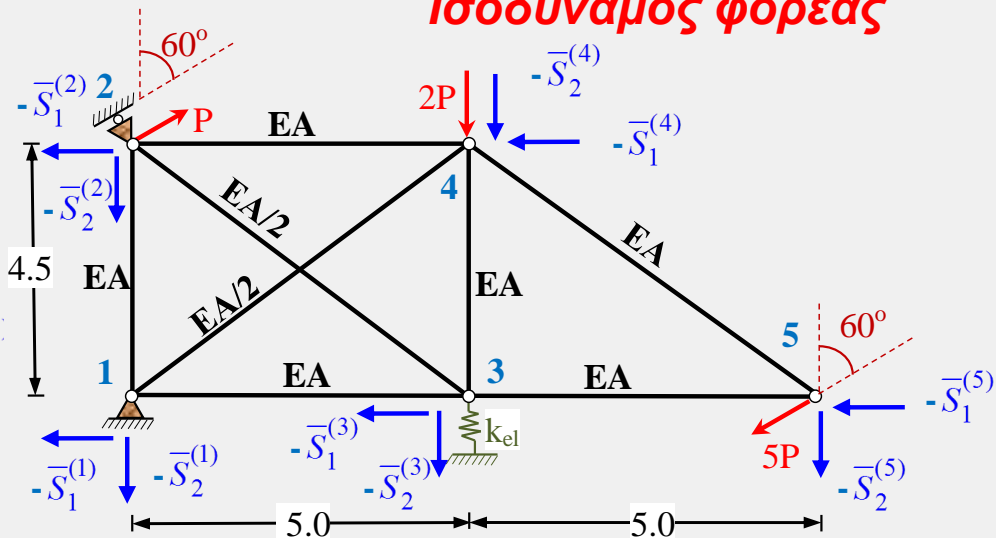
$$\{\bar{S}^{(n)}\} = \begin{Bmatrix} \bar{S}_1^{(n)} \\ \bar{S}_2^{(n)} \end{Bmatrix} \quad \{\bar{\Delta}^{(n)}\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(n)} \\ \bar{\Delta}_2^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Παγιωμένος φορέας



+

Ισοδύναμος φορέας

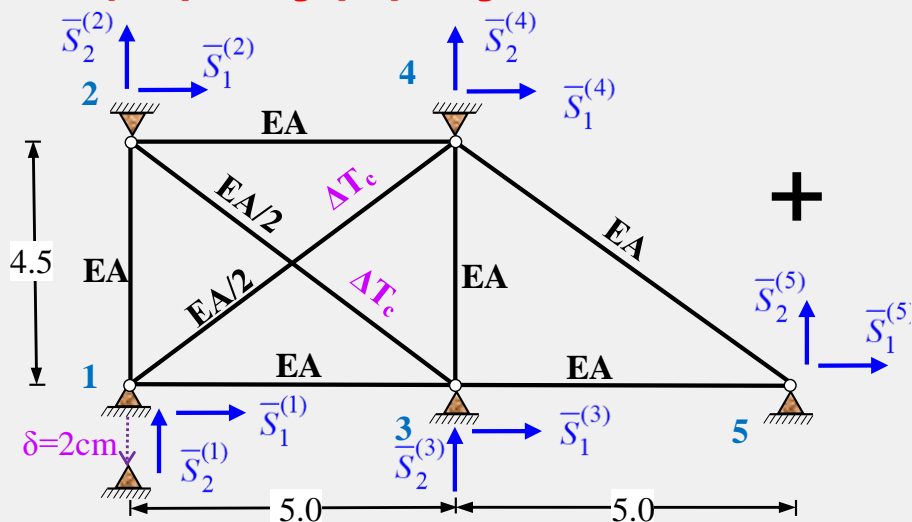


ΕΠΙΠΕΔΟ ΔΙΚΤΥΩΜΑ ΥΠΟΒΑΛΛΟΜΕΝΟ ΣΕ  
ΕΝΔΙΑΜΕΣΑ ΦΟΡΤΙΑ

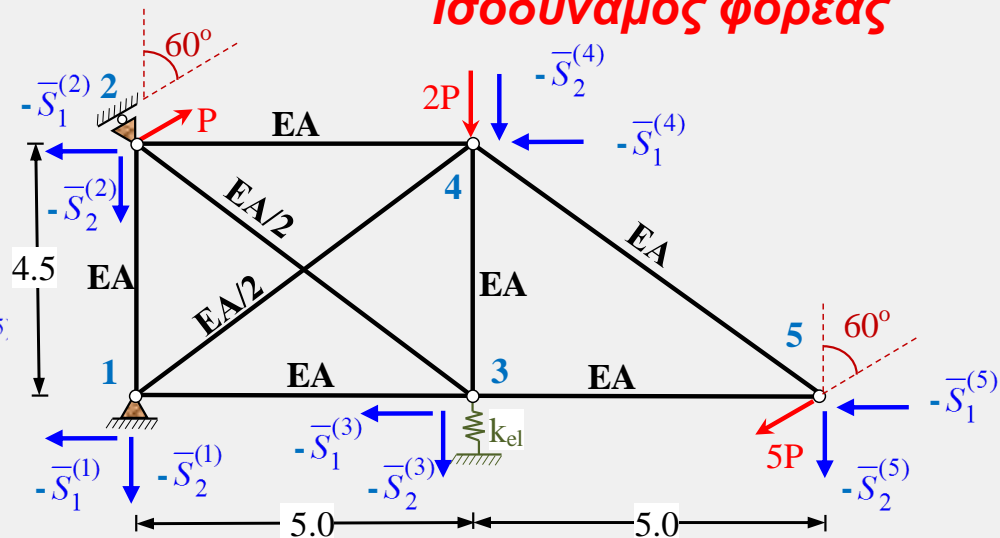
## Επαλληλία «παγιωμένου» και «ισοδύναμου» φορέα

- οι άγνωστες **επικόμβιες μετατοπίσεις του πραγματικού** φορέα ταυτίζονται με αυτές του ισοδύναμου (μια και οι αντίστοιχες του παγιωμένου φορέα είναι μηδενικές)
- οι άγνωστες **αντιδράσεις του πραγματικού φορέα** ταυτίζονται με αυτές του ισοδύναμου
- οι άγνωστες **εσωτερικές δράσεις των μελών του πραγματικού** φορέα προκύπτουν ως επαλληλία των αντίστοιχων δράσεων τόσο του παγιωμένου όσο και του ισοδύναμου φορέα.

## Παγιωμένος φορέας



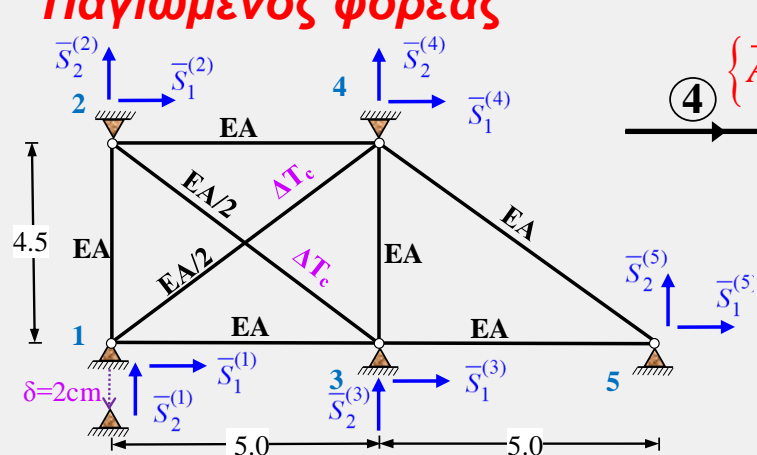
## Ισοδύναμος φορέας



# ΕΠΙΠΕΔΟ ΔΙΚΤΥΩΜΑ ΥΠΟΒΑΛΛΟΜΕΝΟ ΣΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΑ ΦΟΡΤΙΑ

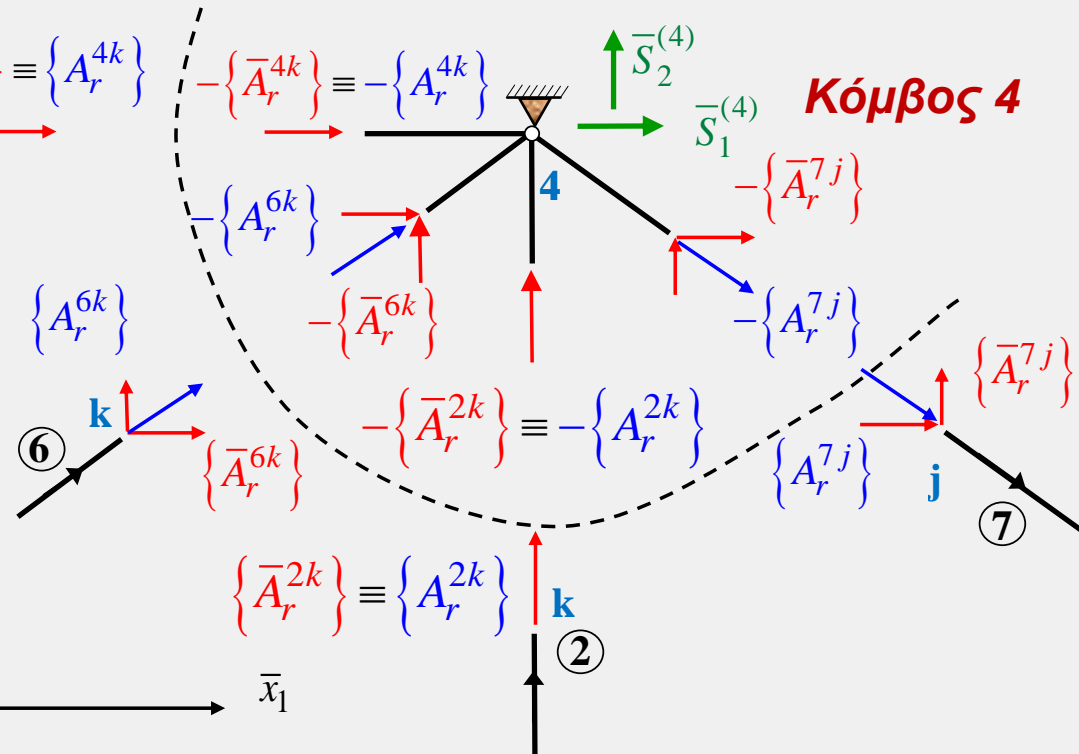
**Παγιωμένος φορέας**

**Υπολογισμός δράσεων παγίωσης**



**Καθολικές ακραίες δράσεις μελών κόμβου 4**

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \bar{A}_r^{2k} \\ \bar{A}_r^{4k} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \bar{F}_1^{2k} \\ \bar{F}_2^{2k} \end{Bmatrix} = [\Lambda_{PT}^{2k}]^T \begin{Bmatrix} A_r^{2k} \\ A_r^{4k} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \bar{A}_r^{6k} \\ \bar{A}_r^{7j} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \bar{F}_1^{6k} \\ \bar{F}_2^{6k} \end{Bmatrix} = [\Lambda_{PT}^{6k}]^T \begin{Bmatrix} A_r^{6k} \\ A_r^{7j} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$



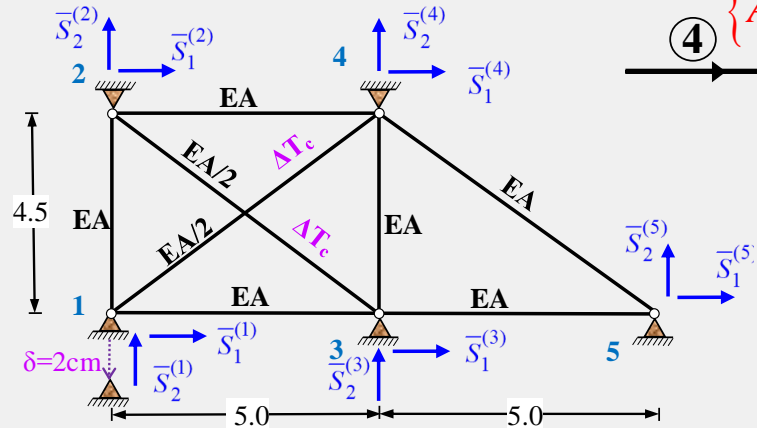
**Εξίσωση ισορροπίας κόμβου 4**

$$\{\bar{S}^{(4)}\} - \{\bar{A}_r^{2k}\} - \{\bar{A}_r^{4k}\} - \{\bar{A}_r^{6k}\} - \{\bar{A}_r^{7j}\} = \{0\}$$

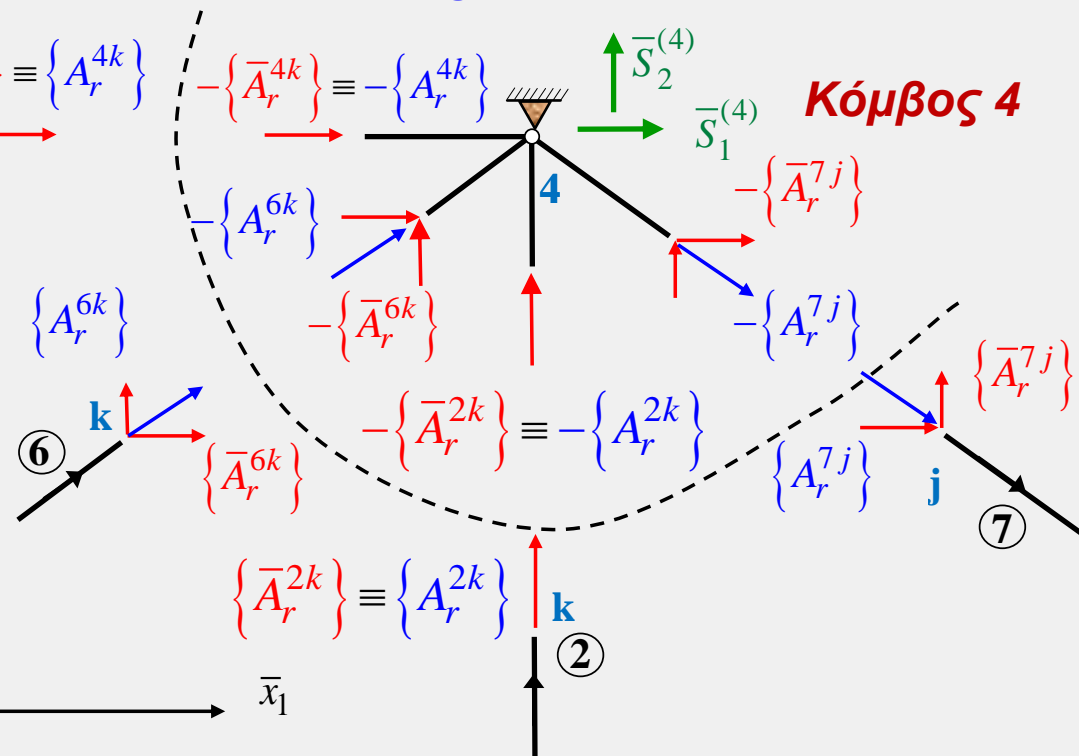
# ΕΠΙΠΕΔΟ ΔΙΚΤΥΩΜΑ ΥΠΟΒΑΛΛΟΜΕΝΟ ΣΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΑ ΦΟΡΤΙΑ

## Υπολογισμός δράσεων παγίωσης

### Παγιωμένος φορέας



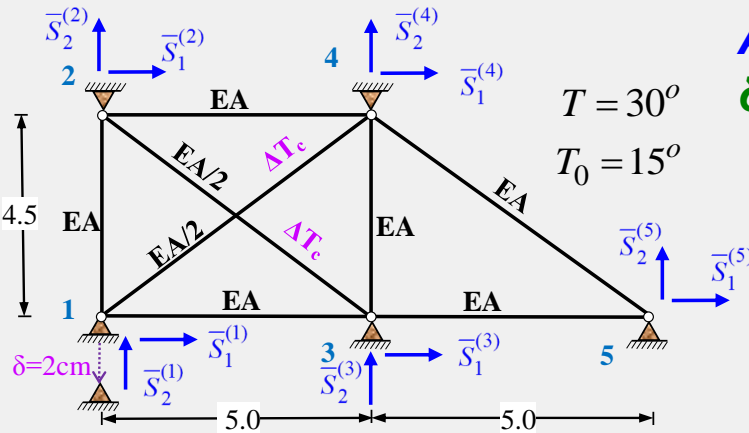
οι δράσεις παγίωσης σε κάθε κόμβο του παγιωμένου φορέα του δικτυώματος είναι ίσες με το άθροισμα των καθολικών ακραίων δράσεων των άκρων των μελών που καταλήγουν στον κόμβο αυτόν.



### Εξίσωση ισορροπίας κόμβου 4

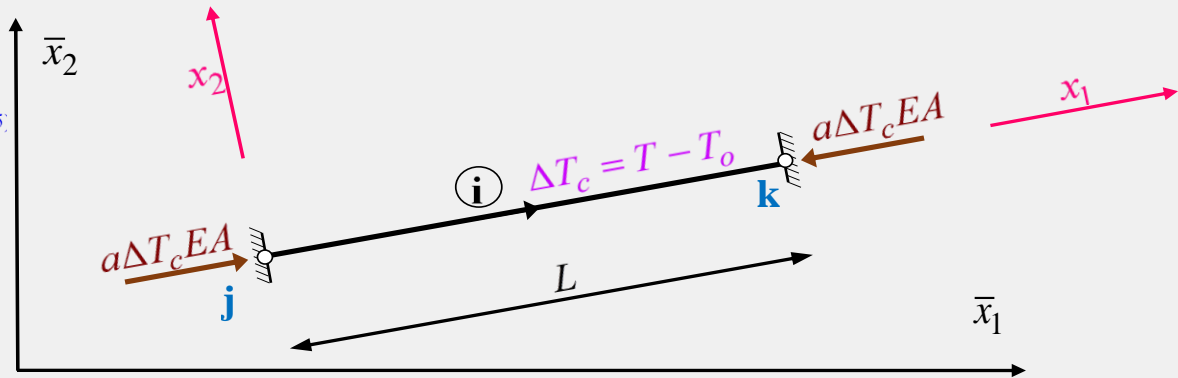
$$\{\bar{S}^{(4)}\} - \{\bar{A}_r^{2k}\} - \{\bar{A}_r^{4k}\} - \{\bar{A}_r^{6k}\} - \{\bar{A}_r^{7j}\} = \{0\}$$

# Εφαρμογή - ΕΠΙΠΕΔΟ ΔΙΚΤΥΩΜΑ ΥΠΟΒΑΛΛΟΜΕΝΟ ΣΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΑ ΦΟΡΤΙΑ



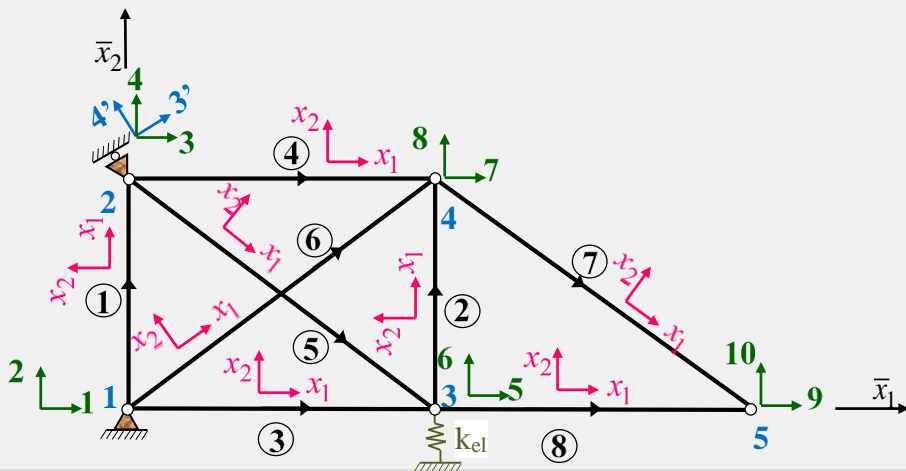
**Μέλη του παγιωμένου φορέα, υποβαλλόμενα σε κεντροβαρική θερμοκρασιακή φόρτιση**

**Ανάλυση παγιωμένου φορέα - Τοπικές ακραίες δράσεις μελών**

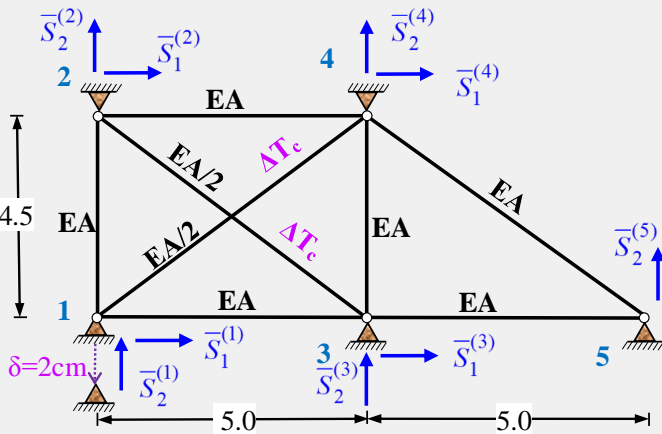


$$\{A_r^5\} = \begin{Bmatrix} \{A_r^{5j}\} \\ \{A_r^{5k}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{5j} \\ 0 \\ F_1^{5k} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha\Delta T_c E^5 A^5 \\ 0 \\ -\alpha\Delta T_c E^5 A^5 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 15.75 \\ 0 \\ -15.75 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

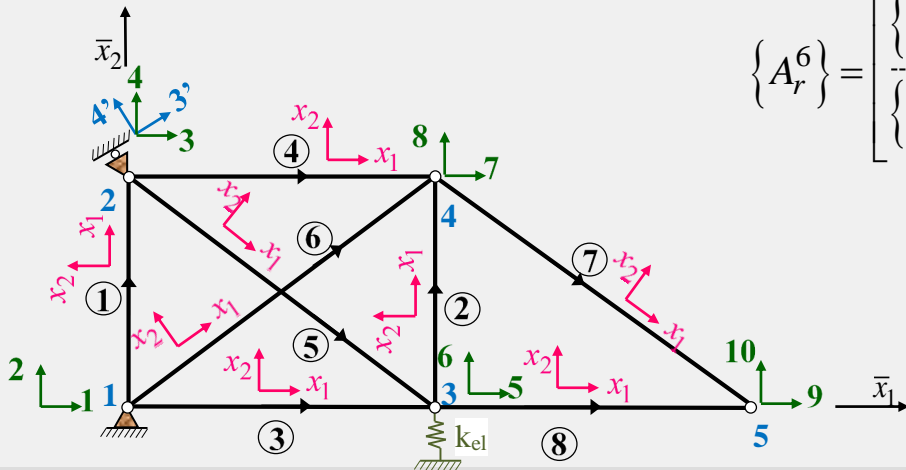
$$\{A_r^6\} = \begin{Bmatrix} \{A_r^{6j}\} \\ \{A_r^{6k}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{6j} \\ 0 \\ F_1^{6k} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha\Delta T_c E^6 A^6 \\ 0 \\ -\alpha\Delta T_c E^6 A^6 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 15.75 \\ 0 \\ -15.75 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



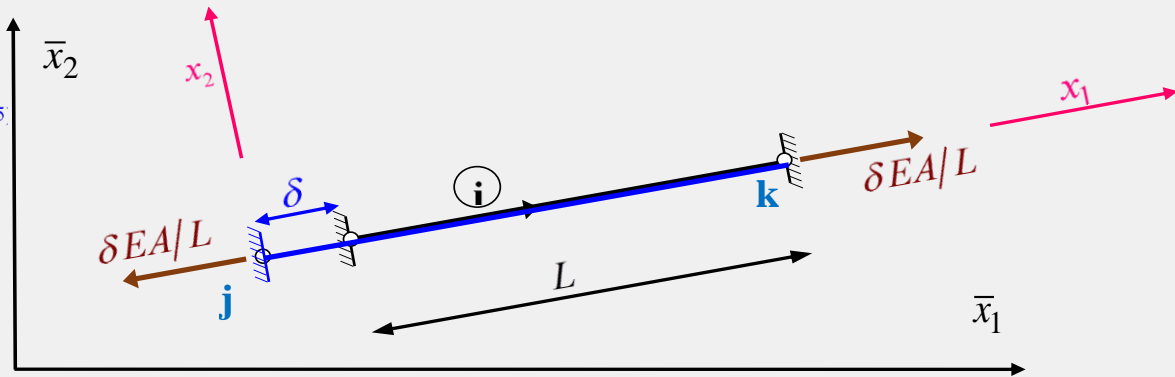
# Εφαρμογή - ΕΠΙΠΕΔΟ ΔΙΚΤΥΩΜΑ ΥΠΟΒΑΛΛΟΜΕΝΟ ΣΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΑ ΦΟΡΤΙΑ



**Μέλη του παγιωμένου φορέα, υποβαλλόμενα σε αλλαγή μήκους**



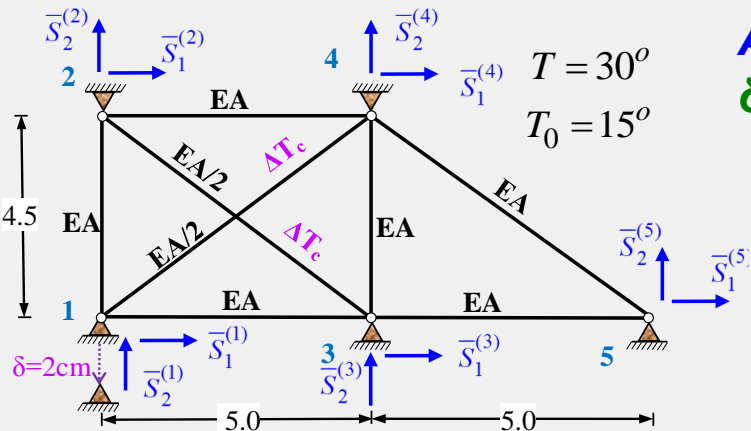
**Ανάλυση παγιωμένου φορέα - Τοπικές ακραίες δράσεις μελών**



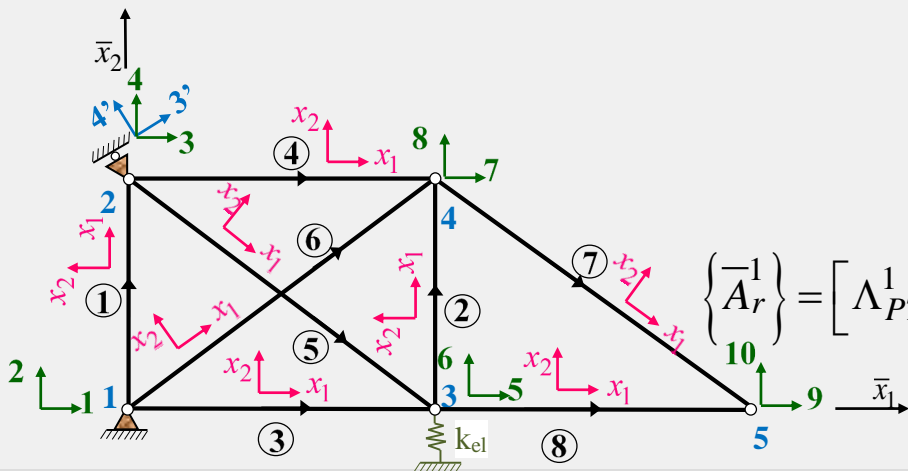
$$\{A_r^6\} = \begin{Bmatrix} \{A_r^{6j}\} \\ \{A_r^{6k}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{6j} \\ 0 \\ F_1^{6k} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\delta^6 E^6 A^6 / L^6 \\ 0 \\ \delta^6 E^6 A^6 / L^6 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \delta^6 = 2 \sin(41.987^\circ) \text{cm} = \begin{Bmatrix} -208.83 \\ 0 \\ 208.83 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{A_r^1\} = \begin{Bmatrix} \{A_r^{1j}\} \\ \{A_r^{1k}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{1j} \\ 0 \\ F_1^{1k} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\delta^1 E^1 A^1 / L^1 \\ 0 \\ \delta^1 E^1 A^1 / L^1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \delta^1 = 2\text{cm} = \begin{Bmatrix} -933.33 \\ 0 \\ 933.33 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

# Εφαρμογή - ΕΠΙΠΕΔΟ ΔΙΚΤΥΩΜΑ ΥΠΟΒΑΛΛΟΜΕΝΟ ΣΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΑ ΦΟΡΤΙΑ



**Μέλη του παγιωμένου φορέα, υποβαλλόμενα σε ενδιάμεση φόρτιση**



**Ανάλυση παγιωμένου φορέα - Καθολικές ακραίες δράσεις μελών**

$$\{A_r^1\} = \begin{Bmatrix} -933.33 \\ 0 \\ 933.33 \end{Bmatrix}$$

$$\{A_r^5\} = \begin{Bmatrix} 15.75 \\ 0 \\ -15.75 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

**Τοπικές ακραίες δράσεις**

$$\{A_r^6\} = \begin{Bmatrix} 15.75 - 208.83 \\ 0 \\ -15.75 + 208.83 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -193.08 \\ 0 \\ 193.08 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

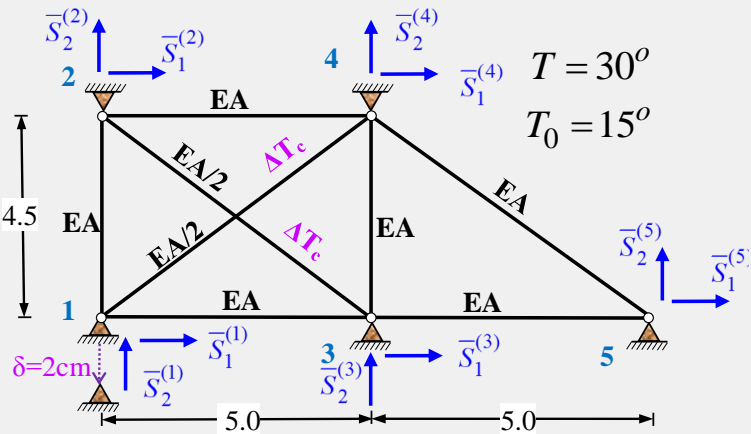
**Καθολικές ακραίες δράσεις**

$$\{\bar{A}_r^5\} = [\Lambda_{PT}^5]^T \{A_r^5\} = \begin{Bmatrix} 11.7069 \\ -10.5362 \\ -11.7069 \\ 10.5362 \end{Bmatrix}$$

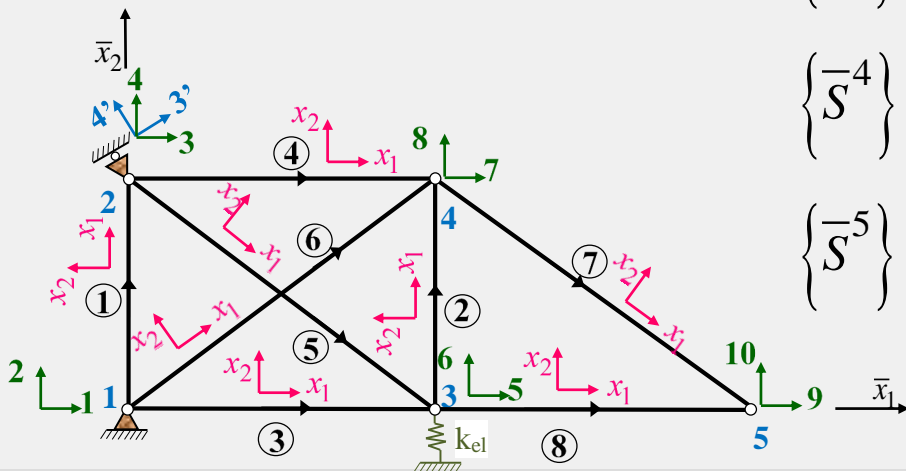
$$\{\bar{A}_r^1\} = [\Lambda_{PT}^1]^T \{A_r^1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -933.33 \\ 0 \\ 933.33 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{A}_r^6\} = [\Lambda_{PT}^6]^T \{A_r^6\} = \begin{Bmatrix} -143.51 \\ -129.16 \\ 143.51 \\ 129.16 \end{Bmatrix}$$

# Εφαρμογή - ΕΠΙΠΕΔΟ ΔΙΚΤΥΩΜΑ ΥΠΟΒΑΛΛΟΜΕΝΟ ΣΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΑ ΦΟΡΤΙΑ



**Μέλη του παγιωμένου φορέα, υποβαλλόμενα σε ενδιάμεση φόρτιση**



**Ανάλυση παγιωμένου φορέα - Υπολογισμός δράσεων παγίωσης**

$$\{\bar{S}^1\} = \{\bar{A}_r^{1j}\} + \{\bar{A}_r^{3j}\} + \{\bar{A}_r^{6j}\} = \begin{Bmatrix} -143.51 \\ -1062.49 \end{Bmatrix}$$

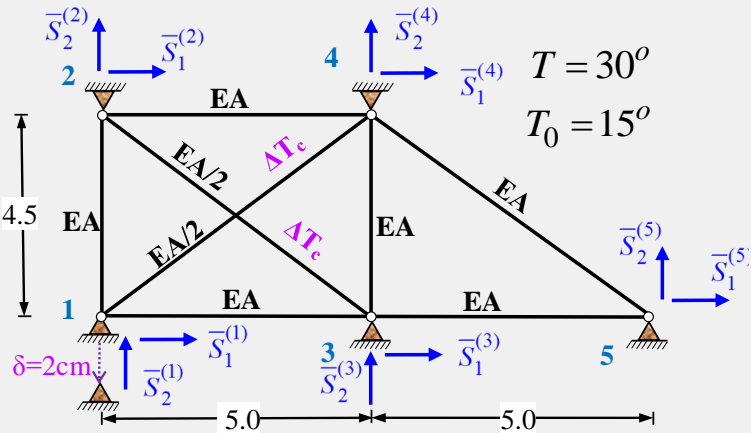
$$\{\bar{S}^2\} = \{\bar{A}_r^{1k}\} + \{\bar{A}_r^{4j}\} + \{\bar{A}_r^{5j}\} = \begin{Bmatrix} 11.7069 \\ 922.79 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{S}^3\} = \{\bar{A}_r^{2j}\} + \{\bar{A}_r^{3k}\} + \{\bar{A}_r^{5k}\} + \{\bar{A}_r^{8j}\} = \begin{Bmatrix} -11.7069 \\ 10.5362 \end{Bmatrix}$$

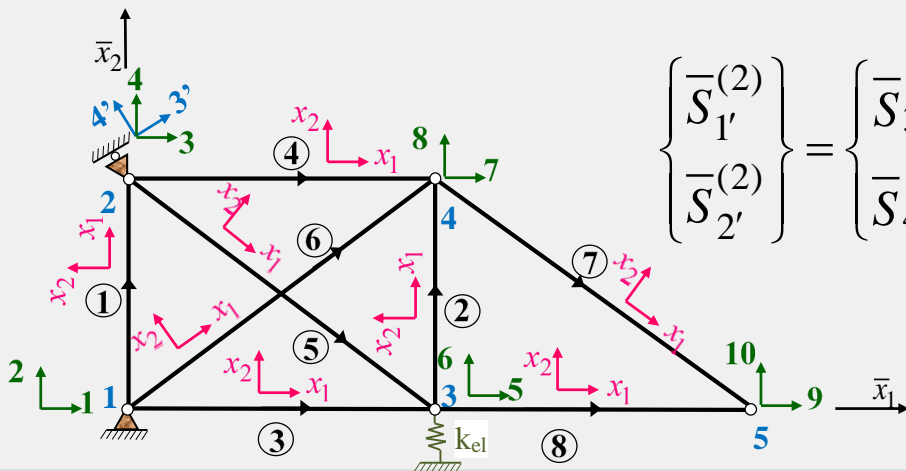
$$\{\bar{S}^4\} = \{\bar{A}_r^{2k}\} + \{\bar{A}_r^{4k}\} + \{\bar{A}_r^{6k}\} + \{\bar{A}_r^{7j}\} = \begin{Bmatrix} 143.51 \\ 129.16 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{S}^5\} = \{\bar{A}_r^{7k}\} + \{\bar{A}_r^{8k}\} = \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix}$$

# Εφαρμογή - ΕΠΙΠΕΔΟ ΔΙΚΤΥΩΜΑ ΥΠΟΒΑΛΛΟΜΕΝΟ ΣΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΑ ΦΟΡΤΙΑ



**Μέλη του παγιωμένου φορέα, υποβαλλόμενα σε ενδιάμεση φόρτιση**



**Ανάλυση παγιωμένου φορέα - Υπολογισμός δράσεων παγίωσης - Τροποποίηση δράσεων παγίωσης λόγω κεκλιμένης στήριξης στον κόμβο 2**

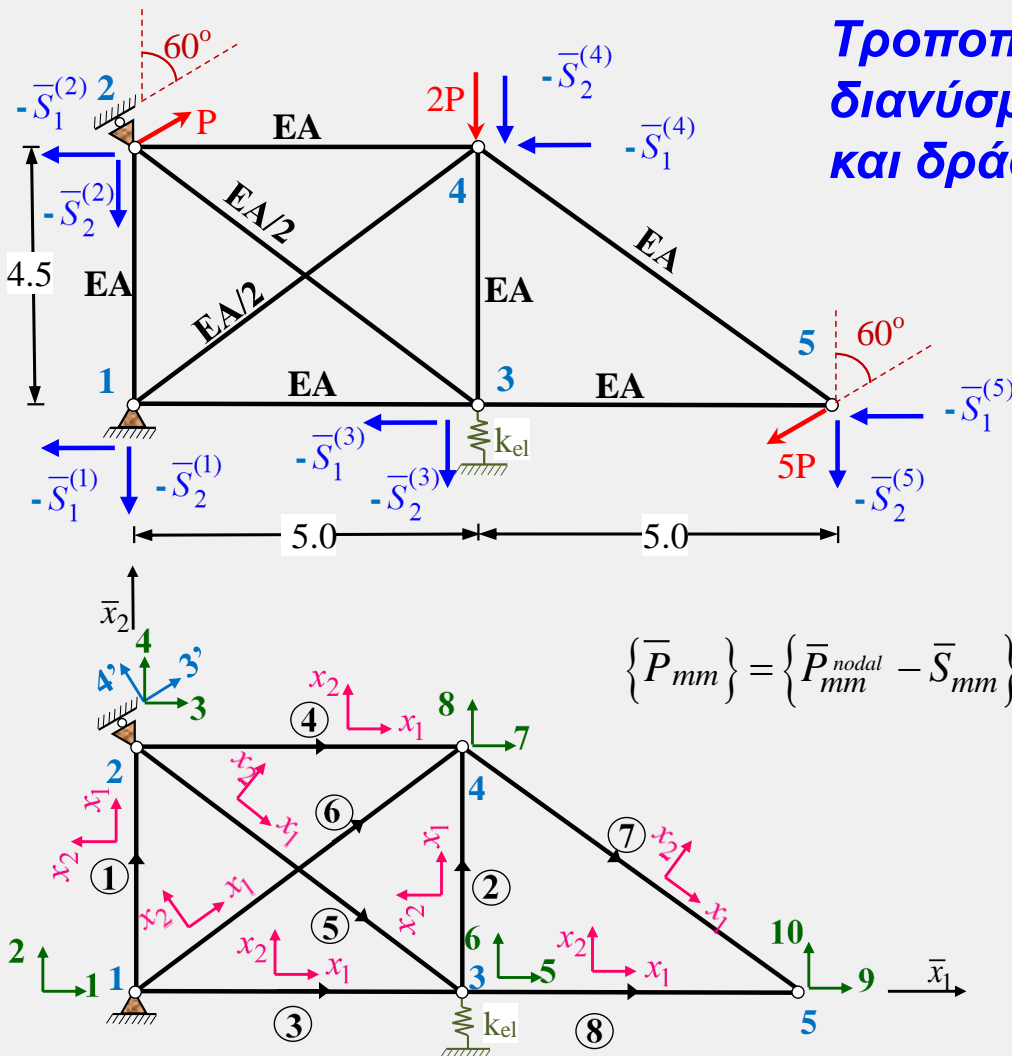
**Αρχικές δ.π.**

$$\left\{ \bar{S}^{(2)} \right\} = \left\{ \bar{A}_r^{1k} \right\} + \left\{ \bar{A}_r^{4j} \right\} + \left\{ \bar{A}_r^{5j} \right\} = \begin{Bmatrix} 11.7069 \\ 922.79 \end{Bmatrix}$$

**Τροποποιημένες δ.π.**

$$\begin{Bmatrix} \bar{S}_{1'}^{(2)} \\ \bar{S}_{2'}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{S}_{3'} \\ \bar{S}_{4'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{S}_1^{(2)} \\ \bar{S}_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 11.7069 \\ 922.79 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 471.53 \\ 793.31 \end{Bmatrix}$$

# Εφαρμογή - ΕΠΙΠΕΔΟ ΔΙΚΤΥΩΜΑ ΥΠΟΒΑΛΛΟΜΕΝΟ ΣΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΑ ΦΟΡΤΙΑ



Τροποποιημένα και αναδιατεταγμένα διανύσματα επικόμβιων μετατοπίσεων και δράσεων δικτυώματος

Διάνυσμα επικόμβιων δράσεων

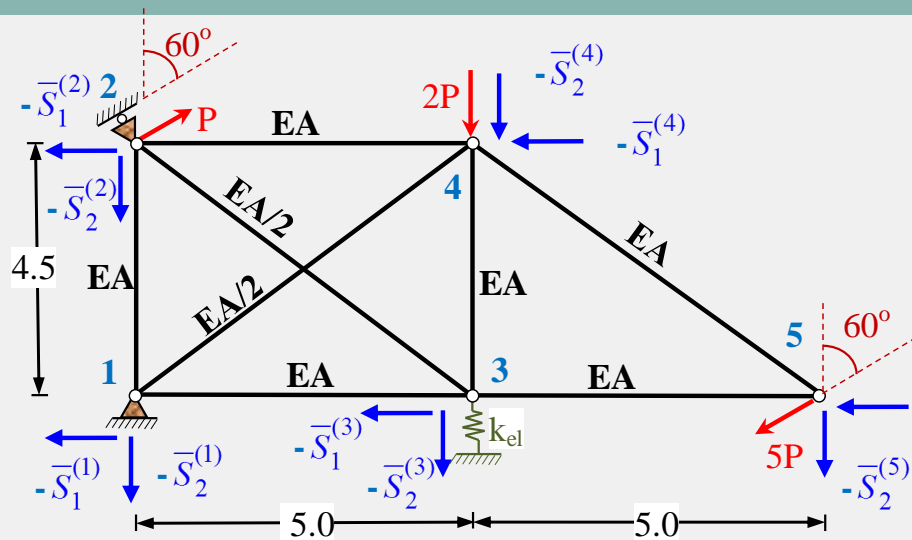
$$\{\bar{P}_{mm}\} = \{\bar{P}_{mm}^{nodal} - \bar{S}_{mm}\} = \begin{bmatrix} \{\bar{P}_f\} \\ \{\bar{P}_s\} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{Bmatrix} 50 - 471.53 \\ 11.7069 \\ -10.5362 \\ -143.51 \\ -100 - 129.16 \\ -167.24 \\ -185.82 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -421.53 \\ 11.7069 \\ -10.5362 \\ -143.51 \\ -229.16 \\ -167.24 \\ -185.82 \end{Bmatrix}$$


---


$$\begin{Bmatrix} \bar{P}_1^1 + 143.51 \\ \bar{P}_2^1 + 1062.49 \\ \bar{P}_2^2 - 793.31 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1^1 + 143.51 \\ \bar{P}_2^1 + 1062.49 \\ \bar{P}_2^2 - 793.31 \end{Bmatrix}$$

# Εφαρμογή - ΕΠΙΠΕΔΟ ΔΙΚΤΥΩΜΑ ΥΠΟΒΑΛΛΟΜΕΝΟ ΣΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΑ ΦΟΡΤΙΑ

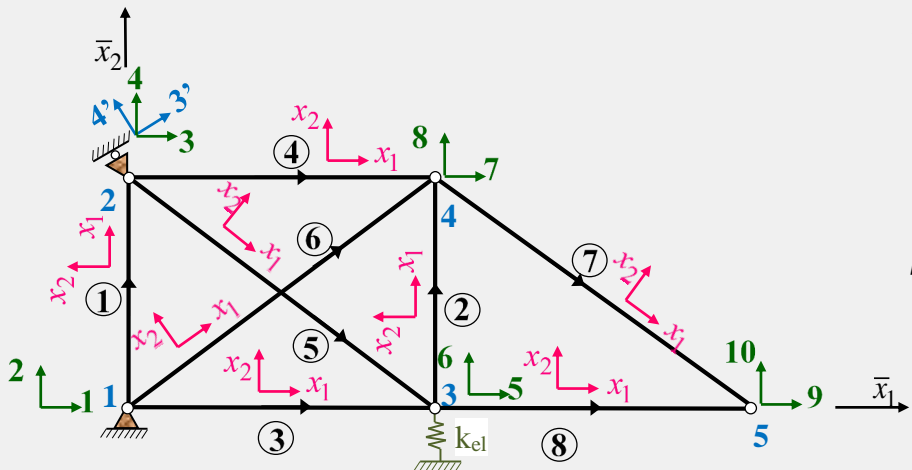


Τροποποιημένα και αναδιατεταγμένα διανύσματα επικόμβιων μετατοπίσεων και δράσεων δικτυώματος

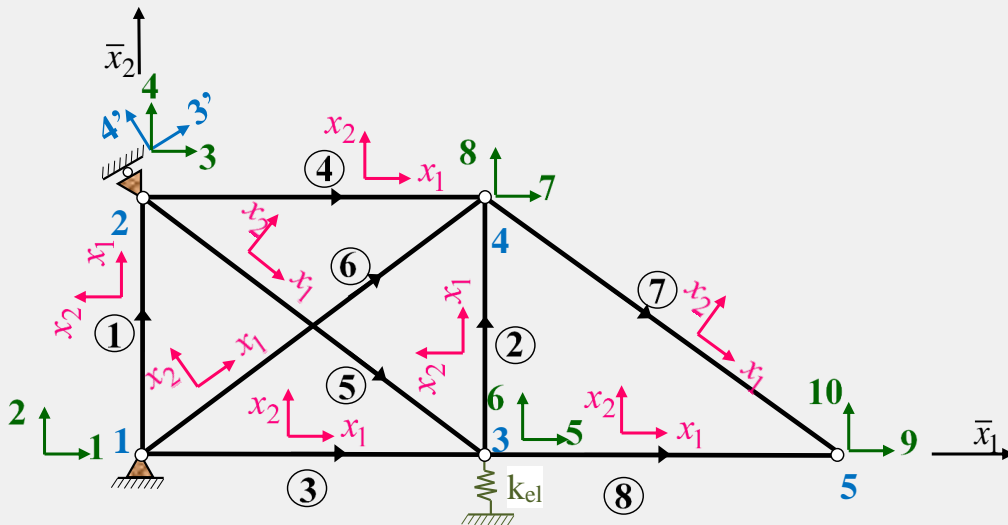
Διάνυσμα επικόμβιων μετατοπίσεων

έχει τεθεί μηδενικό παρά την κατακόρυφη υποχώρηση της στήριξης του κόμβου 1 του δικτυώματος, μια και η φόρτιση αυτή έχει ήδη ληφθεί υπόψη στον παγιωμένο φορέα

$$\{\bar{\Delta}_{mm}\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{\Delta}_f\} \\ \{\bar{\Delta}_s\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(2)} \\ \bar{\Delta}_1^{(3)} \\ \bar{\Delta}_2^{(3)} \\ \bar{\Delta}_1^{(4)} \\ \bar{\Delta}_2^{(4)} \\ \bar{\Delta}_1^{(5)} \\ \bar{\Delta}_2^{(5)} \\ \dots \\ \bar{\Delta}_1^{(1)} \\ \bar{\Delta}_2^{(1)} \\ \bar{\Delta}_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(2)} \\ \bar{\Delta}_1^{(3)} \\ \bar{\Delta}_2^{(3)} \\ \bar{\Delta}_1^{(4)} \\ \bar{\Delta}_2^{(4)} \\ \bar{\Delta}_1^{(5)} \\ \bar{\Delta}_2^{(5)} \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



# Εφαρμογή - ΕΠΙΠΕΔΟ ΔΙΚΤΥΩΜΑ ΥΠΟΒΑΛΛΟΜΕΝΟ ΣΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΑ ΦΟΡΤΙΑ



**Επίλυση –**

**Επικόμβιες μετατοπίσεις κατά τους ελεύθερους και επικόμβιες δράσεις (αντιδράσεις) κατά τους δεσμευμένους β.ε.**

$$\{\bar{\Delta}_f\} = [\bar{K}_{ff}]^{-1} \left( \{\bar{P}_f\} - [\bar{K}_{fs}] \{\bar{\Delta}_s\} \right)$$

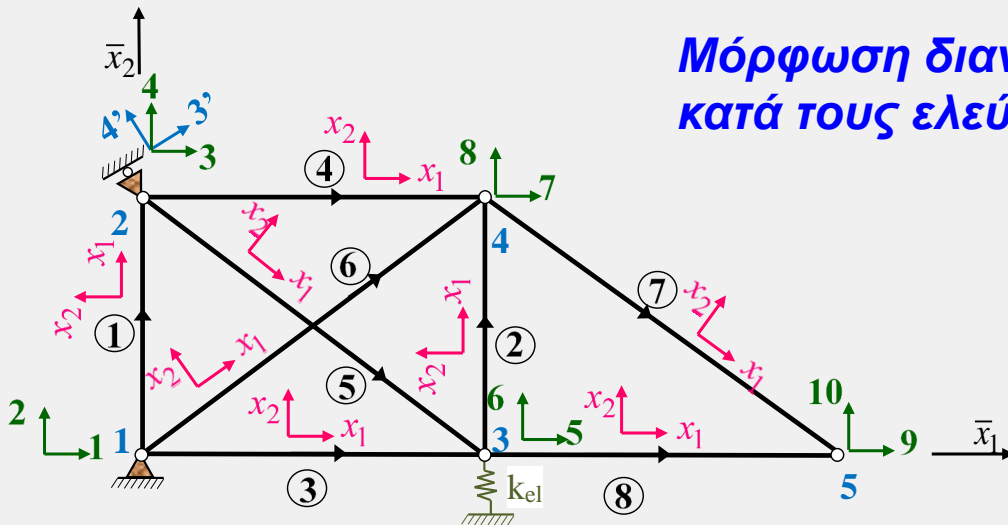
$$\{\bar{P}_s\} = [\bar{K}_{sf}] \{\bar{\Delta}_f\} + [\bar{K}_{ss}] \{\bar{\Delta}_s\}$$

$$\{\bar{P}_s\} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1^{(1)} \\ \bar{P}_2^{(1)} \\ \bar{P}_{2'}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 434.91 \\ -508.52 \\ 621.94 \end{Bmatrix}$$

$$\bar{R}_2^{(3)} = \bar{R}_6 = k_{el} \bar{\Delta}_2^{(3)}$$

$$\{\bar{\Delta}_f\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_{1'}^{(2)} \\ \bar{\Delta}_1^{(3)} \\ \bar{\Delta}_2^{(3)} \\ \bar{\Delta}_1^{(4)} \\ \bar{\Delta}_2^{(4)} \\ \bar{\Delta}_1^{(5)} \\ \bar{\Delta}_2^{(5)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0169 \\ -0.0095 \\ -0.0077 \\ -0.0089 \\ -0.0131 \\ -0.0184 \\ -0.0371 \end{Bmatrix}$$

# Εφαρμογή - ΕΠΙΠΕΔΟ ΔΙΚΤΥΩΜΑ ΥΠΟΒΑΛΛΟΜΕΝΟ ΣΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΑ ΦΟΡΤΙΑ



Μόρφωση διανύσματος επικόμβιων μετατοπίσεων κατά τους ελεύθερους β.ε.

Διάνυσμα επικόμβιων μετατοπίσεων

Τροποποίηση μετατοπίσεων στον κόμβο 2 λόγω κεκλιμένης στήριξης

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(2)} \\ \bar{\Delta}_2^{(2)} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \varphi^n & -\sin \varphi^n \\ \sin \varphi^n & \cos \varphi^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_{1'}^{(2)} \\ \bar{\Delta}_{2'}^{(2)} \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.0169 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0146 \\ -0.00845 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\{\bar{\Delta}\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(1)} \\ \bar{\Delta}_2^{(1)} \\ \bar{\Delta}_1^{(2)} \\ \bar{\Delta}_2^{(2)} \\ \bar{\Delta}_1^{(3)} \\ \bar{\Delta}_2^{(3)} \\ \bar{\Delta}_1^{(4)} \\ \bar{\Delta}_2^{(4)} \\ \bar{\Delta}_1^{(5)} \\ \bar{\Delta}_2^{(5)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \bar{\Delta}_{10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.0146 \\ -0.00845 \\ -0.0095 \\ -0.0077 \\ -0.0089 \\ -0.0131 \\ -0.0184 \\ -0.0371 \end{Bmatrix}$$

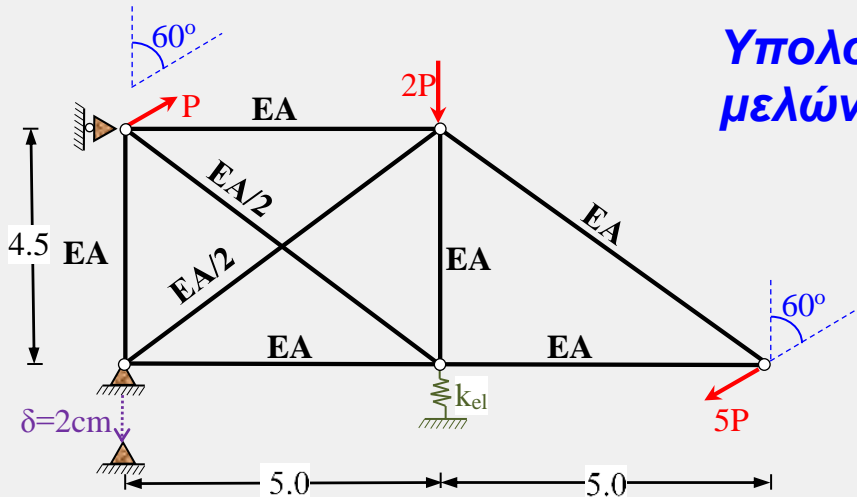
---

# *ΕΣΩΤΕΡΙΚΑ ΕΝΤΑΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ ΜΕΛΩΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ*

---

# ΕΣΩΤΕΡΙΚΑ ΕΝΤΑΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ ΜΕΛΩΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ

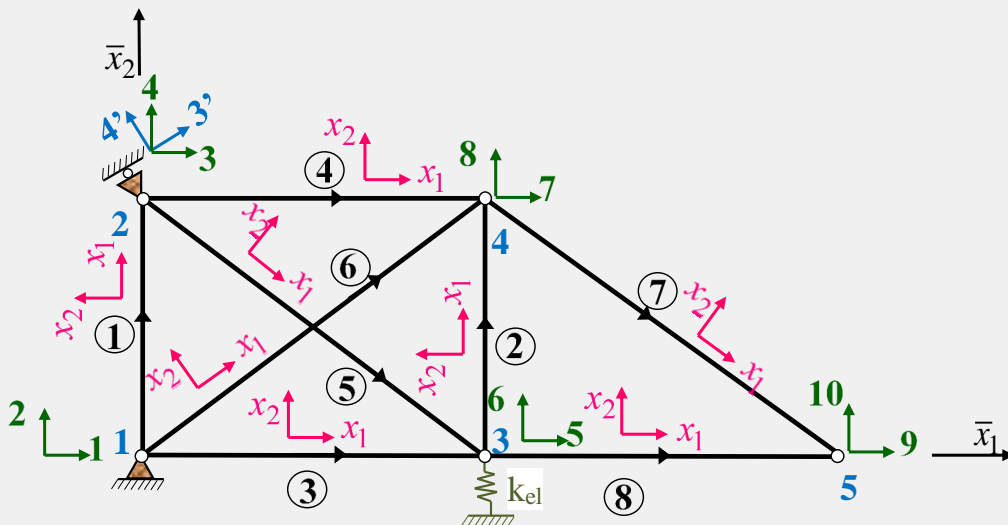
Υπολογισμός εσωτερικών εντατικών μεγεθών  
μελών δικτυώματος



$$\{A^i\} = \{A_r^i\} + [k^i] \{D^i\}$$

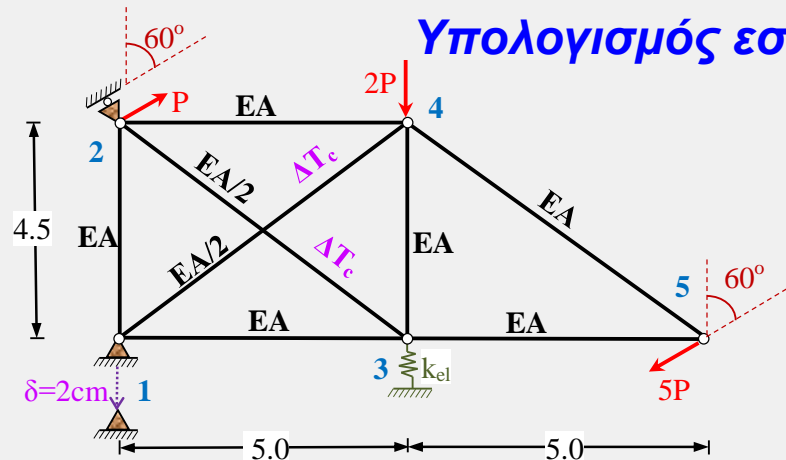
$$\{A^i\} = \{A_r^i\} + [k^i] [\Lambda_{PT}^i] \{\bar{D}^i\}$$

Το καθολικό μητρώο ακραίων μετατοπίσεων  $\{\bar{D}^i\}$  μπορεί να μορφωθεί γνωρίζοντας από την επίλυση της σχέσης στιβαρότητας το μητρώο των καθολικών επικόμβιων μετατοπίσεων του δικτυώματος  $\{\bar{\Delta}\}$  και λαμβάνοντας από αυτό τα κατάλληλα στοιχεία ανάλογα με τους κόμβους άκρων του μέλους  $i$ .

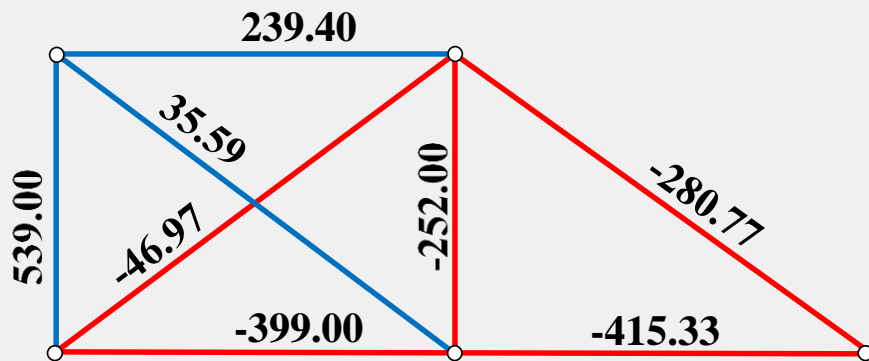


# Εφαρμογή - ΕΣΩΤΕΡΙΚΑ ΕΝΤΑΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ ΜΕΛΩΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ

## Υπολογισμός εσωτερικών εντατικών μεγεθών μελών δικτυώματος



Αξονικές δυνάμεις μελών  
επίπεδου δικτυώματος



$$\begin{Bmatrix} F_1^{1j} \\ F_1^{1k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -538.9966 \\ 538.9966 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} F_1^{2j} \\ F_1^{2k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 252.00 \\ -252.00 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_1^{3j} \\ F_1^{3k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 399.00 \\ -399.00 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} F_1^{4j} \\ F_1^{4k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -239.40 \\ 239.40 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_1^{5j} \\ F_1^{5k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -35.59 \\ 35.59 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} F_1^{6j} \\ F_1^{6k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 46.9695 \\ -46.9695 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} F_1^{7j} \\ F_1^{7k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 280.7707 \\ -280.7707 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_1^{8j} \\ F_1^{8k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 415.3334 \\ -415.3334 \end{Bmatrix}$$

