



Μέρος I: Μονοβάθμια Συστήματα

Διδάσκων: Ε.Ι. Σαπουντζάκης

Δυναμική των Κατασκευών

Περιεχόμενα

1. Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης
2. Ελεύθερες Ταλαντώσεις Μονοβαθμίων Συστημάτων
3. Απόκριση σε Αρμονικές και Περιοδικές Διεγέρσεις
4. Απόκριση σε Αυθαίρετες, Βαθμιδωτές και Παλμικές Διεγέρσεις
5. Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης
6. Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων
7. Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα

Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

1. Προεπισκόπηση – Σεισμική Διέγερση

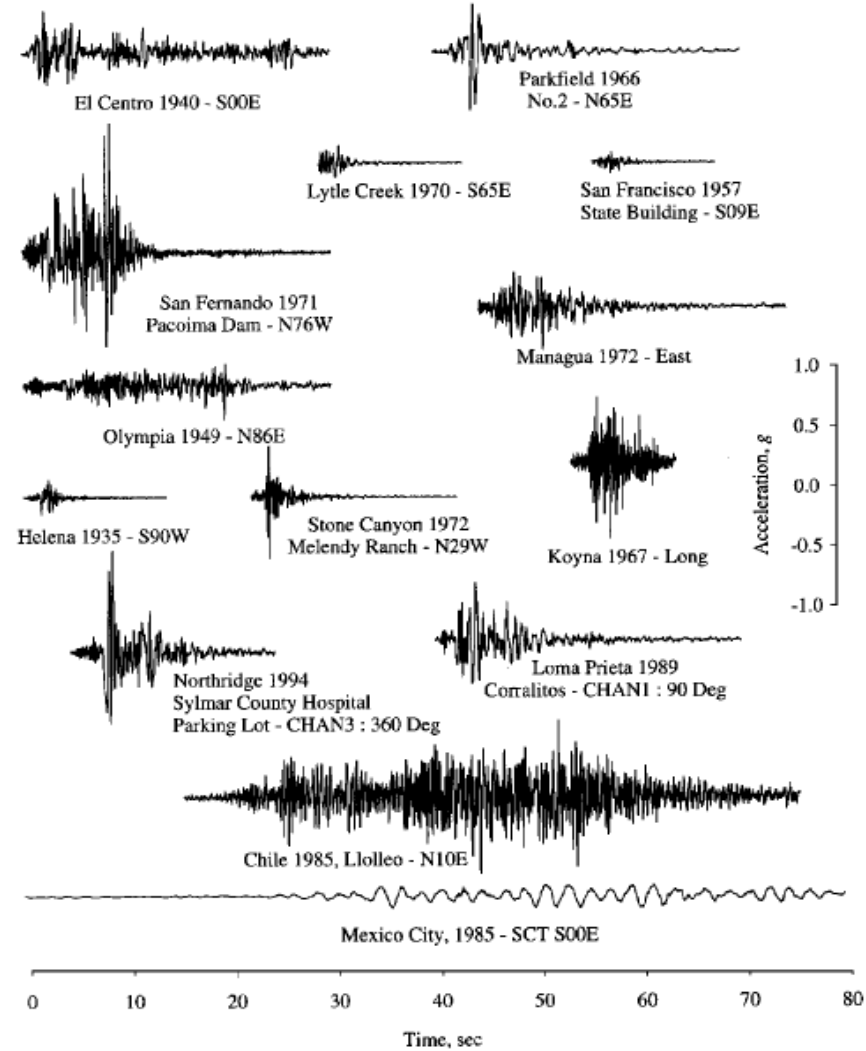
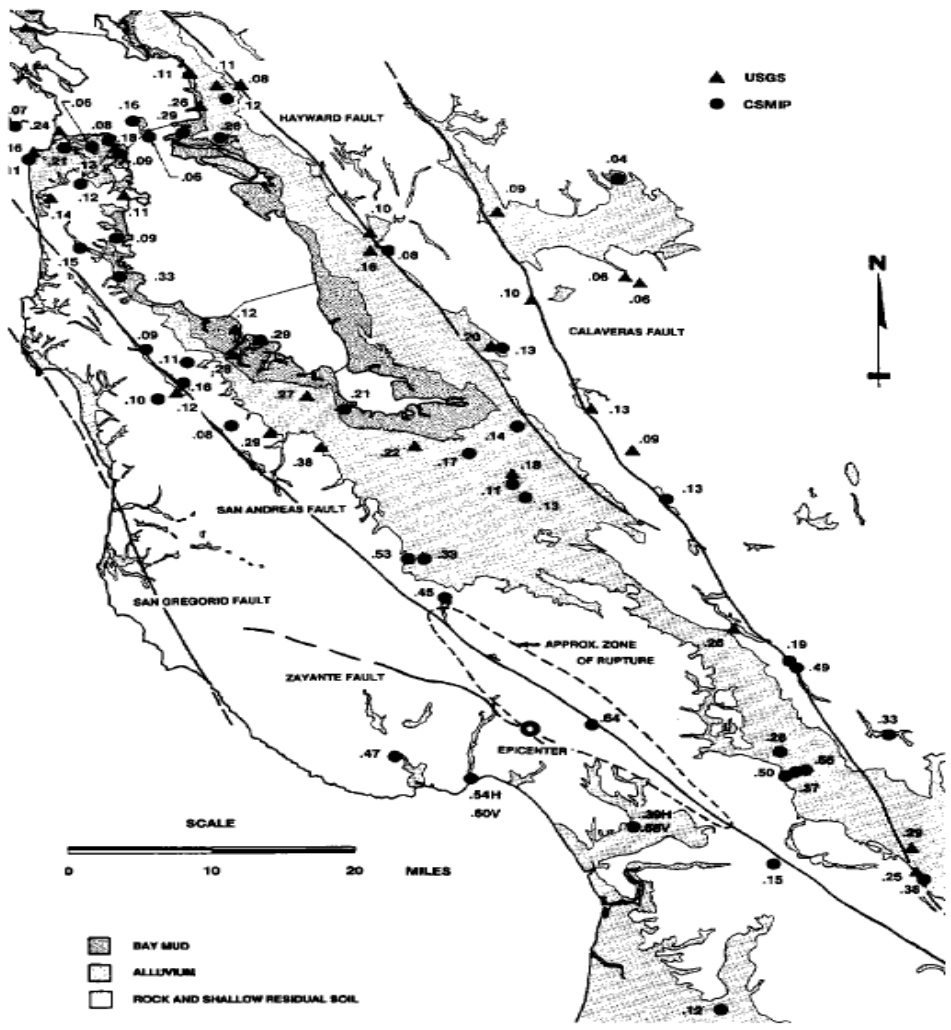
Μια από τις πιο σημαντικές εφαρμογές της θεωρίας της δυναμικής των κατασκευών είναι στην ανάλυση της απόκρισης τους σε βίαιη εδαφική δόνηση – σεισμό.

- Θεώρηση σεισμικής απόκρισης – παραμορφώσεις, τάσεις, εσωτερικές δυνάμεις των στοιχείων κλπ ως συνάρτηση του χρόνου.
- Θεώρηση φάσματος απόκρισης – κεντρική στην αντισεισμική μηχανική.

Για τους σκοπούς του μηχανικού, η χρονική μεταβολή της εδαφικής επιτάχυνσης είναι ο πιο χρήσιμος τρόπος καθορισμού της δόνησης του εδάφους κατά την διάρκεια ενός σεισμού.

Το βασικό όργανο καταγραφής τριών συνιστωσών της εδαφικής δόνησης κατά την διάρκεια σεισμών είναι ο επιταχυνσιογράφος ισχυρής κίνησης, ο οποίος τίθεται σε λειτουργία με τα πρώτα κύματα του σεισμού.

Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων



Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

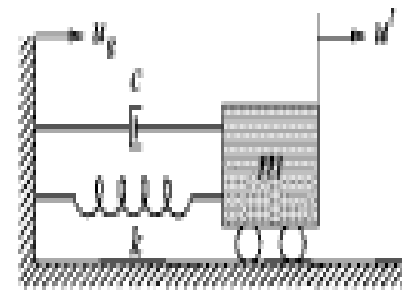
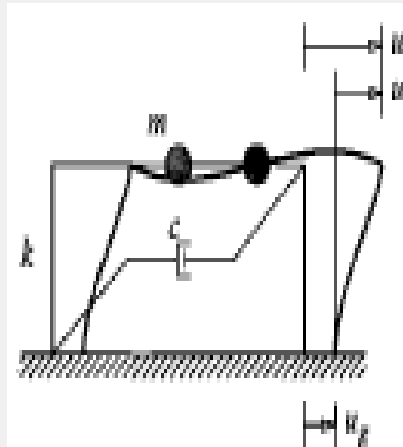
2. Εξίσωση Κίνησης

Η εξίσωση γραμμικού μονοβαθμίου συστήματος το οποίο υπόκειται σε εδαφική επιτάχυνση, διαιρώντας με την μάζα γράφεται ως:

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2u = -\ddot{u}_g(t)$$

Η εδαφική επιτάχυνση κατά τη διάρκεια ενός σεισμού μεταβάλλεται ακανόνιστα, επομένως οι αριθμητικές μέθοδοι είναι αναγκαίες.

Ύψιστου ενδιαφέροντος είναι η παραμόρφωση του συστήματος $u(t)$



Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

2. Εξίσωση Κίνησης

Η εξίσωση γραμμικού μονοβαθμίου συστήματος το οποίο υπόκειται σε εδαφική επιτάχυνση, διαιρώντας με την μάζα γράφεται ως:

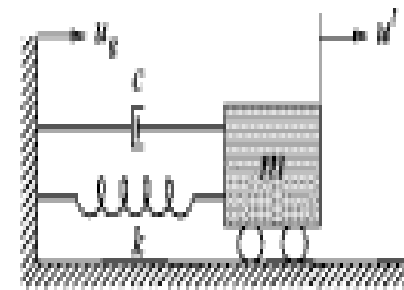
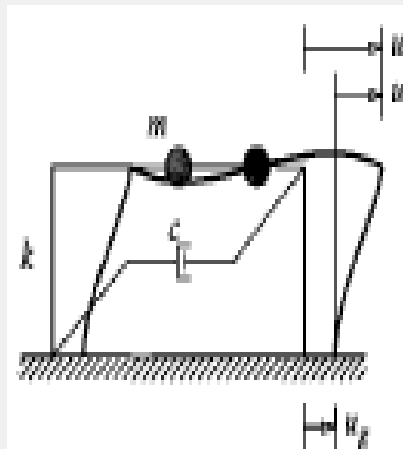
$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2u = -\ddot{u}_g(t)$$

Η εδαφική επιτάχυνση κατά τη διάρκεια ενός σεισμού μεταβάλλεται ακανόνιστα, επομένως οι αριθμητικές μέθοδοι είναι αναγκαίες.

Ύψιστου ενδιαφέροντος είναι η παραμόρφωση του συστήματος $u(t)$

3. Μεγέθη Απόκρισης

Τα εντατικά μεγέθη στις δοκούς και τα υποστυλώματα του μονώροφου πλαισίου συνδέονται γραμμικά με την μετατόπιση της μάζας.

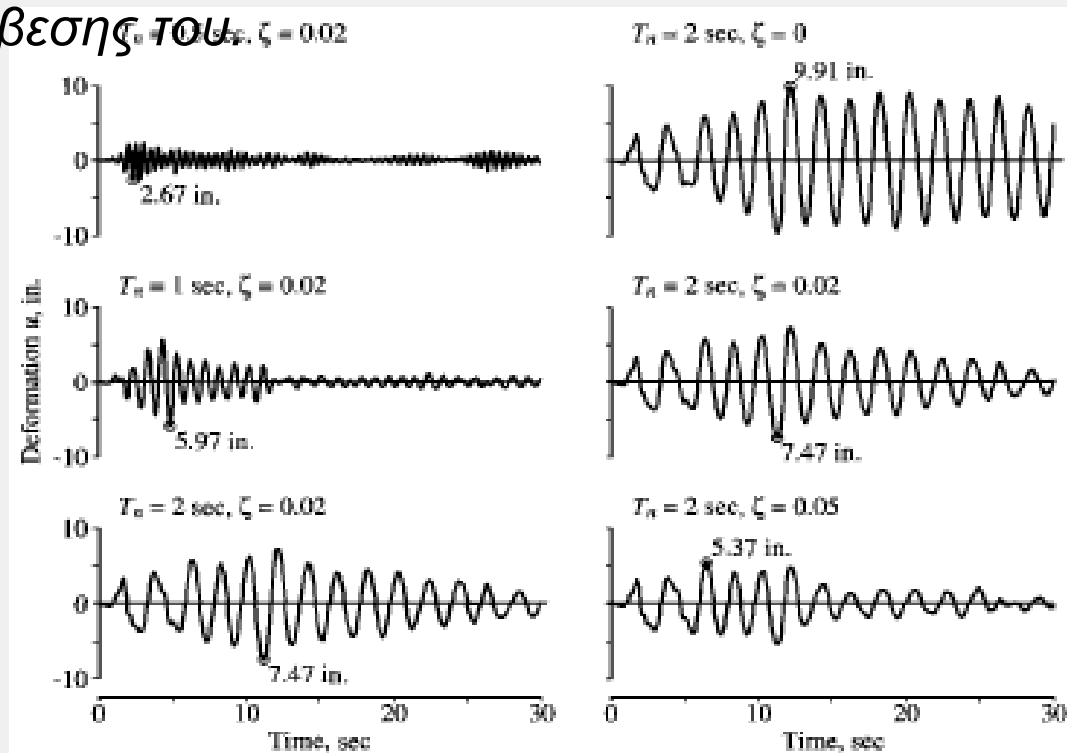


Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

4. Χρονο – Ιστορία Απόκρισης

Για δεδομένη εδαφική κίνηση, η απόκριση μετατόπισης ενός μονοβάθμιου συστήματος εξαρτάται μόνο από την ιδιοπερίοδο ταλάντωσης του συστήματος και τον λόγο απόσβεσης του.

Στο σχήμα παρουσιάζεται η απόκριση μετατόπισης τριών διαφορετικών συστημάτων στην εδαφική επιτάχυνση του *EI Centro*. Ο λόγος απόσβεσης $\zeta=2\%$ είναι ο ίδιος στα τρία συστήματα, ώστε μόνο οι διαφορές στις ιδιοπεριόδους τους να είναι υπεύθυνες για τις διαφορές στις αποκρίσεις.



Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

4. Χρονο – Ιστορία Απόκρισης

Από τη στιγμή που η χρονο-ιστορία απόκρισης μετατόπισης υπολογιστεί με δυναμική ανάλυση, οι εσωτερικές δυνάμεις καθορίζονται από στατική ανάλυση σε κάθε χρονική στιγμή.

Ισοδύναμη στατική φόρτιση $f_s = ku(t)$

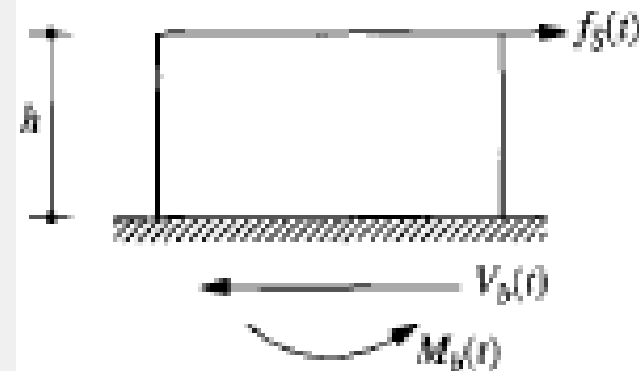
Εκφράζοντας την k συναρτήσει της μάζας $f_s = m\omega_n^2 u(t) = mA(t)$

Οπότε η f_s είναι ίση με m φορές την $A(t)$, ψευδο-επιτάχυνση και όχι την ολική επιτάχυνση $\ddot{u}^t(t)$

Η απόκριση $A(t)$ υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας την κάθε $u(t)$ με το αντίστοιχο $\omega_n^2 = (2\pi / T_n)^2$

Τέμνουσα βάσης: $V_b(t) = f_s(t) = mA(t)$

Ροπή ανατροπής: $M_b(t) = hf_s(t) = hV_b(t)$



Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

5. Έννοια του Φάσματος Απόκρισης

Ο G.W. Housner έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην ευρεία αποδοχή της θεώρησης του φάσματος σεισμικής απόκρισης που είχε παρουσιασθεί από τον M.A. Biot (1932).

Η γραφική απεικόνιση της μέγιστης τιμής ενός μεγέθους απόκρισης ως συνάρτησης της ιδιοπεριόδου ταλάντωσης T_n του συστήματος (ή κάποιας σχετικής παραμέτρου ω_n, f_n) αποκαλείται φάσμα απόκρισης του μεγέθους.

- Φάσμα απόκρισης μετατόπισης $u_0(T_n, \zeta) \equiv \max_t |u(t, T_n, \zeta)|$
- Φάσμα απόκρισης ταχύτητας $\dot{u}_0(T_n, \zeta) \equiv \max_t |\dot{u}(t, T_n, \zeta)|$
- Φάσμα απόκρισης ψευδο-ταχύτητας
- Φάσμα απόκρισης επιτάχυνσης $\ddot{u}_0(T_n, \zeta) \equiv \max_t |\ddot{u}(t, T_n, \zeta)|$
- Φάσμα απόκρισης ψευδο-επιτάχυνσης

Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

6. Φάσματα Απόκρισης Ψευδο-Ταχύτητας & Ψευδο-Επιτάχυνσης Φάσματα απόκρισης ψευδο-ταχύτητας

Έστω ποσότητα V για ένα μονοβάθμιο σύστημα με ιδιοσυχνότητα ω_n που σχετίζεται με τη μέγιστη μετατόπιση του $D_0 = u_0$ λόγω σεισμικής κίνησης

$$V = \omega_n D = \frac{2\pi}{T_n} D$$

Η ποσότητα V έχει μονάδες ταχύτητας. Συνδέεται με τη μέγιστη τιμή της ενέργειας παραμόρφωσης E_{S0} που αποθηκεύεται στο σύστημα κατά την διάρκεια του σεισμού:

$$E_{S0} = \frac{1}{2} k u_0^2 = \frac{1}{2} k (V / \omega_n)^2 = \frac{1}{2} m V^2$$

Η Ψευδο-Ταχύτητα V δεν είναι ίδια με την μέγιστη ταχύτητα παρότι έχει τις σωστές μονάδες.

Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

6. Φάσματα Απόκρισης Ψευδο-Ταχύτητα & Ψευδο-Επιτάχυνση Φάσματα απόκρισης ψευδο-επιτάχυνσης

Έστω ποσότητα A για ένα μονοβάθμιο σύστημα με ιδιοσυχνότητα ω_n που σχετίζεται με τη μέγιστη μετατόπιση του $D_0 = u_0$ λόγω σεισμικής κίνησης

$$A = \omega_n^2 D = \left(\frac{2\pi}{T_n} \right)^2 D$$

Η ποσότητα A έχει μονάδες επιτάχυνσης. Συνδέεται με τη μέγιστη τιμή της τέμνουσας βάσης V_{b0} :

$$V_b(t) = f_s(t) = mA(t)$$

Η μέγιστη τέμνουσα βάσης V_{b0} μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

$$V_{b0} = \frac{A}{g} w$$

Όπου w το βάρος της κατασκευής
και A/g συντελεστής τέμνουσας βάσης

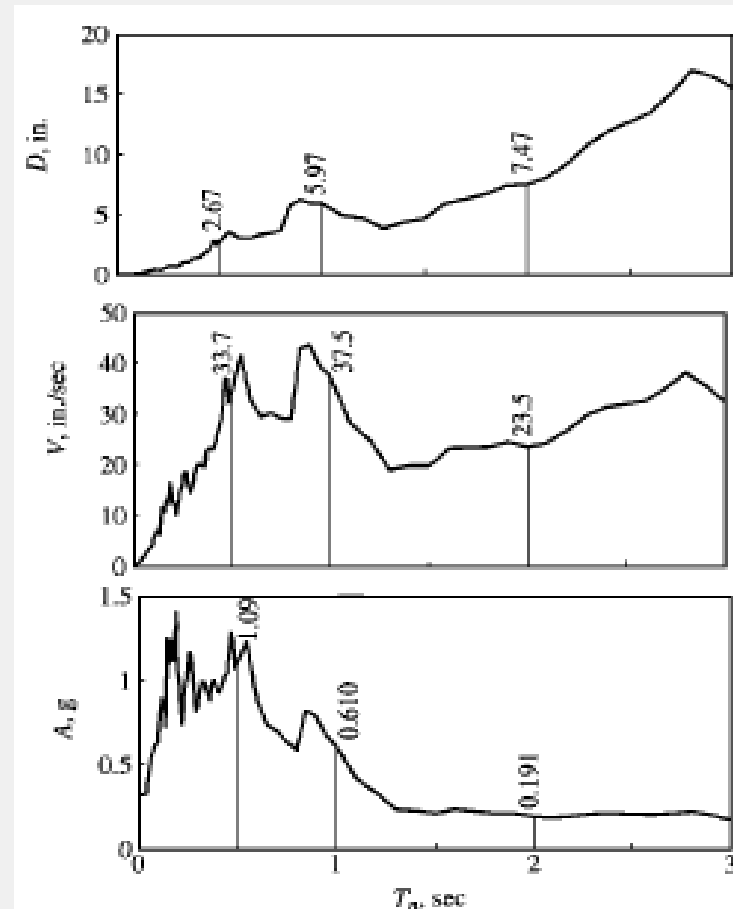
Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

6. Φάσματα Απόκρισης Ψευδο-Ταχύτητας & Ψευδο-Επιτάχυνσης

Το φάσμα απόκρισης μετατόπισης είναι η γραφική απεικόνιση της D ως συνάρτησης της ιδιοπεριόδου ταλάντωσης T_n .

Το φάσμα απόκρισης ψευδο-ταχύτητας είναι η γραφική απεικόνιση της V ως συνάρτησης της ιδιοπεριόδου ταλάντωσης T_n .

Το φάσμα απόκρισης ψευδο-επιτάχυνσης είναι η γραφική απεικόνιση του A ως συνάρτησης της ιδιοπεριόδου ταλάντωσης T_n .



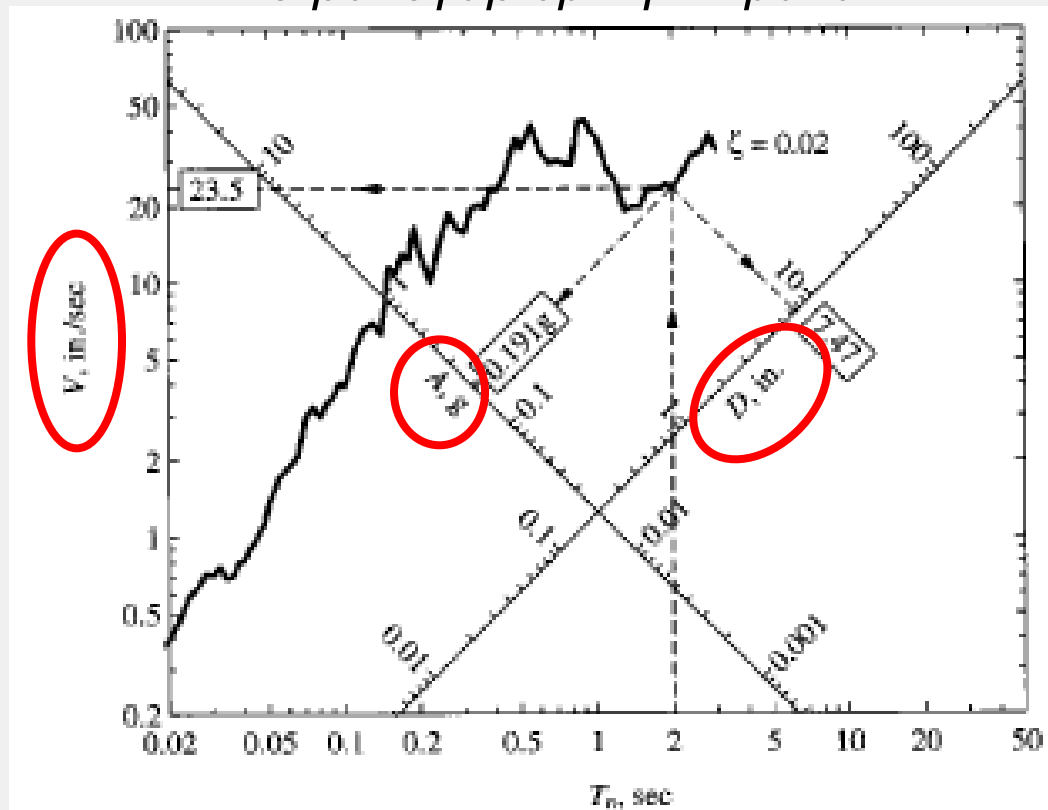
Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

6. Φάσματα Απόκρισης Ψευδο-Ταχύτητας & Ψευδο-Επιτάχυνσης Συνδυασμένο φάσματα D-V-A Τετραλογαριθμική Κλίμακα

Η συνδυασμένη γραφική απεικόνιση που δείχνει και τις 3 φασματικές ποσότητες αναπτύχθηκε από τους Α.Σ. Βελέτσο και Ν.Μ. Newmark (1960)

Η ολοκληρωμένη παρουσίαση είναι δυνατή, επειδή οι ποσότητες αλληλοσχετίζονται με:

$$\frac{A}{\omega_n} = V = \omega_n D \quad \text{ή} \quad \frac{T_n}{2\pi} A = V = \frac{2\pi}{T_n} D$$



Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

6. Φάσματα Απόκρισης Ψευδο-Ταχύτητας & Ψευδο-Επιτάχυνσης Κατασκευή του φάσματος

1. Αριθμητικός καθορισμός της εδαφικής επιτάχυνσης $\ddot{u}_g(t)$ (τυπικά ανά 0,02sec)
2. Επιλογή της ιδιοπεριόδου T_n και του λόγου απόσβεσης ζ
3. Υπολογισμός της απόκρισης $u(t)$ με οποιαδήποτε από τις γνωστές μεθόδους
4. Καθορισμός της μέγιστης τιμής u_0 της $u(t)$
5. Φασματικές ποσότητες $D = u_0$ $V = (2\pi/T_n)D$ $A = (2\pi/T_n)^2 D$
6. Επανάληψη των βημάτων 2 έως 5 για το εύρος των T_n και ζ που καλύπτουν όλα τα πιθανά συμβάντα που ενδιαφέρουν τους μηχανικούς
7. Παρουσίαση των αποτελεσμάτων των βημάτων 2 έως 6 γραφικά για την παραγωγή τριών ξεχωριστών φασμάτων ή ενός συνδυασμένου.

Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

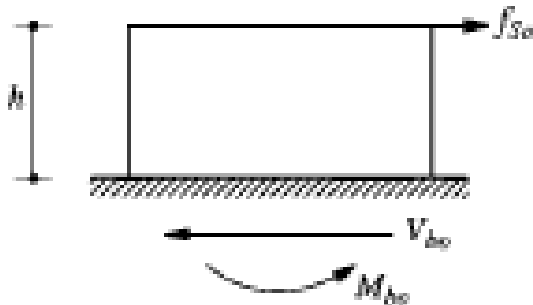
7. Μέγιστη Απόκριση της Κατασκευής από το Φάσματα Απόκρισης

Εάν το φάσμα απόκρισης για μια δεδομένη συνιστώσα μιας εδαφικής κίνησης είναι διαθέσιμο, τότε η τιμή της μετατόπισης ή εσωτερικής δύναμης σε οποιοδήποτε γραμμικό σύστημα μπορεί να καθοριστεί εύκολα.

Αναλόγως της ιδιοπεριόδου T_n και του λόγου απόσβεσης ζ οι τιμές D , V , A διαβάζονται από το φάσμα.

$$u_0 = D = \frac{T_n}{2\pi} V = \left(\frac{T_n}{2\pi} \right)^2 A$$

και η μέγιστη τιμή του ισοστατικού στατικού φορτίου f_{S0} είναι



$$f_{S0} = kD = mA \begin{cases} V_{b0} = kD = mA \\ M_{b0} = hV_{b0} \end{cases}$$

Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

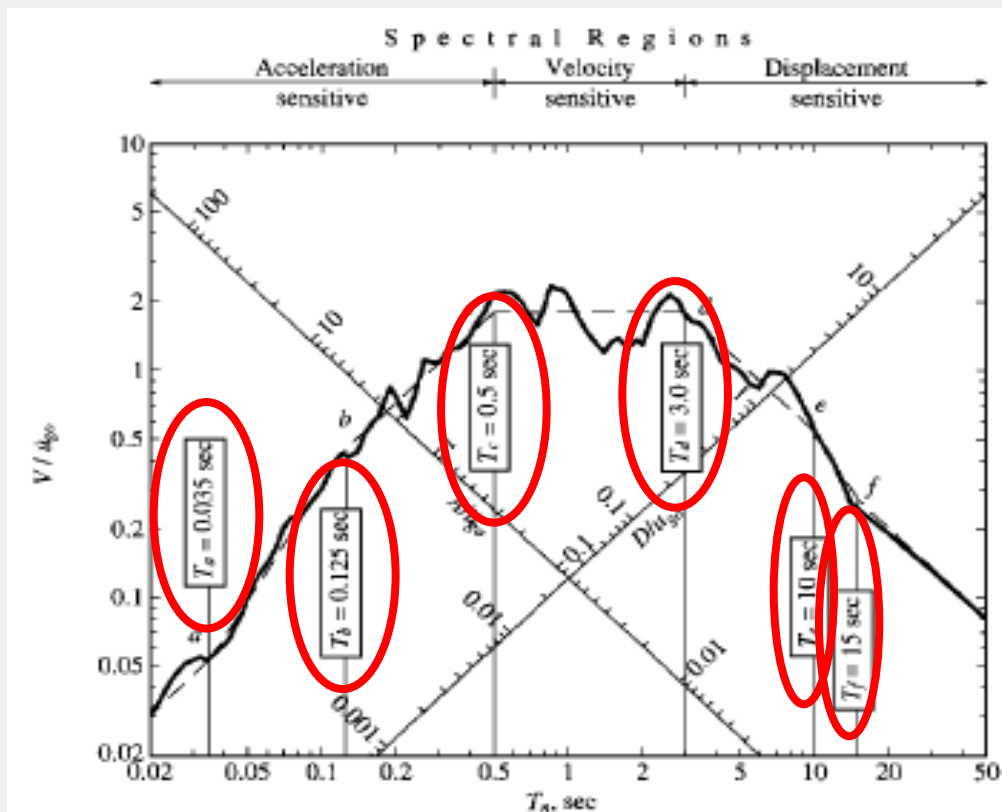
8. Χαρακτηριστικά του Φάσματος Απόκρισης

Το φάσμα απόκρισης χωρίζεται σε διάφορες περιοχές της ιδιοπεριόδου.

- Για σύστημα με πολύ μικρή περίοδο

$$T_n < T_a = 0.035 \text{ sec}$$

εξαιρετικά δύσκαμπτο σύστημα
η A πλησιάζει την \ddot{u}_{g0}
η D είναι πολύ μικρή.



Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

8. Χαρακτηριστικά του Φάσματος Απόκρισης

Το φάσμα απόκρισης χωρίζεται σε διάφορες περιοχές της ιδιοπεριόδου.

- Για σύστημα με πολύ μικρή περίοδο

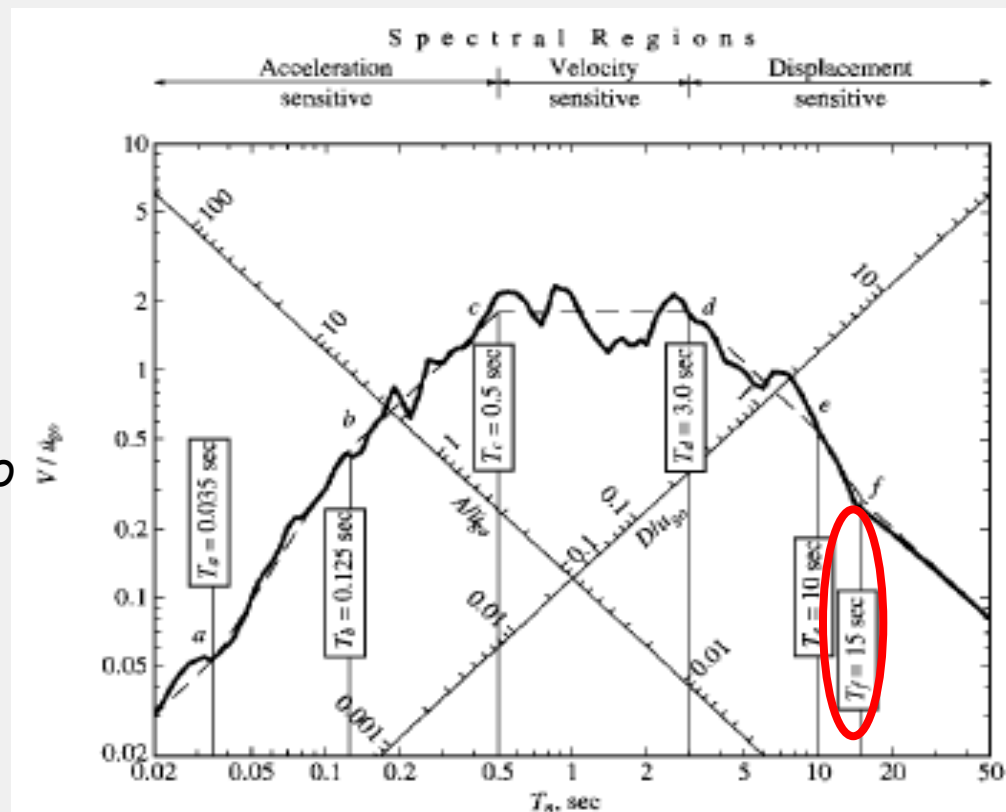
$$T_n < T_a = 0.035 \text{ sec}$$

εξαιρετικά δύσκαμπτο σύστημα
η A πλησιάζει την \ddot{u}_{g0}
η D είναι πολύ μικρή.

- Για σύστημα με πολύ μεγάλη περίοδο

$$T_n > T_f = 15 \text{ sec}$$

εξαιρετικά εύκαμπτο σύστημα
η D πλησιάζει την u_{g0}
η A είναι πολύ μικρή.



Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

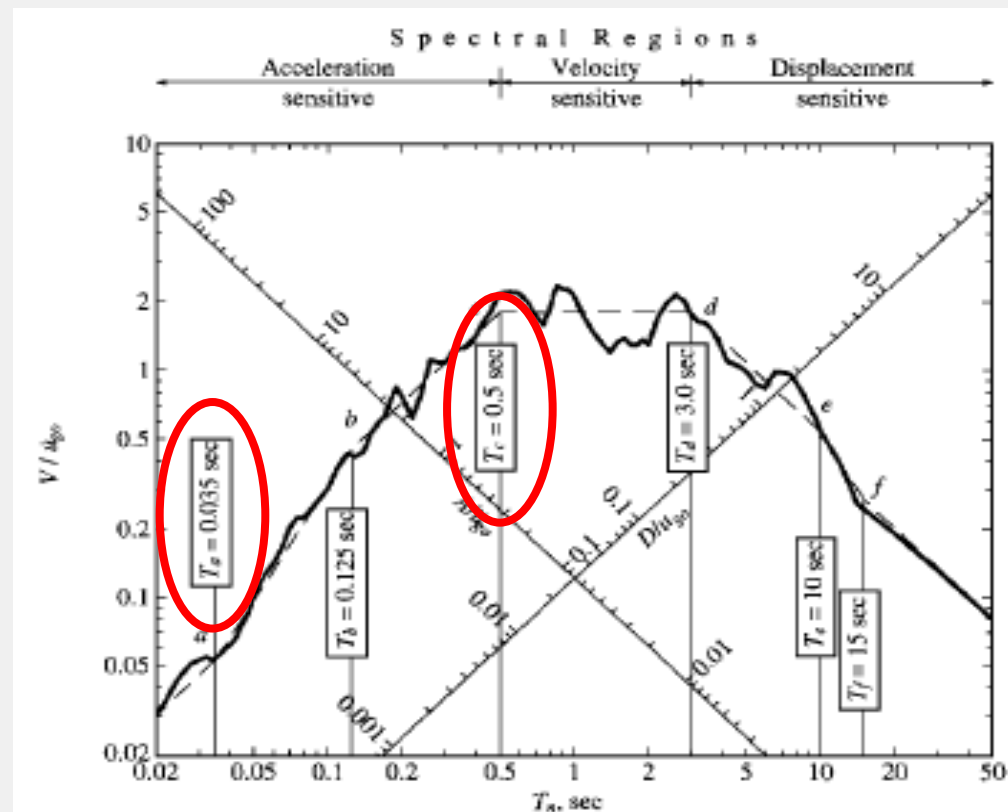
8. Χαρακτηριστικά του Φάσματος Απόκρισης

Το φάσμα απόκρισης χωρίζεται σε διάφορες περιοχές της ιδιοπεριόδου.

- Για σύστημα με μικρή περίοδο

$$T_a < T_n < T_c$$

η A υπερβαίνει την \ddot{u}_{g0}
Εξιδανικεύεται ως σταθερή.



Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

8. Χαρακτηριστικά του Φάσματος Απόκρισης

Το φάσμα απόκρισης χωρίζεται σε διάφορες περιοχές της ιδιοπεριόδου.

- Για σύστημα με μικρή περίοδο

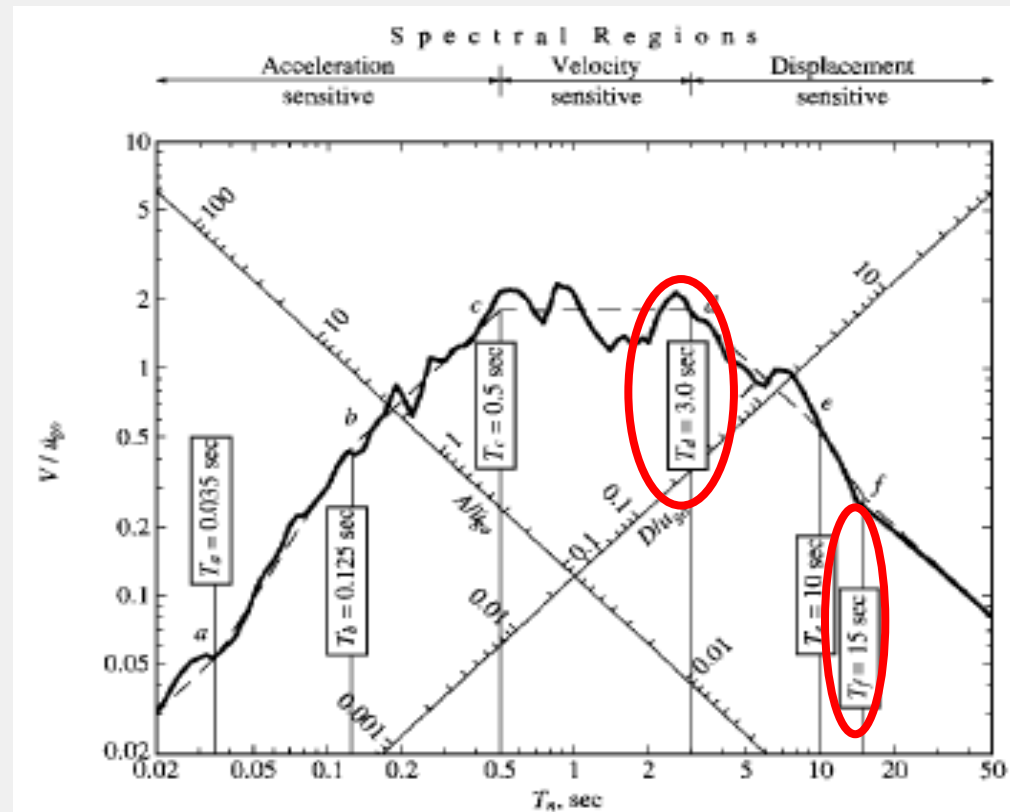
$$T_a < T_n < T_c$$

η A υπερβαίνει την \ddot{u}_{g0}
Εξιδανικεύεται ως σταθερή.

- Για σύστημα με μεγάλη περίοδο

$$T_d < T_n < T_f$$

η D υπερβαίνει την u_{g0}
Εξιδανικεύεται ως σταθερή.



Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

8. Χαρακτηριστικά του Φάσματος Απόκρισης

Το φάσμα απόκρισης χωρίζεται σε διάφορες περιοχές της ιδιοπεριόδου.

- Για σύστημα με μικρή περίοδο

$$T_a < T_n < T_c$$

η A υπερβαίνει την \ddot{u}_{g0}
Εξιδανικεύεται ως σταθερή.

- Για σύστημα με μεγάλη περίοδο

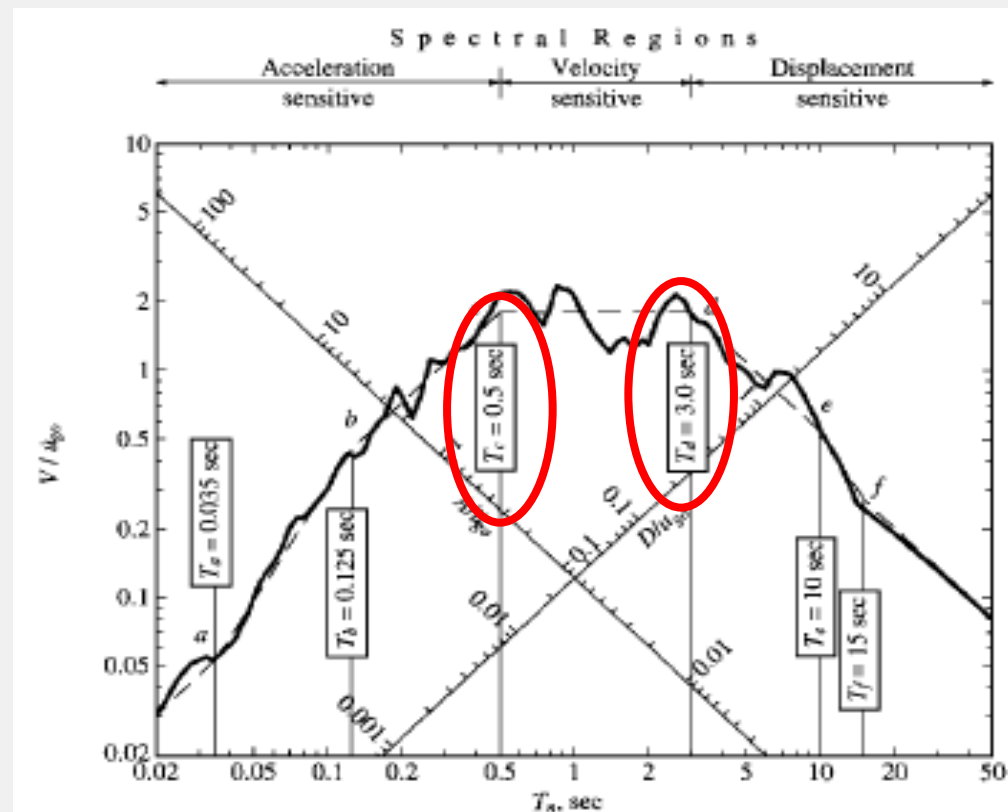
$$T_d < T_n < T_f$$

η D υπερβαίνει την u_{g0}
Εξιδανικεύεται ως σταθερή.

- Για σύστημα με ενδιάμεση περίοδο

$$T_c < T_n < T_d$$

η V υπερβαίνει την \dot{u}_{g0}
Εξιδανικεύεται ως σταθερή.



Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

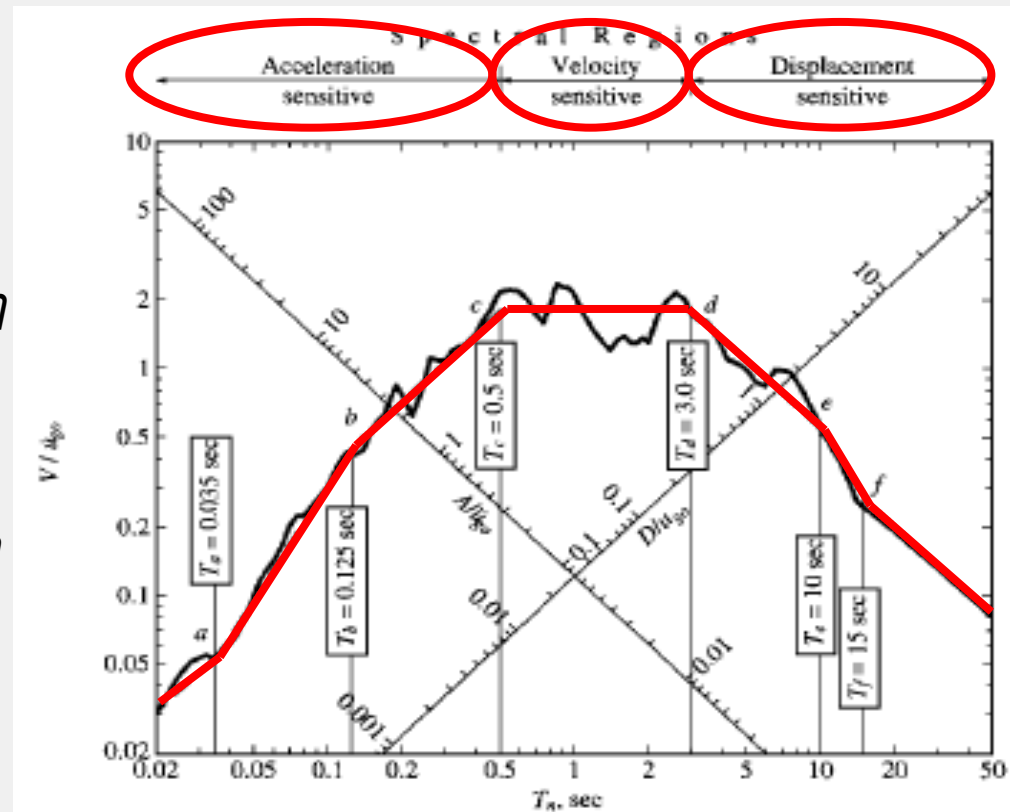
8. Χαρακτηριστικά του Φάσματος Απόκρισης

Το φάσμα απόκρισης χωρίζεται σε διάφορες περιοχές της ιδιοπεριόδου.

Βασιζόμενοι σε αυτές τις παρατηρήσεις το φάσμα απόκρισης χωρίζεται σε τρεις περιοχές περιόδων

1. Περιοχή ευαίσθητη στη επιτάχυνση
2. Περιοχή ευαίσθητη στη ταχύτητα
3. Περιοχή ευαίσθητη στη μετατόπιση

εξιδανικεύοντας το φάσμα απόκρισης με μια σειρά από ευθείες γραμμές στο τετραλογαριθμικό γράφημα.



Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

9. Ελαστικό φάσμα σχεδιασμού

- Το ελαστικό φάσμα σχεδιασμού πρέπει να είναι αντιπροσωπευτικό των εδαφικών κινήσεων που έχουν καταγραφεί σε μια περιοχή.
- Το φάσμα σχεδιασμού βασίζεται σε στατιστική ανάλυση των φασμάτων απόκρισης για το σύνολο των εδαφικών κινήσεων.
- Αν υποθέσουμε ότι I είναι ο αριθμός των εδαφικών κινήσεων στο σύνολο και η i εδαφική επιτάχυνση συμβολίζεται με:

$$\ddot{u}_g^i(t)$$

- Η μέγιστη μετατόπιση, ταχύτητα και επιτάχυνση συμβολίζονται με:

$$u_{g0}^i, \quad \dot{u}_{g0}^i, \quad \ddot{u}_{g0}^i$$

- Κάθε εδαφική κίνηση κανονικοποιείται έτσι ώστε όλες οι κινήσεις να έχουν την ίδια εδαφική επιτάχυνση:

Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

9. Ελαστικό φάσμα σχεδιασμού

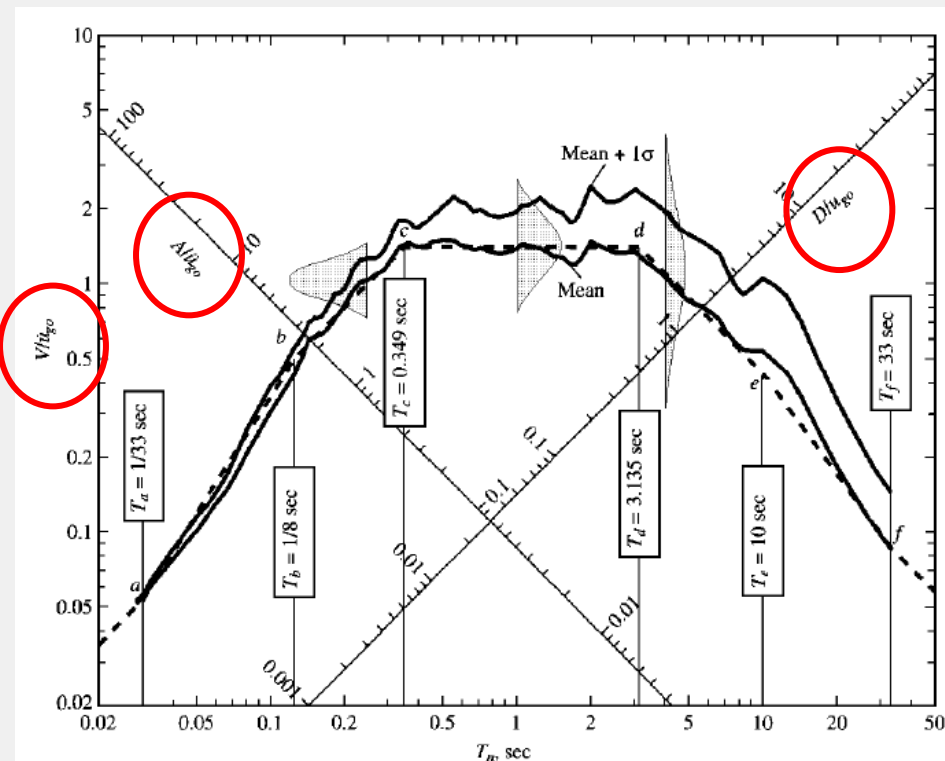
- Το φάσμα απόκρισης για κάθε μια κανονικοποιημένη εδαφική κίνηση υπολογίζεται όπως έχει περιγραφεί.

- Σε κάθε περίοδο T_n αντιστοιχεί I αριθμός φασματικών τιμών.

- D_i , V_i , A_i είναι οι φασματικές τεταγμένες της, μετατόπισης, ψευδοταχύτητας και ψευδοεπιτάχυνσης:

$$u_{g0}, \dot{u}_{g0}, \ddot{u}_{g0}$$

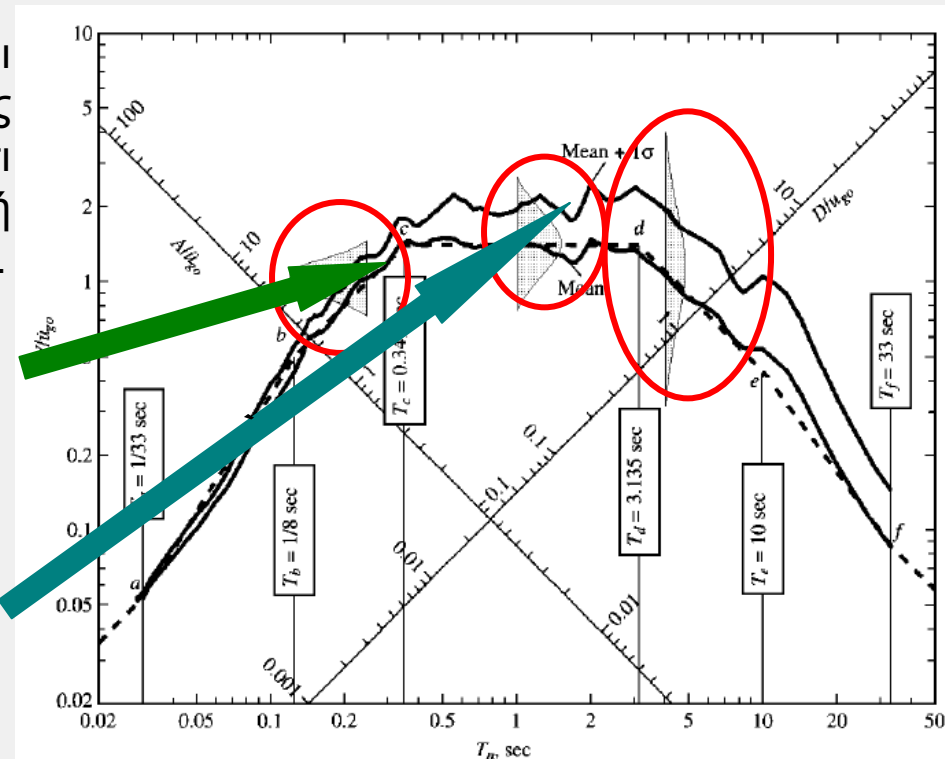
- Είναι οι μέσες τιμές της μέγιστης εδαφικής μετατόπισης, ταχύτητας και επιτάχυνσης για τις I καταγραφές:



Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

9. Ελαστικό φάσμα σχεδιασμού

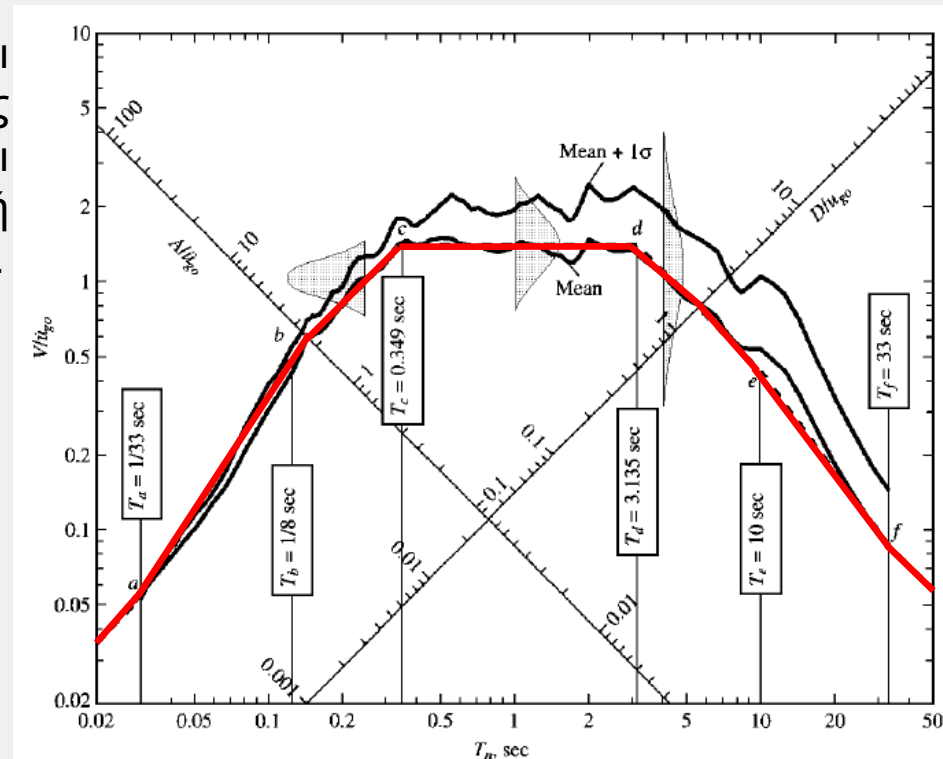
- Η στατιστική ανάλυση των δεδομένων παρέχει την πιθανοτική κατανομή για τη φασματική τεταγμένη, τη μέση τιμή και την τυπική της απόκλιση σε κάθε περίοδο T_n .
- Οι πιθανοτικές κατανομές φαίνονται σχηματικά στο διπλανό σχήμα για τρεις επιλεγμένες τιμές της T_n , υποδεικνύοντας ότι ο συντελεστής μεταβλητότητας (τυπική απόκλιση / μέση τιμή) μεταβάλλεται με την T_n .
- Ενώνοντας τις μέσες τιμές προκύπτει το μέσο φάσμα απόκρισης:
- Ενώνοντας τις τιμές που προκύπτουν από την άθροιση των μέσων τιμών με μια τυπική απόκλιση, προκύπτει και το αντίστοιχο φάσμα απόκρισης:



Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

9. Ελαστικό φάσμα σχεδιασμού

- Η στατιστική ανάλυση των δεδομένων παρέχει την πιθανοτική κατανομή για τη φασματική τεταγμένη, τη μέση τιμή και την τυπική της απόκλιση σε κάθε περίοδο T_n .
- Οι πιθανοτικές κατανομές φαίνονται σχηματικά στο διπλανό σχήμα για τρεις επιλεγμένες τιμές της T_n , υποδεικνύοντας ότι ο συντελεστής μεταβλητότητας (τυπική απόκλιση / μέση τιμή) μεταβάλλεται με την T_n .
- Παρατηρείται ότι τα φάσματα αυτά είναι σαφώς πιο ομαλά από το φάσμα που προκύπτει για μια ανεξάρτητη εδαφική κίνηση.
- Συνεπώς μια τέτοια καμπύλη εξιδανικεύεται πιο εύκολα με χρήση ευθειών γραμμών.

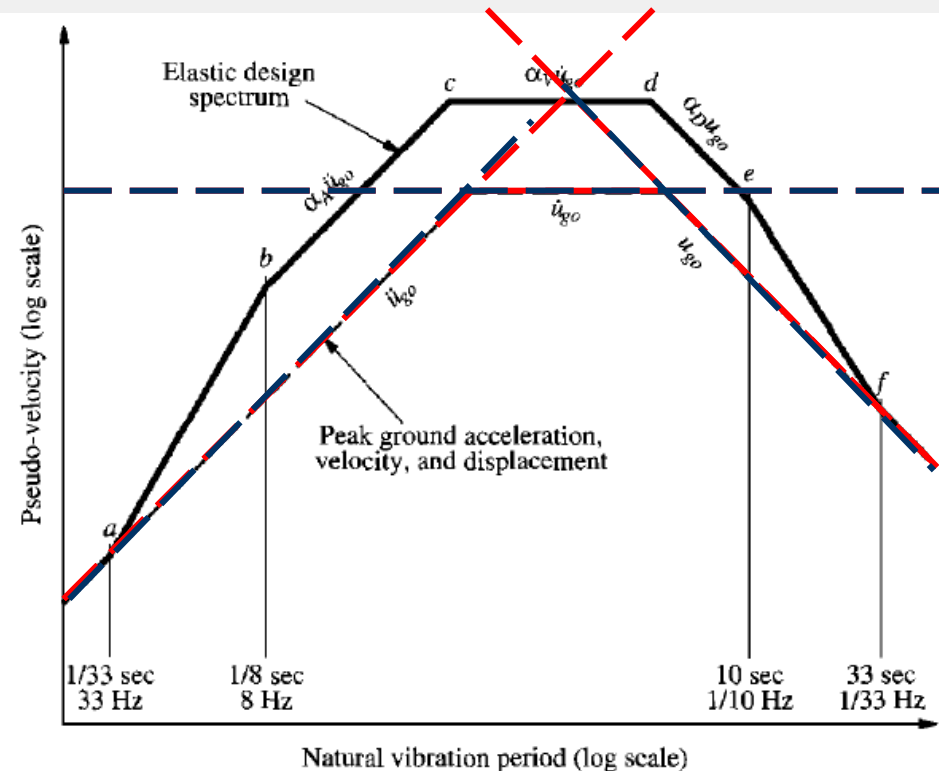


Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

9. Ελαστικό φάσμα σχεδιασμού

- Έχουν αναπτυχθεί διαδικασίες για την κατασκευή φασμάτων σχεδιασμού από παραμέτρους της εδαφικής κίνησης.

- 1) Σχεδιάζουμε τρεις γραμμές που αντιστοιχούν στις μέγιστες τιμές εδαφικής επιτάχυνσης, ταχύτητας και μετατόπισης για την εδαφική κίνηση σχεδιασμού.
- 2) Λαμβάνουμε τις τιμές των α_A , α_V , α_D για επιλεγμένο ζ , από διαθέσιμους πίνακες (Πίνακες 6.9.1 ή 6.9.2 του βιβλίου).
- 3) Πολλαπλασιάζουμε τις τιμές των α_A , α_V , α_D με τη μέγιστη επιτάχυνση, ταχύτητα και μετατόπιση, αντίστοιχα και παράγουμε τους μετατοπισμένους κλάδους.



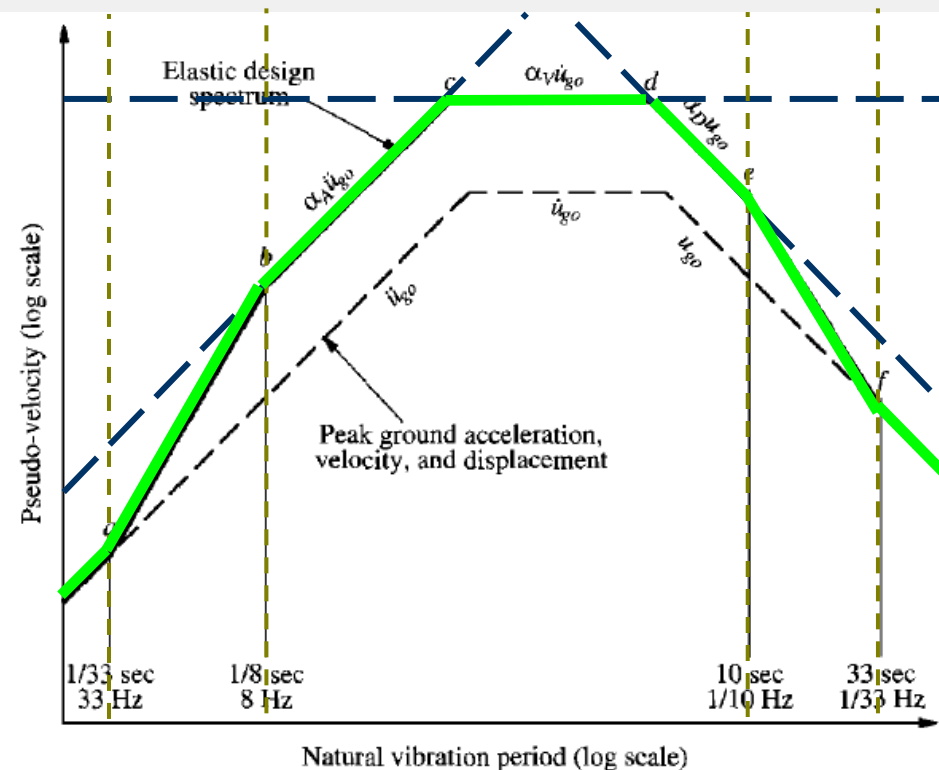
Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

9. Ελαστικό φάσμα σχεδιασμού

- Έχουν αναπτυχθεί διαδικασίες για την κατασκευή φασμάτων σχεδιασμού από παραμέτρους της εδαφικής κίνησης.

4) Οι συνιστώμενες τιμές των περιόδων T_a , T_b , T_d , T_e , θα ορίσουν τα υπόλοιπα ευθύγραμμα τμήματα

5) Το ελαστικό φάσμα σχεδιασμού ολοκληρώνεται με σύνδεση των σημείων



Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

9. Ελαστικό φάσμα σχεδιασμού

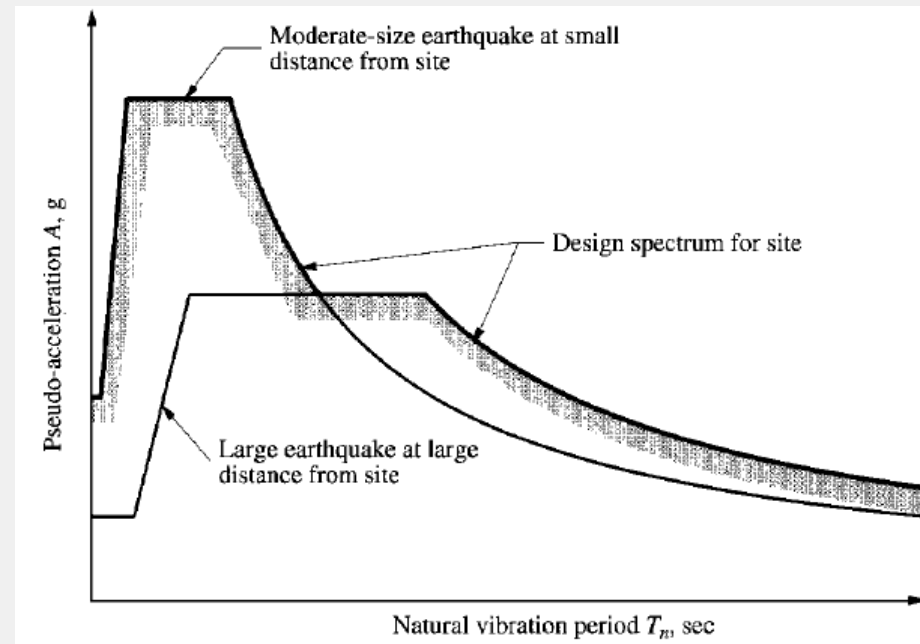
- Το φάσμα σχεδιασμού κατασκευάζεται για να αναπαραστήσει τα μέσα χαρακτηριστικά πολλών εδαφικών κινήσεων.
- Το ελαστικό φάσμα σχεδιασμού παρέχει μια βάση για τον υπολογισμό της δύναμης σχεδιασμού και της μετατόπισης για μονοβάθμια συστήματα που σχεδιάζονται να παραμείνουν ελαστικά.
- Οι παράμετροι που υπεισέρχονται στην κατασκευή του ελαστικού φάσματος σχεδιασμού πρέπει να επιλεγούν λαμβάνοντας τους παράγοντες που επηρεάζουν την εδαφική κίνηση. Επομένως η επιλογή των παραμέτρων σχεδιασμού (μέγιστη επιτάχυνση, μέγιστη ταχύτητα και μέγιστη μετατόπιση) θα πρέπει να βασίζονται στο μέγεθος του σεισμού, στην απόσταση από το ρήγμα, στο μηχανισμό του κύματος κλπ. Αποτελέσματα έρευνας για αυτούς τους παράγοντες είναι διαθέσιμα.

Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

10. Διάκριση μεταξύ των φασμάτων σχεδιασμού και απόκρισης

- Το φάσμα απόκρισης είναι μια γραφική απεικόνιση της μέγιστης απόκρισης όλων των δυνατών μονοβαθμίων συστημάτων και επομένως αποτελεί περιγραφή μιας συγκεκριμένης εδαφικής κίνησης. Το φάσμα σχεδιασμού αποτελεί καθορισμό του επιπέδου της σεισμικής δύναμης σχεδιασμού, ή της μετατόπισης, ως συνάρτησης της ιδιοπεριόδου ταλάντωσης και του λόγου απόσβεσης.

- Για μερικές περιοχές το φάσμα σχεδιασμού αποτελεί την περιβάλλουσα δύο διαφορετικών ελαστικών φασμάτων σχεδιασμού.



Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

11. Φάσματα απόκρισης ταχύτητας και επιτάχυνσης

- Για να μελετήσουμε τη σχέση μεταξύ των «πραγματικών» φασμάτων ταχύτητας και επιτάχυνσης με τα αντίστοιχα ψευδοφάσματα, γράφουμε τη σχέση που δίνει την απόκριση μονοβαθμίου σε μηδενικές αρχικές συνθήκες και εξωτερική φόρτιση λόγω εδαφικής επιτάχυνσης $p_{\text{eff}}(t) = -m\ddot{u}_g(t)$ (Ολοκλήρωμα Duhamel):

$$u(t) = -\frac{1}{\omega_D} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)] d\tau$$

$$\dot{u}(t) = -\zeta\omega_n u(t) - \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \cos[\omega_D(t-\tau)] d\tau$$

- Η επιτάχυνση μπορεί να προκύψει παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση, ή εναλλακτικά ως:

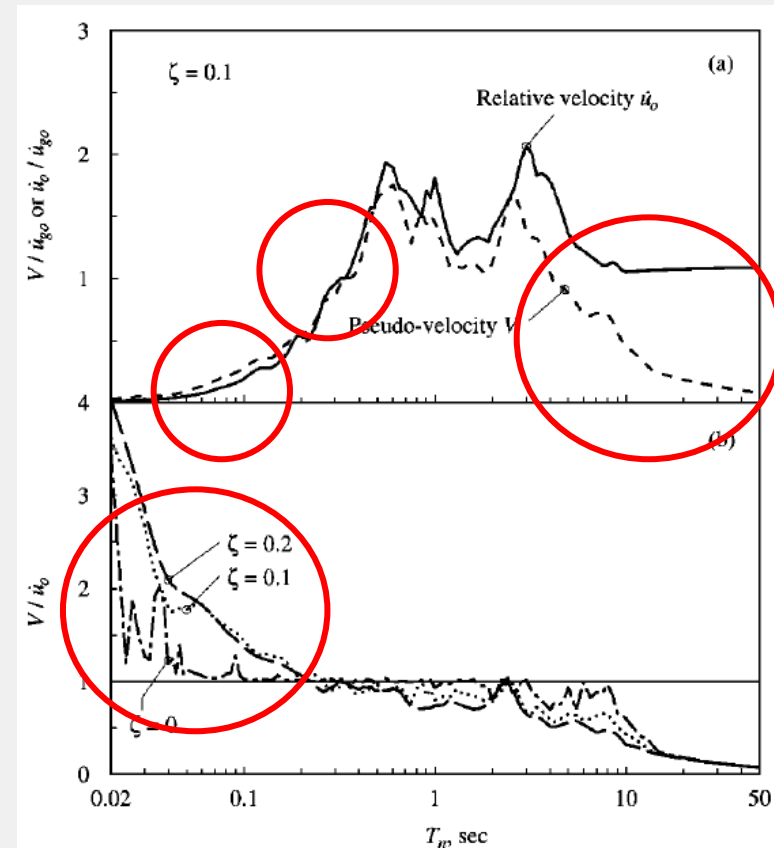
$$\dot{u}^t(t) = -\omega_n^2 u(t) - 2\zeta\omega_n \dot{u}(t)$$

- Το φάσμα σχετικής ταχύτητας και επιτάχυνσης είναι οι γραφικές απεικονίσεις των μεγίστων τιμών της ταχύτητας και επιτάχυνσης ως συναρτήσεις της T_n .

Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

11.1 Φάσματα ψευδοταχύτητας και σχετικής ταχύτητας

- Παρουσιάζονται το φάσμα σχετικής ταχύτητας και ψευδοταχύτητας για την εδαφική κίνηση του El Centro, για $\zeta=10\%$.
- Για μεγάλη περίοδο η ψευδοταχύτητα προκύπτει μικρότερη από τη σχετική ταχύτητα. Αυτό συμβαίνει διότι όσο το T_n αυξάνεται η τιμή της ψευδοταχύτητας τείνει στο μηδέν λόγω της σχέσης $V=(2\pi/T_n)D$
- Για μικρές τιμές της περιόδου, η ψευδοταχύτητα είναι μεγαλύτερη από τη σχετική ταχύτητα.
- Για μέσες τιμές της περιόδου, οι διαφορές των δύο μεγεθών είναι αρκετά μικρές.
- Οι διαφορές των δύο μεγεθών αυξάνουν με την αύξηση του ζ .



Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

11.2 Φάσματα ψευδοεπιτάχυνσης και επιτάχυνσης

- Τα φάσματα απόκρισης ψευδοεπιτάχυνσης και επιτάχυνσης είναι πανομοιότυπα για συστήματα χωρίς απόσβεση. Αυτό γίνεται φανερό αν θέσουμε $\zeta=0$ στη σχέση:

$$\ddot{u}^t(t) = -\omega_n^2 u(t) - 2\zeta\omega_n \dot{u}(t)$$

- Επομένως οι μέγιστες τιμές των δύο μελών είναι ίσες. Δηλαδή:

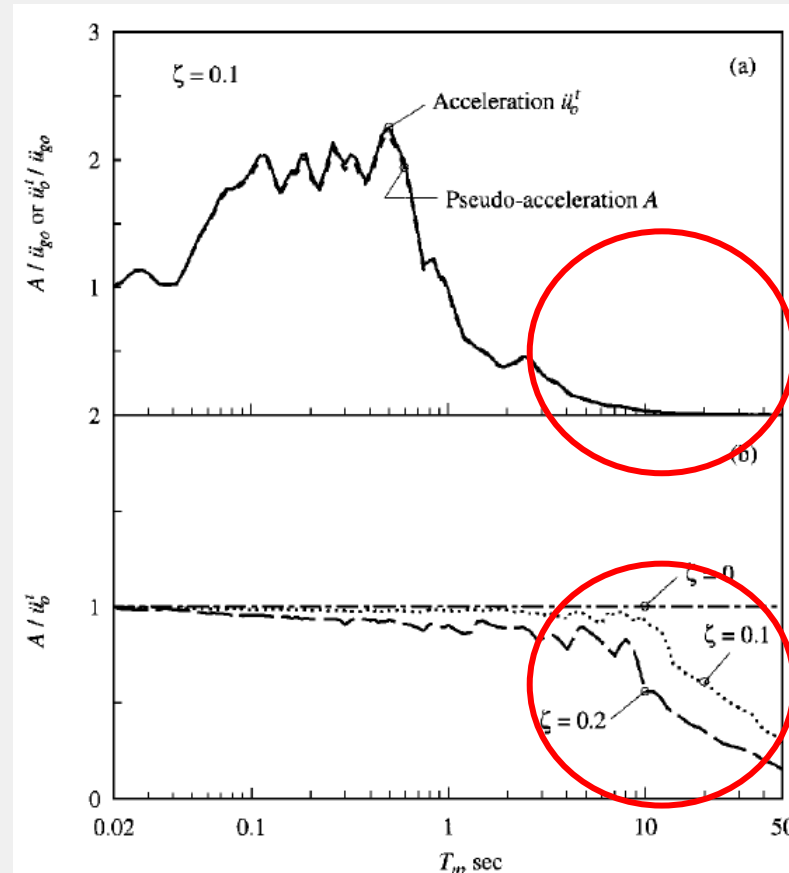
$$\ddot{u}^t(t) = \omega_n^2 u_0 = \omega_n^2 D = A$$

- Όταν το σύστημα έχει απόσβεση η παραπάνω σχέση ισχύει στις χρονικές στιγμές που η ταχύτητα μηδενίζεται..

Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων

11.2 Φάσματα ψευδοεπιτάχυνσης και επιτάχυνσης

- Παρουσιάζονται το φάσμα ψευδοεπιτάχυνσης και επιτάχυνσης για την εδαφική κίνηση του El Centro, για $\zeta=10\%$.
- Για μεγάλη περίοδο η επιτάχυνση και η ψευδοεπιτάχυνση πλησιάζουν στο μηδέν.
- Ο ρυθμός με τον οποίο τα δύο μεγέθη πλησιάζουν το μηδέν είναι εν γένει διαφορετικός.
- Οι διαφορές των δύο μεγεθών αυξάνουν με την αύξηση του ζ .
- Η ψευδοεπιτάχυνση είναι μικρότερη από την επιτάχυνση.



Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα

Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα

1. Είδη γενικευμένων μονοβαθμίων συστημάτων

$$u(t) = z(t)\psi(x)$$

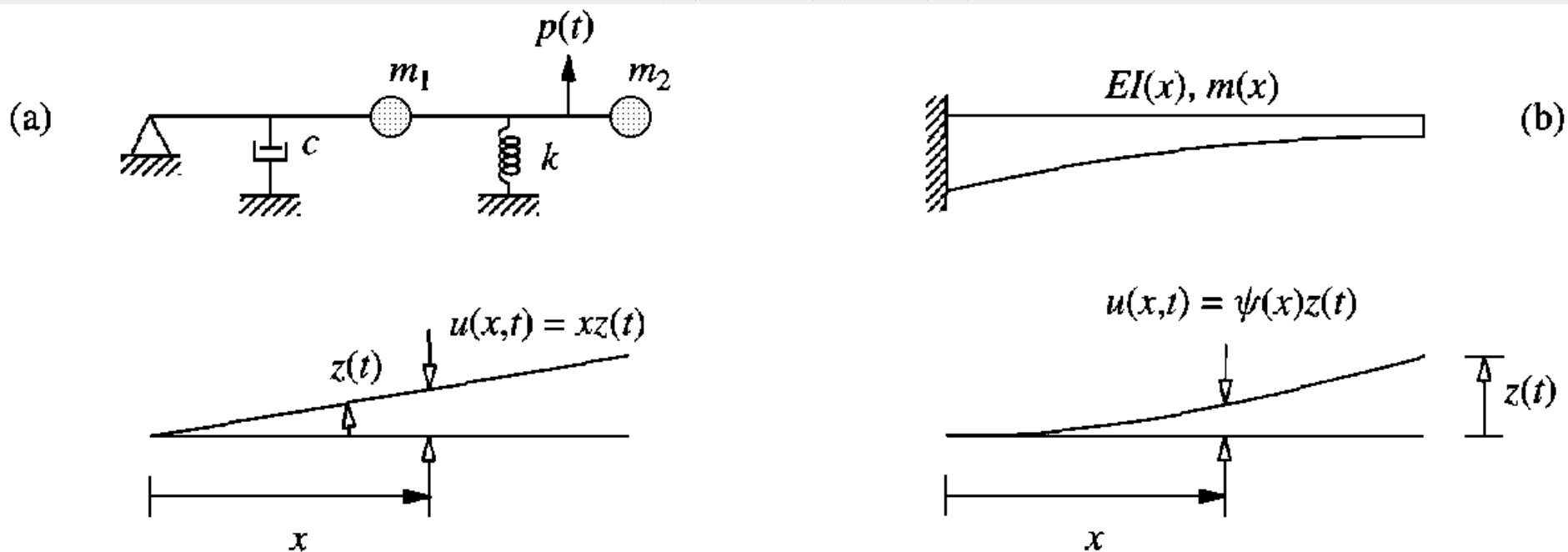


Figure 8.1.1 Generalized SDF systems.

Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα

1. Είδη γενικευμένων μονοβαθμίων συστημάτων

- Τα παραπάνω συστήματα ονομάζονται γενικευμένα μονοβάθμια γιατί η μετατόπιση σε κάθε σημείο προσδιορίζεται συναρτήσει μιας γενικευμένης συντεταγμένης $z(t)$ και μέσω μιας συνάρτησης σχήματος $\psi(x)$. Θα αποδειχθεί ότι η εξίσωση κίνησης για τέτοια συστήματα δίδεται ως:

$$\tilde{m}\ddot{z} + \tilde{c}\dot{z} + \tilde{k}z = \tilde{p}(t)$$

- Όπου τα μεγέθη m , c , k , $p(t)$, ονομάζονται γενικευμένη μάζα, απόσβεση, δυσκαμψία και φορτίο αντίστοιχα. Τα γενικευμένα αυτά μεγέθη σχετίζονται με την γενικευμένη συντεταγμένη που επιλέγεται για την περιγραφή της κίνησης.
- Η παραπάνω εξίσωση έχει την ίδια μορφή με την τυπική εξίσωση κίνησης του μονοβαθμίου συστήματος. Μέσω του συσχετισμού των μετατοπίσεων και της γενικευμένης συντεταγμένης με τη συνάρτηση σχήματος, είναι γνωστές οι μετατοπίσεις όλου του συστήματος
- Η συνάρτηση σχήματος επιλέγεται και προσδιορίζει μια προσέγγιση της πραγματικής παραμόρφωσης.

Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα

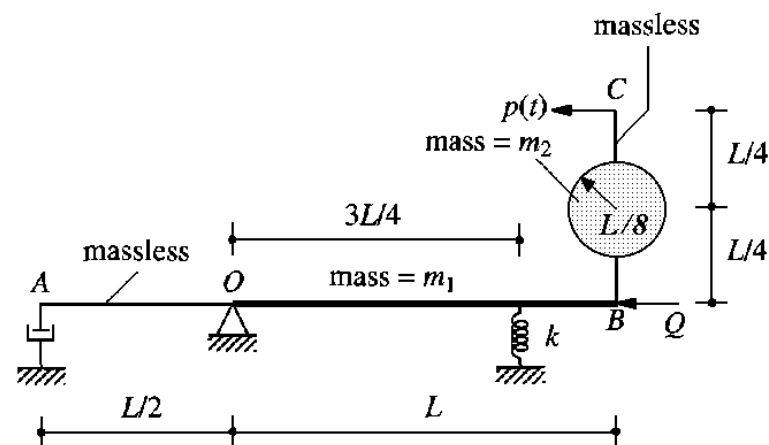
2. Φορείς με άκαμπτα στοιχεία

- Ως παράδειγμα επιλύεται ο φορέας του σχήματος:

- Η μάζα m_1 του τμήματος OB θεωρείται κατανομημένη σε όλο το μήκος, τα υπόλοιπα τμήματα της δοκού έχουν μηδενική μάζα, ενώ στο τμήμα BC συνδέεται κυκλική πλάκα μάζας m_2 .

- Θα προσδιοριστούν η συχνότητα ταλάντωσης, ο λόγος απόσβεσης, η απόκριση του συστήματος χωρίς απόσβεση όταν αυτό υποβάλλεται σε αιφνιδίως επιβαλλόμενο φορτίο

- Οι μετατοπίσεις θεωρούνται μικρές.



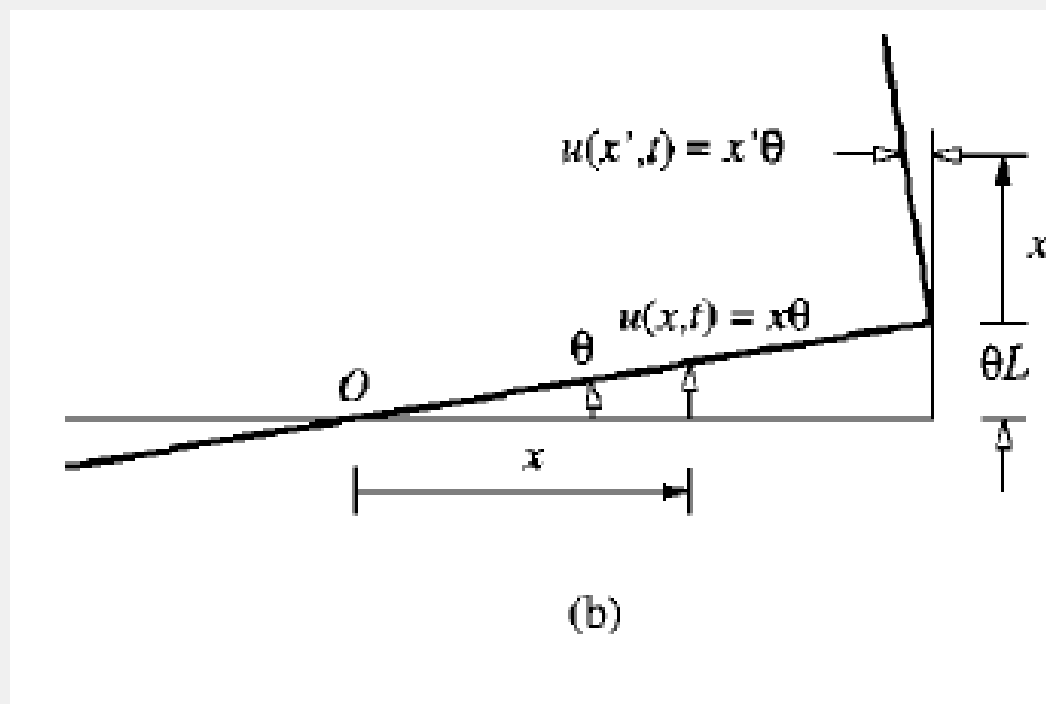
(a)

c(L)

Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα

2. Φορείς με άκαμπτα στοιχεία

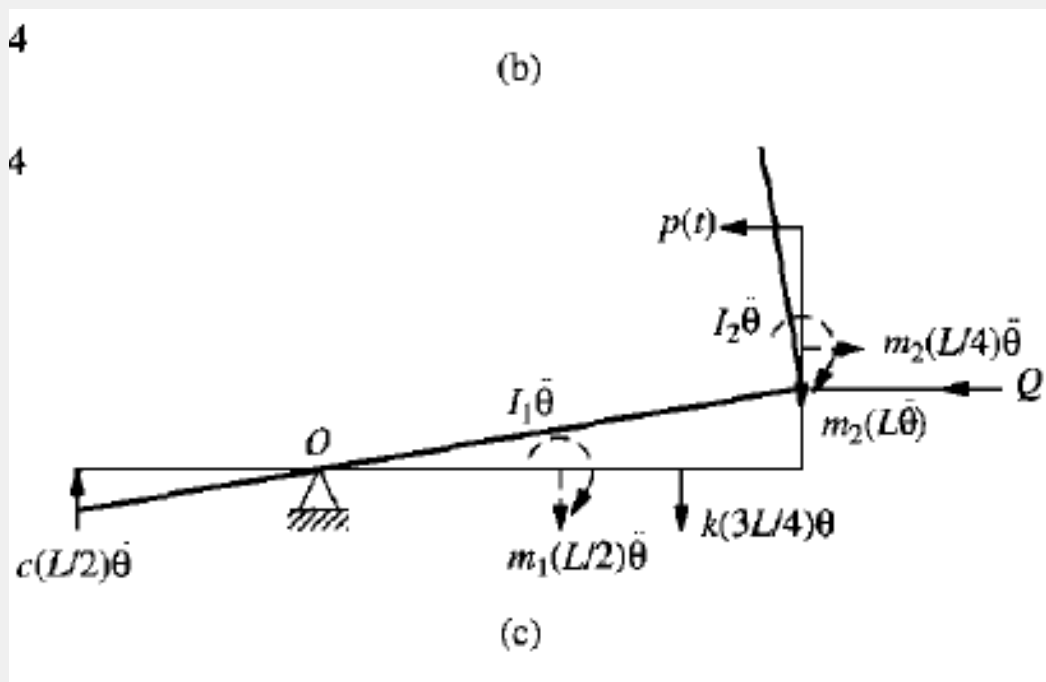
1) Προσδιορισμός της συνάρτησης σχήματος: η δοκός περιστρέφεται περί το σημείο O . Οπότε θεωρώντας μικρές μετατοπίσεις το παραμορφωμένο σχήμα του φορέα προκύπτει, οπώς φαίνεται στο σχήμα



Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα

2. Φορείς με άκαμπτα στοιχεία

2) Διάγραμμα ελευθέρου σώματος και εξισώσεις ισορροπίας: Εισάγονται οι δυνάμεις ελατηρίου, αδράνειας και απόσβεσης. Οι εξισώσεις ισορροπίας θα προκύψουν εφαρμόζοντας την ισορροπία των ροπών ως προς το σημείο O .



Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα

2. Φορείς με άκαμπτα στοιχεία

$$I_1 \ddot{\vartheta} + \left(m_1 \frac{L}{2} \ddot{\vartheta} \right) \frac{L}{2} + I_2 \ddot{\vartheta} + (m_2 L \ddot{\vartheta}) + \left(m_2 \frac{L}{4} \ddot{\vartheta} \right) \frac{L}{4} + \left(c \frac{L}{2} \dot{\vartheta} \right) \frac{L}{2} + \left(k \frac{3L}{4} \vartheta \right) \frac{3L}{4} = p(t) \frac{L}{2}$$

Όπου:

$$I_1 = m_1 L^2 / 12, \quad I_2 = m_2 (L/8)^2 / 2 = m_2 L^2 / 128$$

Εκτελώντας τις πράξεις η εξίσωση ισορροπίας προκύπτει ως:

$$\tilde{m} \ddot{\vartheta} + \tilde{c} \dot{\vartheta} + \tilde{k} \vartheta = \tilde{p}(t)$$

Όπου:

$$\tilde{m} = \left(\frac{m_1}{3} + \frac{137}{128} m_2 \right) L^2, \quad \tilde{c} = \frac{cL^2}{4}, \quad \tilde{k} = \frac{9kL^2}{16}, \quad \tilde{p}(t) = p(t) \frac{L}{2}$$

Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα

2. Φορείς με άκαμπτα στοιχεία

3) Προσδιορισμός φυσικής συχνότητας και λόγου απόσβεσης:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\tilde{k}}{\tilde{m}}}, \quad \zeta = \frac{\tilde{c}}{2\sqrt{\tilde{k}\tilde{m}}}$$

4) Επίλυση της εξίσωσης κίνησης:

$$\tilde{p}(t) = \frac{p(t)L}{2} = \frac{p_0L}{2} \equiv \tilde{p}_0$$

$$\vartheta(t) = \frac{\tilde{p}_0}{\tilde{k}} (1 - \cos \omega_1 t) = \frac{8p_0}{9kL} (1 - \cos \omega_n t)$$

Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα

2. Φορείς με άκαμπτα στοιχεία

5) Προσδιορισμός του διανύσματος της μετατόπισης:

$$u(x, t) = x\vartheta(t), \quad u(x', t) = x'\vartheta(t)$$

6) Συμπεριλαμβάνοντας και την επιρροή της αξονικής δύναμης:

$$\tilde{m}\ddot{\vartheta} + \tilde{c}\dot{\vartheta} + (\tilde{k} - QL)\vartheta = \tilde{p}(t)$$

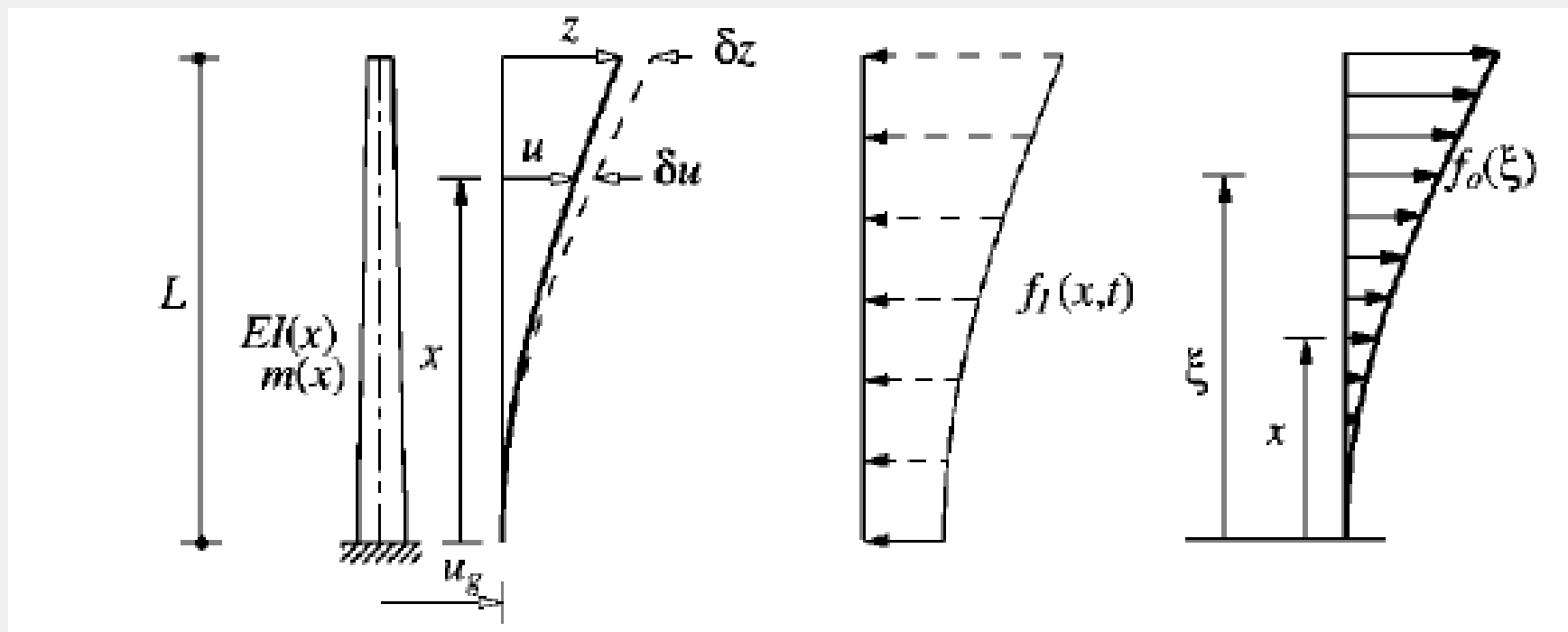
- Η θλιπτική δύναμη μειώνει τη δυσκαμψία του φορέα και συνεπώς τη φυσική συχνότητα ταλάντωσης. Οι τιμές τους μηδενίζονται για τιμή αξονικής δύναμης:

$$Q_{cr} = \frac{\tilde{k}}{L} = \frac{9kL}{16} \quad \text{Κρίσιμο φορτίο λυγισμού του φορέα}$$

Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα

3.1 Συστήματα με διανεμημένη μάζα και δυσκαμψία

- Το παρακάτω σύστημα έχει κατανεμημένη μάζα $m(x)$ και δυσκαμψία $EI(x)$ και υποβάλλεται σε εδαφική κίνηση $u_g(t)$.



Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα

3.1 Σύστήματα με διανεμημένη μάζα και δυσκαμψία

- Η συνολική μετατόπιση του φορέα γράφεται ως:

$$u^t(x, t) = u(x, t) + u_g(t)$$

- Η συνάρτηση σχήματος $\psi(x)$ πρέπει να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος. Στη συγκεκριμένη περίπτωση ισχύει:

$$\psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = 0$$

- Ως συνάρτηση σχήματος μπορεί να επιλεγεί η εξίσωση της ελαστικής γραμμής της ομοιόμορφης δοκού με δυσκαμψία EI υπό στατική μοναδιαία φόρτιση στην κορυφή, η οποία δίδεται από τη σχέση:

$$u(x) = \left(3Lx^2 - x^3 \right) / 6EI$$

Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα

3.1 Σύστήματα με διανεμημένη μάζα και δυσκαμψία

- Αν επιλέξουμε ως γενικευμένη συντεταγμένη τη μετακίνηση σε ένα συγκεκριμένο σημείο, πχ στην κορυφή, τότε ισχύει:

$$z = u(L) = L^3 / 3EI$$

$$u(x,t) = \psi(x)z, \quad \psi(x) = \frac{3}{2} \frac{x^2}{L^2} - \frac{1}{2} \frac{x^3}{L^3}$$

- Η παραπάνω συνάρτηση ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες. Μπορεί να γίνει οποιαδήποτε λογική επιλογή συνάρτησης σχήματος, όπως:

$$\psi(x) = \frac{x^2}{L^2}, \quad \psi(x) = 1 - \cos \frac{\pi x}{2L}$$

Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα

3.2 Εξισώσεις κίνησης

- Οι αδρανειακές δυνάμεις προκύπτουν ως εξής:

$$f_I(x, t) = -m(x)\ddot{u}^t(x, t) \Rightarrow f_I(x, t) = -m(x)\left[\ddot{u}(x, t) + \ddot{u}_g(t)\right]$$

- Εφαρμόζεται η αρχή των δυνατών έργων:

$$\delta W_I = \delta W_E \Rightarrow$$

$$\int_0^L M(x, t)\delta k(x)dx = -\int_0^L m(x)\ddot{u}(x, t)\delta u(x)dx - \ddot{u}_g(t)\int_0^L m(x)\delta u(x)dx$$

- Όπου η έκφραση της καμπτικής ροπής και της καμπυλότητας δίνονται ως:

$$M(x, t) = EI(x)u''(x, t), \quad \delta k(x) = \delta[u''(x)]$$

Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα

3.2 Εξισώσεις κίνησης

- Σύμφωνα με τα παραπάνω, τα έργα των εσωτερικών και εξωτερικών δυνάμεων μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει της γενικευμένης συντεταγμένης και της συνάρτησης σχήματος με τις παρακάτω σχέσεις:

$$u''(x,t) = \psi''(x)z(t), \quad \ddot{u}(x,t) = \psi(x)\ddot{z}(t)$$

- Οι δυνατές μετατοπίσεις γράφονται ως:

$$\delta u(x) = \psi(x)\delta z, \quad \delta [u''(x)] = \psi''(x)\delta z$$

- Συνεπώς η έκφραση του εξωτερικού και εσωτερικού έργου γράφονται ως:

$$\delta W_E = -\delta z \left[\ddot{z} \int_0^L m(x) [\psi(x)]^2 dx + \ddot{u}_g(t) \int_0^L m(x) \psi(x) dx \right]$$

$$\delta W_I = \delta z \left[z \int_0^L EI(x) [\psi''(x)]^2 dx \right]$$

Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα

3.2 Εξισώσεις κίνησης

- Τελικά η αρχή των δυνατών έργων δίνει τις παρακάτω εκφράσεις:

$$\delta z \left[\tilde{m}\dot{z} + \tilde{k}z + \tilde{L}\ddot{u}_g(t) \right] = 0$$

- Όπου

$$\tilde{m} = \int_0^L m(x) [\psi(x)]^2 dx$$

$$\tilde{k} = \int_0^L EI(x) [\psi''(x)]^2 dx$$

$$\tilde{L} = \int_0^L m(x) \psi(x) dx$$

Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα

3.2 Εξισώσεις κίνησης

- Η εξίσωση πρέπει να ισχύει για οποιαδήποτε δυνατή μεταβολή. Συνεπώς πρέπει να ισχύει:

$$\tilde{m}\ddot{z} + \tilde{k}z = -\tilde{L}\ddot{u}_g(t)$$

- Διαιρώντας με τη γενικευμένη μάζα έχουμε:

$$\ddot{z} + \omega_n^2 z = -\tilde{\Gamma}\ddot{u}_g(t)$$

- όπου:

$$\tilde{\Gamma} = \frac{\tilde{L}}{\tilde{m}}$$

- Στην παραπάνω εξίσωση μπορούμε να συμπεριλάβουμε και απόσβεση με υπόθεση ιδιομορφικού λόγου απόσβεσης ζ .

Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα

3.3 Ανάλυση της απόκρισης

- Χρησιμοποιώντας τη γενικευμένη μάζα και δυσκαμψία, η φυσική συχνότητα του φορέα μπορεί να προσδιοριστεί ως:

$$\omega_n^2 = \frac{\tilde{m}}{\tilde{k}} = \frac{\int_0^L EI(x) [\psi''(x)]^2 dx}{\int_0^L m(x) [\psi(x)]^2 dx}$$

- Η γενικευμένη συντεταγμένη $z(t)$ μπορεί να προσδιοριστεί με τον τρόπο που έχει παρουσιαστεί για τα μονοβάθμια συστήματα και στη συνέχεια η μετατόπιση $u(x,t)$ μπορεί να προσδιοριστεί καθ' όλο το μήκος της δοκού.

Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα

3.3 Ανάλυση της απόκρισης

- Το επόμενο βήμα είναι να υπολογιστούν οι εσωτερικές δυνάμεις (καμπτικές ροπές και διατμητικές δυνάμεις) που σχετίζονται με τις μετατοπίσεις $u(x,t)$. Από την κλασική θεωρία δοκού θα προκύψει ότι:

$$f_s(x,t) = [EI(x)u''(x,t)]'' = [EI(x)\psi''(x)]'' z(t)$$

- Οι εν λόγω εξωτερικές δυνάμεις, οι οποίες εξαρτώνται από την παράγωγο της συνάρτησης σχήματος, θα οδηγήσουν σε εσωτερικές δυνάμεις οι οποίες θα είναι λιγότερο ακριβείς από τις μετατοπίσεις, λόγω του ότι οι παράγωγοι της (προσεγγιστικής) συνάρτησης σχήματος δίνουν λιγότερο ακριβή προσέγγιση των πραγματικών κατανομών. Μια πιο ακριβής προσέγγιση των ελαστικών δυνάμεων προκύπτει ως

$$f_s(x,t) = \omega_n^2 m(x) \psi(x) z(t)$$

Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα

3.4 Μέγιστη σεισμική απόκριση

- Κατά την ανάλυση υπό σεισμική διέγερση μας ενδιαφέρουν οι οριακές τιμές των ελαστικών δυνάμεων που καταπονούν την κατασκευή. Από τη διαδικασία που έχει παρουσιαστεί, η γενικευμένη συντεταγμένη $z(t)$ παρουσιάζει μέγιστη τιμή:

$$z_0 = \tilde{\Gamma} D = \frac{\tilde{\Gamma}}{\omega_n^2} A$$

όπου D , A είναι η μετατόπιση και η ψεύδοεπιτάχυνση του φάσματος σχεδιασμού για ιδιοπερίοδο $T_n = 2\pi/\omega_n$ και λόγο απόσβεσης ζ . Αντικαθιστώντας τη μέγιστη απόκριση z_0 στη σχέση της μετατόπισης και στη σχέση των ελαστικών δυνάμεων, προκύπτουν οι παρακάτω οριακές τιμές

$$u_0 = \tilde{\Gamma} D \psi(x), \quad f_0(x) = \tilde{\Gamma} m \psi(x) A$$

Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα

3.4 Μέγιστη σεισμική απόκριση

- Οι εσωτερικές δυνάμεις (καμπτικές ροπές και τέμνουσες δυνάμεις) προκύπτουν από στατική επίλυση της δοκού που υπόκειται στις δυνάμεις $f_0(x)$. Συνεπώς η Τέμνουσα δύναμη και η Καμπτική ροπή στη βάση, δίνονται ως :

$$V_0(x) = \int_x^L f_0(\xi) d\xi = \tilde{\Gamma}A \int_x^L m(\xi) \psi(\xi) d\xi$$

$$M_0(x) = \int_x^L (\xi - x) f_0(\xi) d\xi = \tilde{\Gamma}A \int_x^L (\xi - x) m(\xi) \psi(\xi) d\xi$$

$$V_{b0} = V_0(0) = \tilde{L} \tilde{\Gamma}A, \quad M_{b0} = M_0(0) = \tilde{L}^\vartheta \tilde{\Gamma}A$$

- Όπου

$$\tilde{L} = \int_0^L m(x) \psi(x) dx, \quad \tilde{L}^\vartheta = \int_0^L x m(x) \psi(x) dx$$

Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα

3.4 Διέγερση από εξωτερική δύναμη

- Στην περίπτωση που η εξωτερική διέγερση αποτελείται από δύναμη $p(t)$ και όχι από κίνηση του εδάφους $u_g(t)$, οι εξισώσεις που προέκυψαν παραπάνω, τροποποιούνται ως:

$$\tilde{m}\ddot{z} + \tilde{k}z = \tilde{p}(t), \quad \tilde{p}(t) = \int_0^L p(x,t)\psi(x)dx$$

- Οι αντίστοιχες στατικές δυνάμεις προκύπτουν ως:

$$f_s(x,t) = M''(x,t) = [EI(x)u''(x,t)]''$$

- Εφαρμόζοντας την αρχή των δυνατών έργων έχουμε:

$$\int_0^L \tilde{f}_s(x,t)\delta u(x)dx = \int_0^L M(x,t)\delta k(x)dx, \quad \tilde{f}_s(x,t) \text{ οι εσωτέρικες δυνάμεις}$$

$$\delta z \int_0^L \tilde{f}_s(x,t)\psi(x)dx = \delta z \left[z(t) \int_0^L EI(x)[\psi''(x)]^2 dx \right]$$

Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα

3.4 Διέγερση από εξωτερική δύναμη

- Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφτεί ως:

$$\int_0^L \left[\tilde{f}_s(x, t) - \omega_n^2 m(x) \psi(x) z(t) \right] \psi(x) dx = 0$$

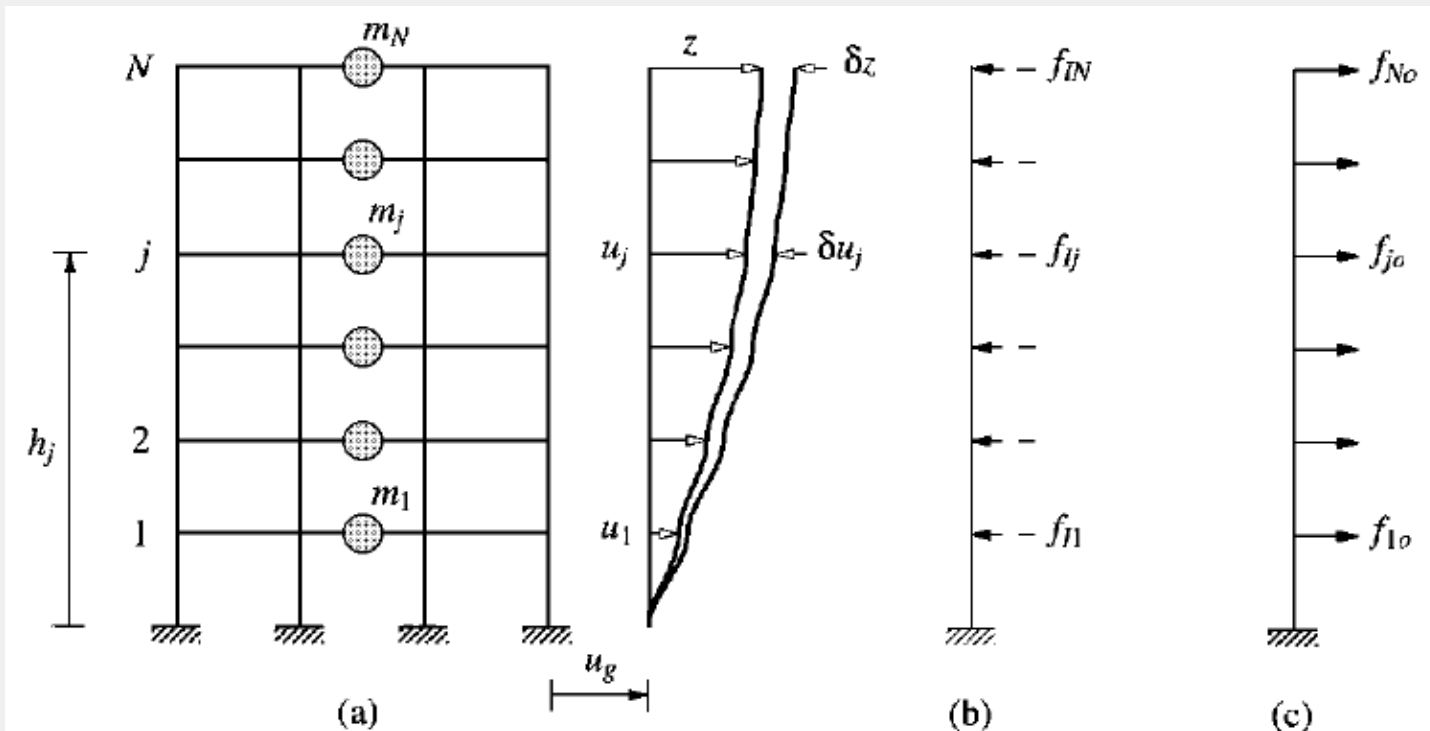
- Θέτοντας την ποσότητα της αγκύλης ίση με μηδέν ισχύει:

$$f_s(x, t) = \omega_n^2 m(x) \psi(x) z(t)$$

Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα

4. Σύστημα συγκεντρωμένων μαζών: Διατμητικό κτίριο

- Ένα παράδειγμα πολυβάθμιου συστήματος που μπορεί να αντιμετωπιστεί ως γενικευμένο μονοβάθμιο σύστημα είναι το παρακάτω:



Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα

4. Σύστημα συγκεντρωμένων μαζών: Διατμητικό κτίριο

- Το παραπάνω κτίριο έχει N βαθμούς ελευθερίας. Στην παρούσα ενότητα η απόσβεση δεν λαμβάνεται υπόψη. Υποθέτουμε ότι οι κινήσεις κάθε ορόφου δίδονται από τη σχέση:

$$u_j(t) = \psi_j z(t), \quad j = 1, 2, \dots, N$$

- Σε μητρική μορφή η παραπάνω εξίσωση γράφεται ως:

$$\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\psi} z(t)$$

- Όπου το $\boldsymbol{\psi}$ είναι ένα υποθετικό διάνυσμα σχήματος, που αντιπροσωπεύει την παραμόρφωση του κτιρίου.
- Η συνολική μετατόπιση του φορέα γράφεται ως:

$$u_j^t(x, t) = u_j(x, t) + u_g(t)$$

Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα

4. Σύστημα συγκεντρωμένων μαζών: Διατμητικό κτίριο

- Στο συγκεκριμένο «διατμητικό κτίριο» η τέμνουσα του κάθε ορόφου δίδεται από τη σχέση:

$$V_j = k_j \Delta_j = k_j (u_j - u_{j-1})$$

- Η δυσκαμψία του κάθε ορόφου δίδεται ως:

$$k_j = \sum_{\text{columns}} \frac{12EI}{h^3}$$

- Οι αδρανειακές δυνάμεις δίδονται ως:

$$f_{ij} = -m_j [\ddot{u}_j(t) + \ddot{u}_g(t)]$$

Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα

4. Σύστημα συγκεντρωμένων μαζών: Διατμητικό κτίριο

- Για την εξαγωγή της εξίσωσης ισορροπίας χρησιμοποιείται η αρχή των δυνατών έργων:

$$\delta W_E = - \sum_{j=1}^N m_j \ddot{u}_j(t) \delta u_j - \ddot{u}_g(t) \sum_{j=1}^N m_j \delta u_j$$

$$\delta W_I = \sum_{j=1}^N V_j(t) (\delta u_j - \delta u_{j-1})$$

- Οι μετακινήσεις εκφράζονται συναρτήσει της γενικευμένης συντεταγμένης:

$$\delta u_j = \psi_j \delta z \Rightarrow \delta \mathbf{u} = \boldsymbol{\psi} \delta z$$

Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα

4. Σύστημα συγκεντρωμένων μαζών: Διατμητικό κτίριο

- Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις των μετατοπίσεων, οι εκφράσεις του εσωτερικού και εξωτερικού έργου γράφονται ως:

$$\delta W_E = -\delta z \left[\dot{z} \sum_{j=1}^N m_j \psi_j^2 + \ddot{u}_g(t) \sum_{j=1}^N m_j \psi_j \right], \quad \delta W_I = \delta z \left[z \sum_{j=1}^N k_j (\psi_j - \psi_{j-1})^2 \right]$$

- Εξισώνοντας τις εκφράσεις των έργων, προκύπτει η παρακάτω εξίσωση:

$$\tilde{m}\ddot{z} + \tilde{k}z = -\tilde{L}\ddot{u}_g(t)$$

$$\tilde{m} = \sum_{j=1}^N m_j \psi_j^2, \quad \tilde{k} = \sum_{j=1}^N k_j (\psi_j - \psi_{j-1})^2, \quad \tilde{L} = \sum_{j=1}^N m_j \psi_j$$

Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα

4. Σύστημα συγκεντρωμένων μαζών: Διατμητικό κτίριο

- Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις ισχύει:

$$\omega_n^2 = \frac{\tilde{k}}{\tilde{m}} = \frac{\sum_{j=1}^N k_j (\psi_j - \psi_{j-1})^2}{\sum_{j=1}^N m_j \psi_j^2}$$

- Για να υπολογίσουμε τις μέγιστες μετατοπίσεις, εργαζόμαστε και πάλι ως εξής:

$$u_{j0} = \psi_j z_0 = \tilde{\Gamma} D \psi_j, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα

4. Σύστημα συγκεντρωμένων μαζών: Διατμητικό κτίριο

- Οι ισοδύναμες στατικές δυνάμεις, που σχετίζονται με τις κινήσεις των ορόφων προκύπτουν ως:

$$f_{j0} = \tilde{\Gamma} m_j \psi_j A, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

- Στατική ανάλυση με τις παραπάνω δυνάμεις, δίνει την τέμνουσα δύναμη και τη ροπή ανατροπής στον i όροφο:

$$V_{i0} = \sum_{j=1}^N f_{j0}, \quad M_{i0} = \sum_{j=1}^N (h_j - h_i) f_{j0}$$

- Η τέμνουσα δύναμη και η ροπή ανατροπής ως προς τη βάση του κτιρίου δίδονται ως:

$$V_{b0} = \sum_{j=1}^N f_{j0} = \tilde{L} \tilde{\Gamma} A, \quad M_{b0} = \sum_{j=1}^N h_j f_{j0} = \tilde{L}^\vartheta \tilde{\Gamma} A$$

$$\tilde{L} = \sum_{i=1}^n m_i \psi_i, \quad \tilde{L}^\vartheta = \sum_{i=1}^n h_i m_i \psi_i$$

Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα

5. Φυσική συχνότητα ταλάντωσης με τη μέθοδο Rayleigh

- Σύστημα μάζας-ελατηρίου:

- Μέχρι στιγμής έχει αποδειχθεί ότι ένα μονοβάθμιο σύστημα, όταν εκτρέπεται από τη θέση ισορροπίας του και αφήνεται να ταλαντωθεί, ταλαντώνεται με συχνότητα τη φυσική συχνότητα ω_n , η οποία ισούται με

$$\omega_n = \sqrt{k/m}$$

- Στη συνέχεια θα εξαχθεί το ίδιο αποτέλεσμα εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας. Η απλή αρμονική κίνηση ενός ελεύθερα ταλαντούμενου συστήματος μπορεί να εκφραστεί, ορίζοντας ξανά την αρχή της μεταβλητής t' :

$$u(t') = u_0 \sin \omega_n t', \quad \dot{u}(t') = \omega_n u_0 \cos \omega_n t'$$

Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα

5. Φυσική συχνότητα ταλάντωσης με τη μέθοδο Rayleigh

• Συστήματα μάζας-ελατηρίου:

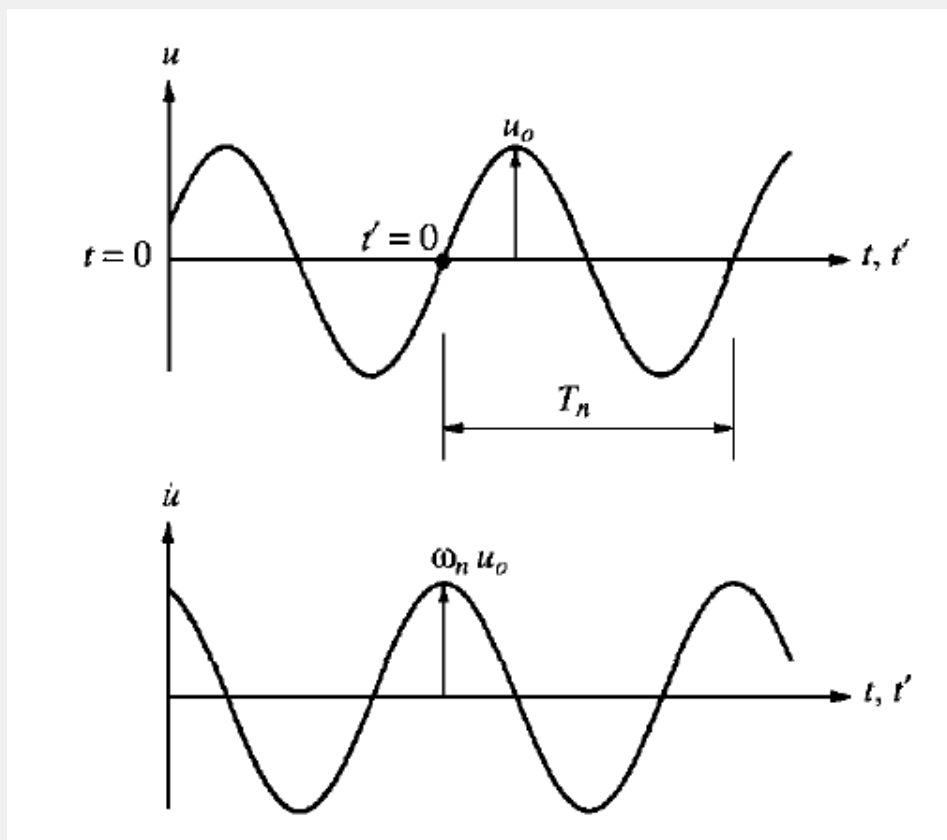
- Η μέγιστη δυναμική ενέργεια παρουσιάζεται στη θέση $T_n/4$, όταν $u(t)=u_0$

$$E_{s0} = \frac{1}{2} k u_0^2$$

- Η μέγιστη κινητική ενέργεια παρουσιάζεται στη θέση 0, όταν η ταχύτητα είναι

$$\dot{u}(t') = \omega_n u_0$$

$$E_{k0} = \frac{1}{2} m \omega_n^2 u_0^2$$



Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα

5. Φυσική συχνότητα ταλάντωσης με τη μέθοδο Rayleigh

- **Συστήματα μάζας-ελατηρίου:**

- Σύμφωνα με την αρχή της διατήρησης της ενέργειας η συνολική ενέργεια του συστήματος πρέπει να είναι σταθερή

$$\frac{1}{2}ku_0^2 = \frac{1}{2}m\omega_n^2u_0^2$$

- Συνεπώς προκύπτει ότι:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- Η αρχή διατήρησης της ενέργειας είναι χρήσιμη για πολύπλοκα συστήματα

Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα

5. Φυσική συχνότητα ταλάντωσης με τη μέθοδο Rayleigh

- Συστήματα διανεμημένης μάζας και δυσκαμψίας:

- Θεωρούμε το σύστημα προβόλου που έχει αναλυθεί στις προηγούμενες ενότητες

$$u(x, t) = z_0 \psi(x) \sin \omega_n t, \quad \dot{u}(x, t) = \omega_n z_0 \psi(x) \cos \omega_n t'$$

- Η μέγιστη δυναμική ενέργεια του συστήματος σε ένα κύκλο ταλάντωσης δίδεται ως:

$$E_{s0} = \int_0^L \frac{1}{2} EI(x) [u_0''(x)]^2 dx$$

- Η μέγιστη κινητική ενέργεια του συστήματος σε ένα κύκλο ταλάντωσης δίδεται ως:

$$E_{k0} = \int_0^L \frac{1}{2} m(x) [\dot{u}_0(x)]^2 dx$$

Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα

5. Φυσική συχνότητα ταλάντωσης με τη μέθοδο Rayleigh

- Συστήματα διανεμημένης μάζας και δυσκαμψίας:

- Λαμβάνοντας υπόψη ότι ισχύει:

$$u_0 = z_0 \psi(x), \quad \dot{u}_0 = \omega_n z_0 \psi(x)$$

- Και εξισώνοντας τη δυναμική με την κινητική ενέργεια προκύπτει:

$$\omega_n^2 = \frac{\int_0^L EI(x) [\psi''(x)]^2 dx}{\int_0^L m(x) [\psi(x)]^2 dx}$$

- Το παραπάνω πηλίκο είναι γνωστό ως πηλίκο του Rayleigh.

Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα

5. Φυσική συχνότητα ταλάντωσης με τη μέθοδο Rayleigh

- Συστήματα με συγκεντρωμένες μάζες:

- Θεωρούμε ξανά το διατμητικό κτίριο που εξετάστηκε στις προηγούμενες ενότητες. Όμοια με πριν, ισχύει:

$$\mathbf{u}(t) = z_0 \sin \omega_n t' \boldsymbol{\psi}, \quad \dot{\mathbf{u}}(t) = \omega_n z_0 \cos \omega_n t' \boldsymbol{\psi}$$

- Η μέγιστη δυναμική ενέργεια του συστήματος σε ένα κύκλο ταλάντωσης δίδεται ως:

$$E_{s0} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} k_j (u_{j0} - u_{j-1,0})^2$$

- Η μέγιστη κινητική ενέργεια του συστήματος σε ένα κύκλο ταλάντωσης δίδεται ως:

$$E_{k0} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m_j \dot{u}_{j0}^2$$

Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα

5. Φυσική συχνότητα ταλάντωσης με τη μέθοδο Rayleigh

- Συστήματα με συγκεντρωμένες μάζες:

- Λαμβάνοντας υπόψη ότι ισχύει:

$$u_{j0} = z_0 \psi_j, \quad \dot{u}_{j0} = \omega_n z_0 \psi_j$$

και εξισώνοντας τη δυναμική με την κινητική ενέργεια προκύπτει:

$$\omega_n^2 = \frac{\sum_{j=1}^N k_j (\psi_j - \psi_{j-1})^2}{\sum_{j=1}^N m_j \psi_j^2}$$

- Το παραπάνω πηλίκο είναι το πηλίκο του Rayleigh για το διατμητικό κτίριο.

Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα

5. Φυσική συχνότητα ταλάντωσης με τη μέθοδο Rayleigh

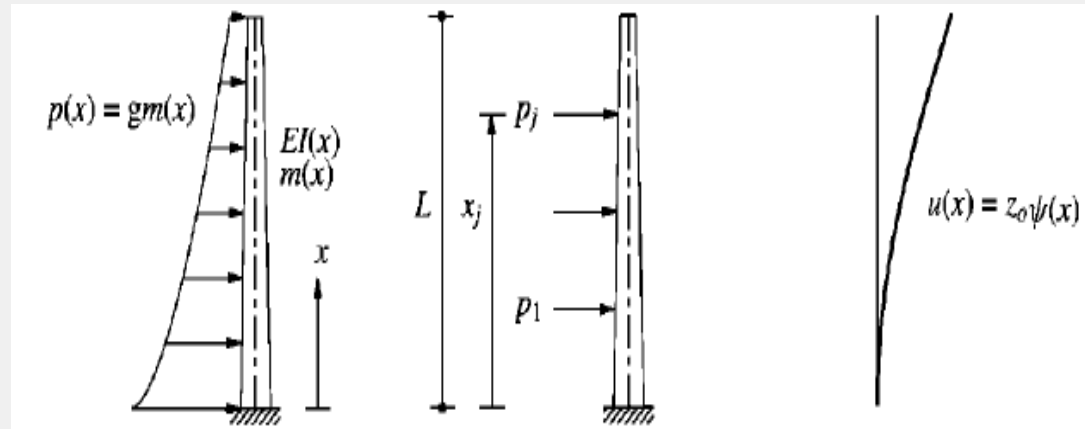
- **Ιδιότητες του πηλίκου Rayleigh:**

- Η προσεγγιστική ιδιοσυχνότητα που λαμβάνεται από την υποθετική συνάρτηση σχήματος είναι πάντα μεγαλύτερη από την θεμελιώδη φυσική συχνότητα του συστήματος.
- Το πηλίκο του Rayleigh παρέχει ακριβή εκτίμηση της θεμελιώδους συχνότητας ακόμα και για μια όχι τόσο ακριβή συνάρτηση σχήματος.

Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα

6. Επιλογή συναρτήσεων σχήματος

- Όπως έχει αναλυθεί στα προηγούμενα, η ακρίβεια υπολογισμού της φυσικής συχνότητας μέσω του πηλίκου του Rayleigh εξαρτάται από την επιλογή συνάρτησης σχήματος. Ως συνάρτηση σχήματος μπορεί να επιλεγεί οποιαδήποτε συνάρτηση ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος.
- Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος ικανοποιούνται αυτόματα, αν ως συνάρτηση σχήματος επιλεγεί η ελαστική γραμμή εξαιτίας κάποιας στατικής εξωτερικής φόρτισης
- Η θεώρηση αυτή έχει το πλεονέκτημα ότι η ενέργεια παραμορφώσεως μπορεί να υπολογιστεί ως το έργο που παράγεται από τις εξωτερικές δυνάμεις για να παράγουν αυτές τις μετατοπίσεις.



Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα

6. Επιλογή συναρτήσεων σχήματος

- Το έργο παραμορφώσεως γράφεται ως:

$$E_{s0} = \frac{1}{2} z_0 g \int_0^L m(x) \psi(x) dx$$

- Επομένως σύμφωνα με όσα έχουν αναλυθεί στις προηγούμενες ενότητες ισχύει:

$$\omega_n^2 = \frac{g}{z_0} \frac{\int_0^L m(x) \psi(x) dx}{\int_0^L m(x) [\psi(x)]^2 dx} = g \frac{\int_0^L m(x) u(x) dx}{\int_0^L m(x) [u(x)]^2 dx}$$

Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα

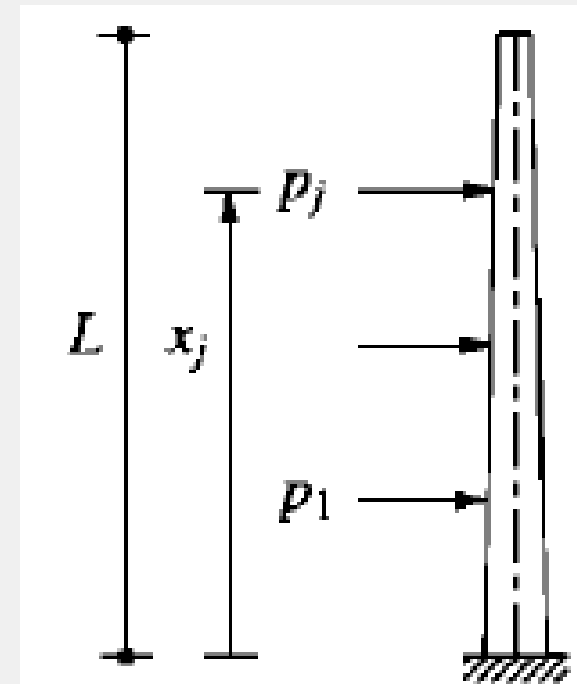
6. Επιλογή συναρτήσεων σχήματος

- Ομοίως το μέγιστο έργο παραμορφώσεως του συστήματος που σχετίζεται με τις μετατοπίσεις $u(x)$ εξαιτίας των δυνάμεων που φαίνονται στο σχήμα είναι :

$$E_{s0} = \frac{1}{2} z_0 g \sum_j p_j \psi(x_j)$$

- Συνεπώς προκύπτει:

$$\omega_n^2 = \frac{1}{z_0} \frac{\sum_j p_j \psi(x_j)}{\int_0^L m(x) [\psi(x)]^2 dx} = \frac{\sum_j p_j u(x_j)}{\int_0^L m(x) [u(x)]^2 dx}$$





Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο
Hellenic Open University

Μέρος II: Πολυβάθμια Συστήματα

Διδάσκων: Ε.Ι. Σαπουντζάκης

Δυναμική των Κατασκευών

Περιεχόμενα

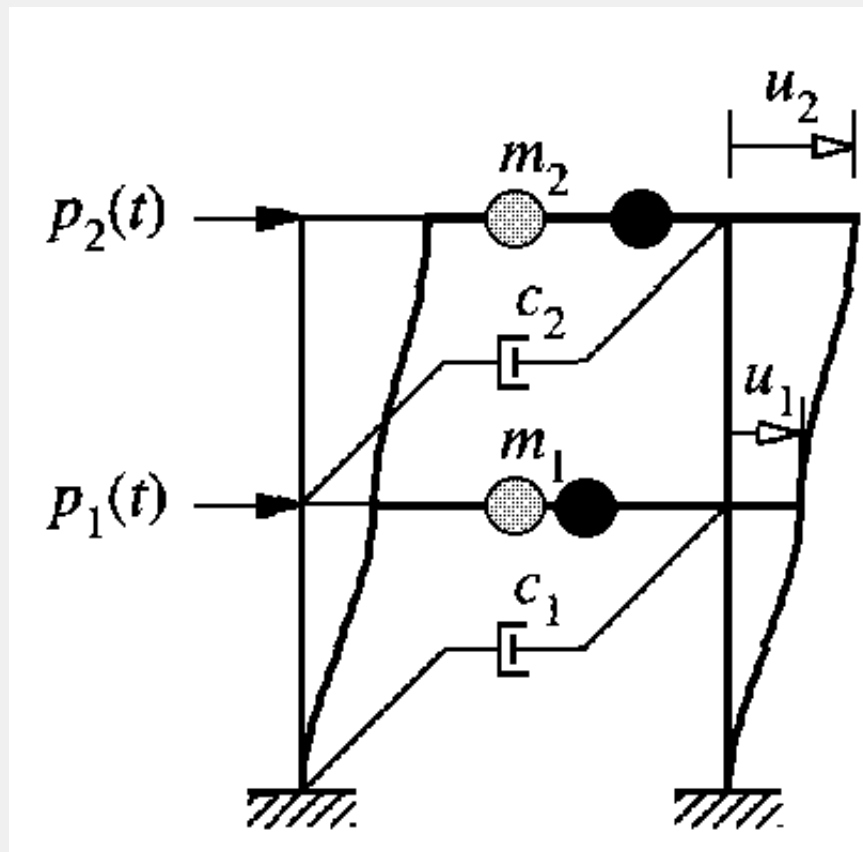
1. Εξισώσεις κίνησης και μέθοδοι επίλυσης
2. Ελεύθερες ταλαντώσεις πολυβαθμίων συστημάτων
3. Απόσβεση στις κατασκευές
4. Δυναμική ανάλυση και απόκριση γραμμικών συστημάτων
5. Σεισμική ανάλυση γραμμικών συστημάτων
6. Μείωση βαθμών ελευθερίας
7. Αριθμητικός υπολογισμός δυναμικής απόκρισης
8. Συστήματα με κατανεμημένη μάζα και ελαστικότητα
9. Σεισμική απόκριση γραμμικώς ελαστικών κτιρίων

Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

1. Απλό πολυβάθμιο σύστημα: Διώροφο διατμητικό κτίριο

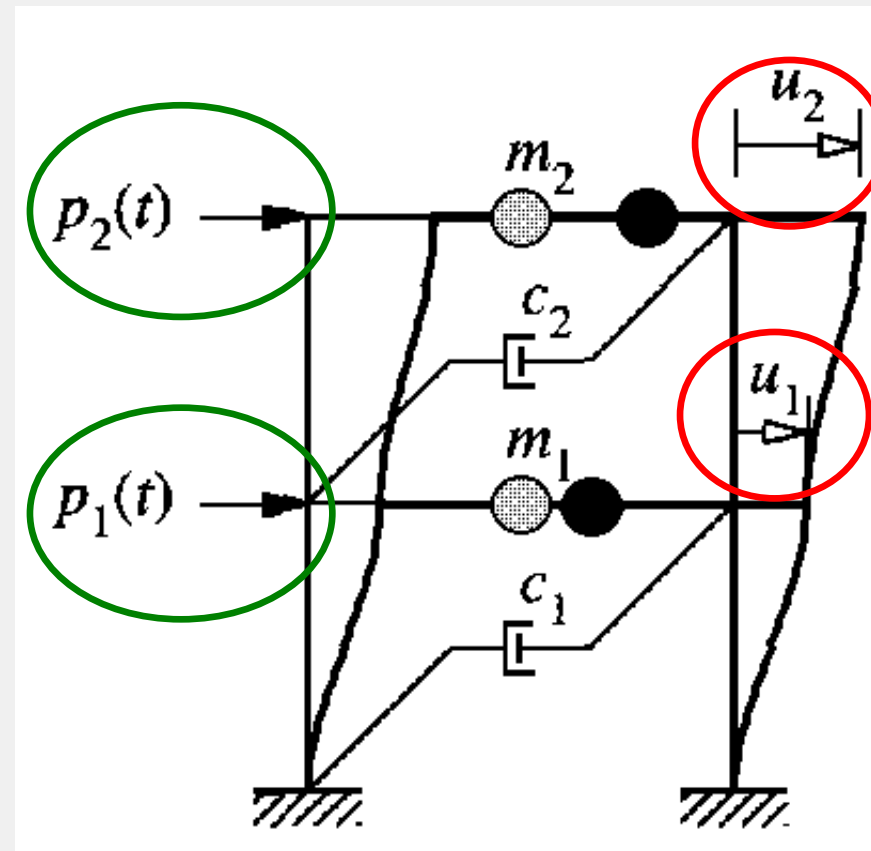
- Οι δοκοί θεωρούνται άκαμπτες
- Αγνοείται η αξονική παραμόρφωση των δοκών και υποστυλωμάτων
- Αγνοείται η επιρροή της αξονικής δύναμης στη δυσκαμψία των υποστυλωμάτων
- Η μάζα θεωρείται συγκεντρωμένη στα επίπεδα των ορόφων
- Θεωρείται γραμμική ιξώδης απόσβεση



Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

1. Απλό πολυβάθμιο σύστημα: Διώροφο διατμητικό κτίριο

- Τα οριζόντια φορτία p_1 και p_2 ασκούνται στις στάθμες των ορόφων
- Δύο βαθμοί ελευθερίας κίνησης: Οι οριζόντιες μετατοπίσεις των ορόφων



Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

1. Απλό πολυβάθμιο σύστημα: Διώροφο διατμητικό κτίριο

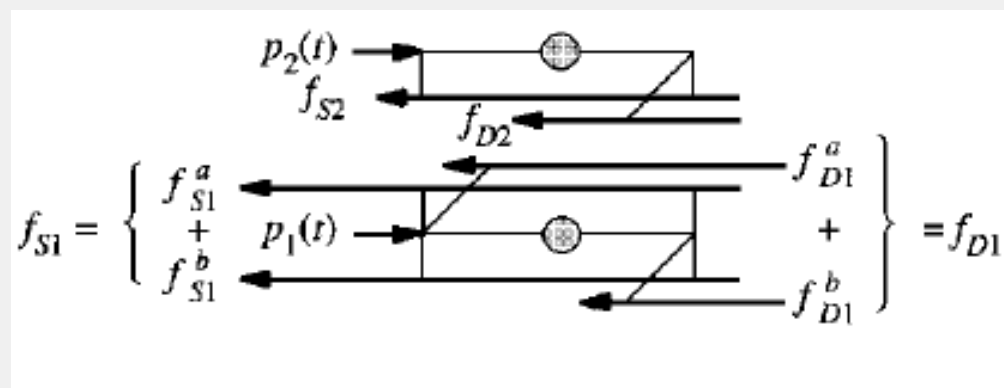
- Εξισώση κίνησης με το **2^ο Νόμο του Νεύτωνα**:

$$p_j - f_{sj} - f_{Dj} = m_j \ddot{u}_j \Rightarrow m_j \ddot{u}_j + f_{Dj} + f_{sj} = p_j(t) \quad (j = 1 \dots 2)$$

f_{sj} : Ελαστική δύναμη για τον j όροφο

f_{Dj} : Δύναμη απόσβεσης για τον j όροφο

p_j : Εξωτερική δύναμη στον j όροφο



Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

1. Απλό πολυβάθμιο σύστημα: Διώροφο διατμητικό κτίριο

- Εξισώσεις κίνησης σε μητρωϊκή μορφή:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{s1} \\ f_{s2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_D + \mathbf{f}_s = \mathbf{p}(\mathbf{t})$$

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_D = \begin{Bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f}_s = \begin{Bmatrix} f_{s1} \\ f_{s2} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{p}(t) = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix}$$

Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

1. Απλό πολυβάθμιο σύστημα: Διώροφο διατμητικό κτίριο

- Εξισώσεις κίνησης σε μητρωϊκή μορφή: $\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_D + \mathbf{f}_s = \mathbf{p}(\mathbf{t})$

Οι ελαστικές δυνάμεις \mathbf{f}_s συσχετίζονται με τις μετατοπίσεις \mathbf{u} :

$$\left. \begin{aligned} f_{s1} &= f_{s1}^a + f_{s2}^b = k_1 u_1 + k_2 (u_1 - u_2) \\ f_{s2} &= k_2 (u_2 - u_1) \end{aligned} \right\} k_j = \sum_{\text{Υπ/τα}} \frac{12EI_c}{h^3}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{s1} \\ f_{s2} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{f}_s = \mathbf{k}\mathbf{u}$$

Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

1. Απλό πολυβάθμιο σύστημα: Διώροφο διατμητικό κτίριο

- Εξισώσεις κίνησης σε μητρωϊκή μορφή: $\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_D + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}(\mathbf{t})$

Οι δυνάμεις απόσβεσης \mathbf{f}_D συσχετίζονται με τις ταχύτητες $\dot{\mathbf{u}}$:

$$\left. \begin{aligned} f_{D1} &= c_1\dot{u}_1 + c_2(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) \\ f_{D2} &= c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) \end{aligned} \right\} c_j : \text{Συντελεστής απόσβεσης}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{f}_D = \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}$$

Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

1. Απλό πολυβάθμιο σύστημα: Διώροφο διατμητικό κτίριο

- Εξισώσεις κίνησης σε μητρωϊκή μορφή:

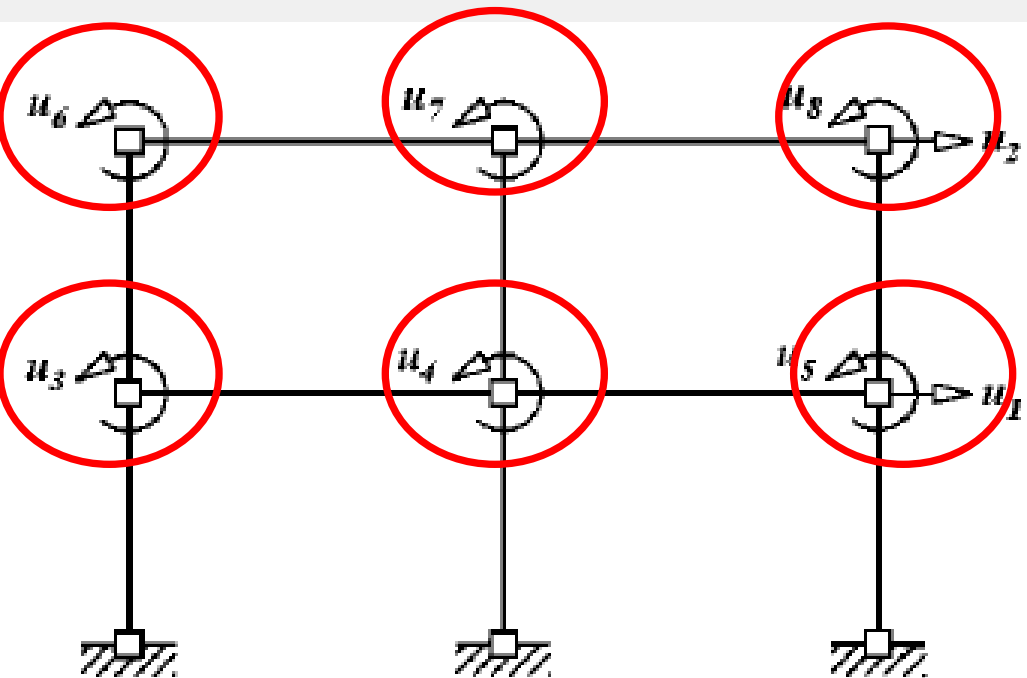
$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}(\mathbf{t})$$

Σύστημα δύο συνήθων διαφορικών εξισώσεων ως προς τις άγνωστες μετατοπίσεις $u_1(t)$ και $u_2(t)$ που δημιουργούνται από τη δράση των εξωτερικών δυνάμεων $p_1(t)$ και $p_2(t)$. Οι εξισώσεις αυτές πρέπει να επιλυθούν ταυτόχρονα.

Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

2. Γενική μεθοδολογία για γραμμικά συστήματα

- Διακριτοποίηση πλαισιωτής κατασκευής σε ένα σύνολο δοκών-υποστυλωμάτων που συνδέονται στους κόμβους:

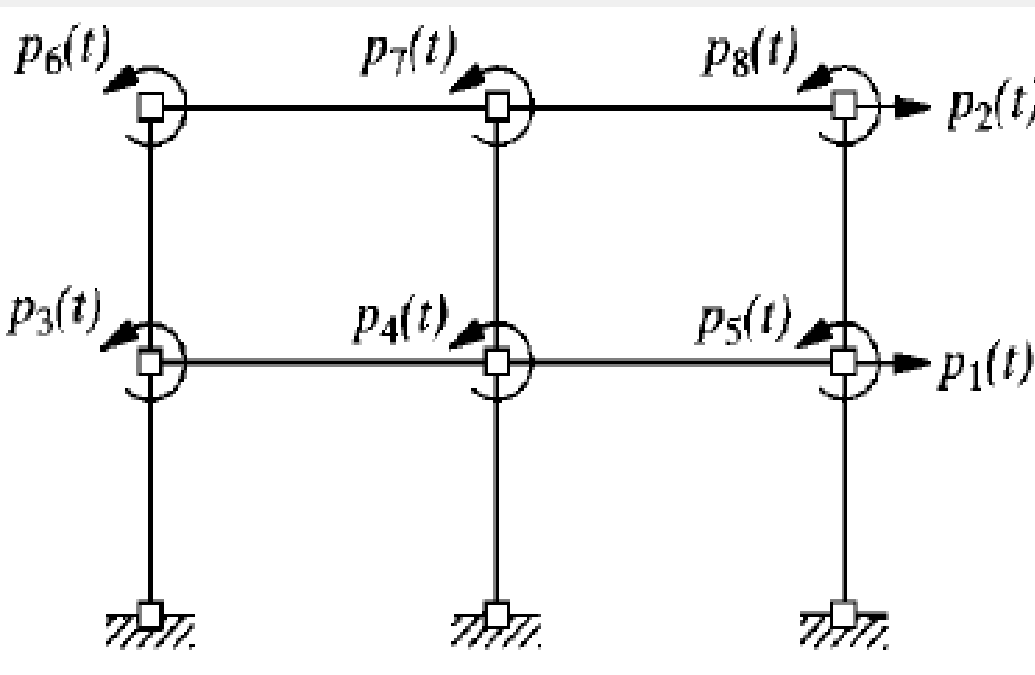


- 10 δομικά μέλη
- 18 βαθμοί ελευθερίας (β.ε): 2 μετατοπίσεις και 1 στροφή ανά κόμβο
- Βασική παραδοχή: Αμελούμε την αξονική παραμόρφωση
→ Μείωση β.ε. σε 8

Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

2. Γενική μεθοδολογία για γραμμικά συστήματα

- Τα εξωτερικά φορτία ασκούνται στους κόμβους:

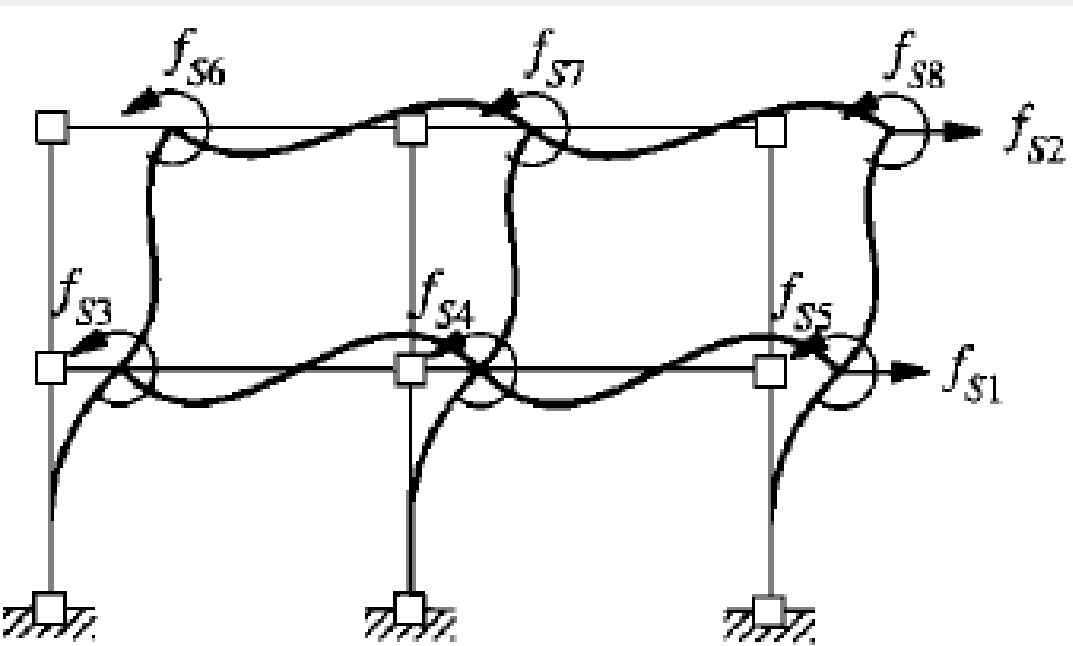


- Οι εξωτερικές ροπές $p_3(t)$ – $p_8(t)$ είναι ίσες με μηδέν στις περισσότερες πρακτικές περιπτώσεις

Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

2. Γενική μεθοδολογία για γραμμικά συστήματα

- Ελαστικές δυνάμεις (Συντελεστές επιρροής δυσκαμψίας):

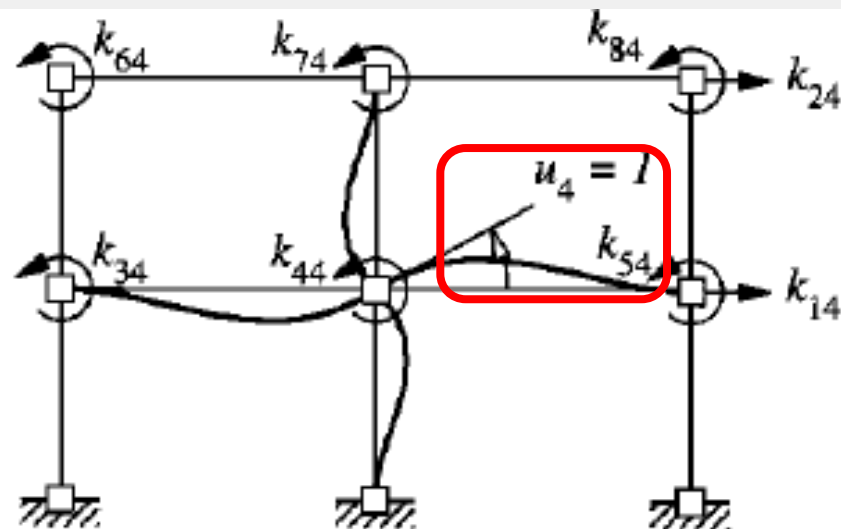
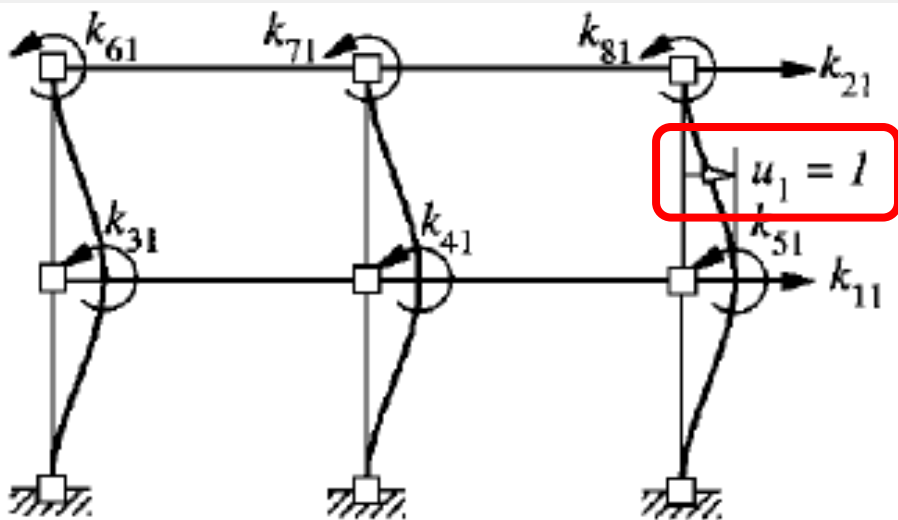


- Θέλουμε να συσχετίσουμε τις εξωτερικές δυνάμεις f_{sj} με τις προκύπτουσες μετακινήσεις u_j
- Επιτυγχάνεται με τη μέθοδο των *συντελεστών επιρροής δυσκαμψίας* που βασίζεται στην αρχή της επαλληλίας

Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

2. Γενική μεθοδολογία για γραμμικά συστήματα

- Ελαστικές δυνάμεις (Συντελεστές επιρροής δυσκαμψίας):
 - Δίδουμε μοναδιαία μετατόπιση ή στροφή κατά τον β.ε. j διατηρώντας τις υπόλοιπες ίσες με μηδέν.



Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

2. Γενική μεθοδολογία για γραμμικά συστήματα

- Ελαστικές δυνάμεις (Συντελεστές επιρροής δυσκαμψίας):
 - Για τη διατήρηση των παραμορφωμένων καταστάσεων που δημιουργούνται στο φορέα, αναπτύσσονται δυνάμεις σε όλους γενικά τους β.ε.
 - Ο συντελεστής επιρροής δυσκαμψίας k_{ij} εκφράζει τη δύναμη που πρέπει να ασκηθεί κατά το β.ε. i ώστε να αναπτυχθεί μοναδιαία μετατόπιση κατά τον β.ε. j με όλες τις υπόλοιπες μετατοπίσεις ίσες με το μηδέν.
 - Οι δυνάμεις τοποθετούνται με τη θετική τους φορά, αλλά ενδέχεται να προκύψουν αρνητικές ώστε να είναι σύμφωνες με τις επιβαλλόμενες μετατοπίσεις.

Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

2. Γενική μεθοδολογία για γραμμικά συστήματα

- Ελαστικές δυνάμεις (Συντελεστές επιρροής δυσκαμψίας):

- Η δύναμη f_{si} κατά τον β.ε. i προκύπτει από την επαλληλία:

$$f_{si} = k_{i1}u_1 + k_{i2}u_2 + \cdots + k_{ij}u_j + \cdots + k_{iN}u_N$$

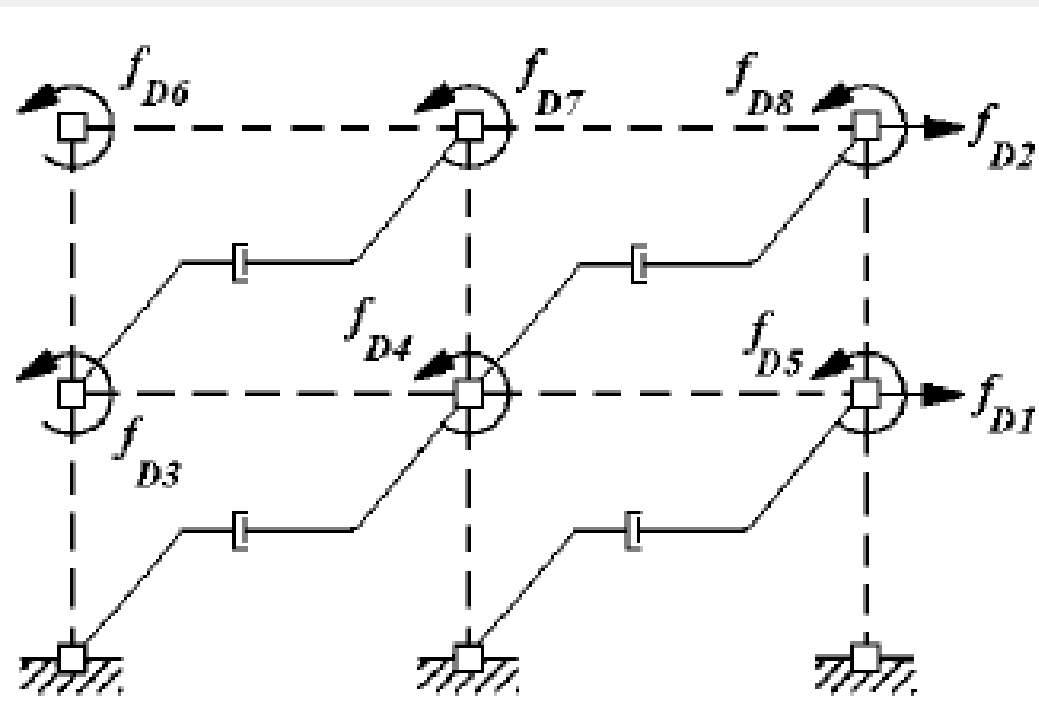
- Σε μητρωϊκή γραφή ισχύει:

$$\begin{Bmatrix} f_{s1} \\ f_{s2} \\ \vdots \\ f_{sN} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1j} & \cdots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2j} & \cdots & k_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{N1} & k_{N2} & \cdots & k_{Nj} & \cdots & k_{NN} \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{f}_s = \mathbf{k}\mathbf{u}$$

Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

2. Γενική μεθοδολογία για γραμμικά συστήματα

- Δυνάμεις απόσβεσης (Ιξώδης απόσβεση):



- Θέλουμε να συσχετίσουμε τις εξωτερικές δυνάμεις f_{Dj} με τις προκύπτουσες ταχύτητες
- Επιτυγχάνεται με την παραδοχή *ιξώδους απόσβεσης*

Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

2. Γενική μεθοδολογία για γραμμικά συστήματα

- Δυνάμεις απόσβεσης (Ιξώδης απόσβεση):
 - Δίνουμε μοναδιαία ταχύτητα κατά τον β.ε. j διατηρώντας τις υπόλοιπες ίσες με μηδέν. Οι ταχύτητες αυτές θα προκαλέσουν εσωτερικές δυνάμεις απόσβεσης, ενώ εξωτερικές δυνάμεις θα είναι απαραίτητες για να ισοροπήσουν τις εσωτερικές.
 - Ο συντελεστής επιρροής απόσβεσης c_{ij} εκφράζει την εξωτερική δύναμη κατά το β.ε. i εξαιτίας μοναδιαίας ταχύτητας κατά τον β.ε. j με όλες τις υπόλοιπες ταχύτητες ίσες με το μηδέν.

Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

2. Γενική μεθοδολογία για γραμμικά συστήματα

- Δυνάμεις απόσβεσης (Ιξώδης απόσβεση):

- Οι εξωτερικές δυνάμεις f_{Dj} συσχετίζονται με τις ταχύτητες ως εξής:

$$f_{Di} = c_{i1}\dot{u}_1 + c_{i2}\dot{u}_2 + \dots + c_{ij}\dot{u}_j + \dots + c_{iN}\dot{u}_N$$

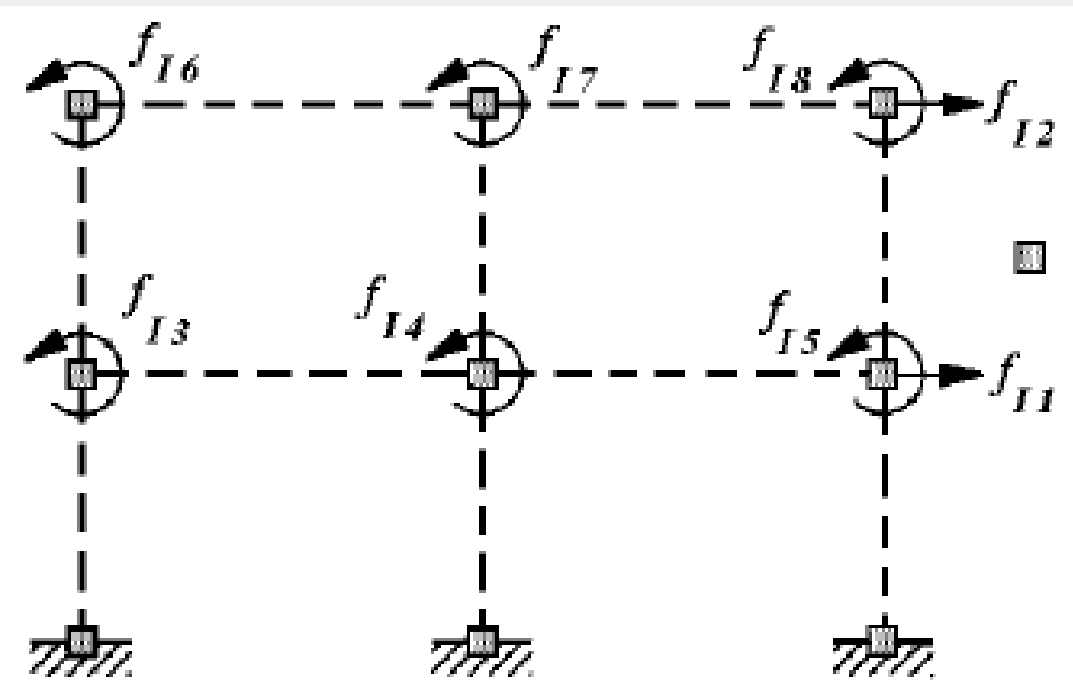
- Σε μητρωϊκή γραφή ισχύει:

$$\begin{Bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \\ \vdots \\ f_{DN} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & \dots & c_{Nj} & \dots & c_{NN} \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \vdots \\ \dot{u}_N \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{f}_D = \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}$$

Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

2. Γενική μεθοδολογία για γραμμικά συστήματα

- Αδρανειακές δυνάμεις (Συγκεντρωμένες μάζες):

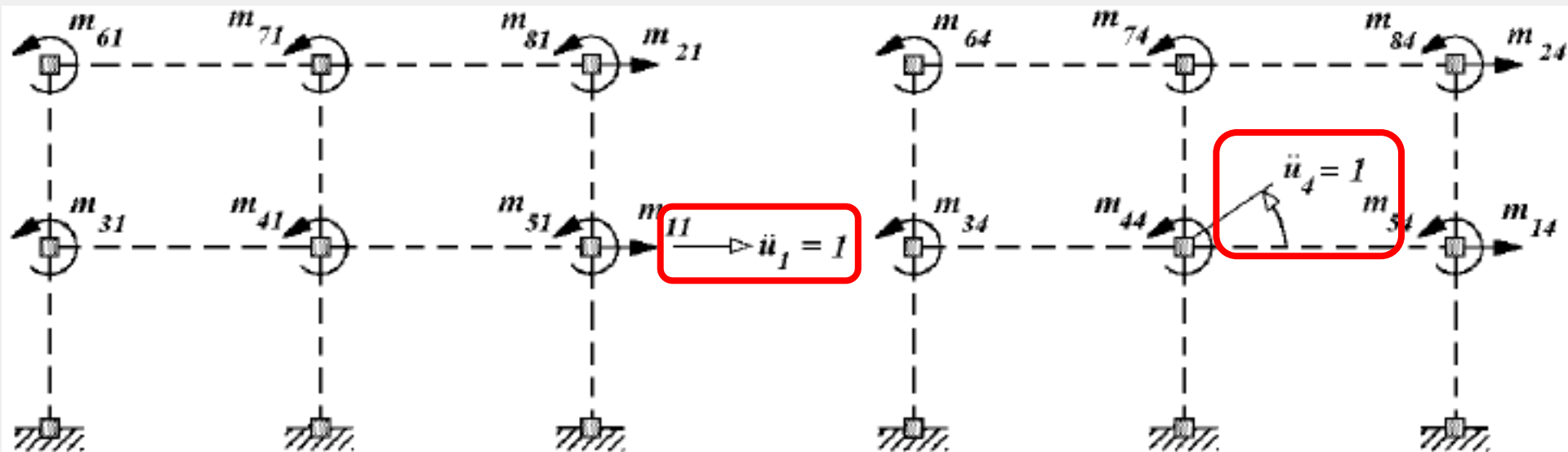


- Θέλουμε να συσχετίσουμε τις εξωτερικές δυνάμεις f_{ij} με τις προκύπτουσες επιταχύνσεις
- Υιοθετείται η παραδοχή των συγκεντρωμένων μαζών στους κόμβους του πλαισίου

Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

2. Γενική μεθοδολογία για γραμμικά συστήματα

- Αδρανειακές δυνάμεις (Συγκεντρωμένες μάζες):
 - Εφαρμόζουμε μοναδιαία επιτάχυνση κατά τον β.ε. j διατηρώντας τις υπόλοιπες ίσες με μηδέν.



Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

2. Γενική μεθοδολογία για γραμμικά συστήματα

- Αδρανειακές δυνάμεις (Συγκεντρωμένες μάζες):
 - Σύμφωνα με την αρχή D' Alembert οι υποθετικές αδρανειακές δυνάμεις αντιστέκονται στις μοναδιαίες επιταχύνσεις.
 - Ο συντελεστής επιρροής μάζας m_{ij} εκφράζει την εξωτερική δύναμη κατά το β.ε. i εξαιτίας της επιτάχυνσης κατά τον β.ε. j με όλες τις υπόλοιπες επιταχύνσεις ίσες με το μηδέν.

Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

2. Γενική μεθοδολογία για γραμμικά συστήματα

- Αδρανειακές δυνάμεις (Συγκεντρωμένες μάζες):

- Οι εξωτερικές δυνάμεις f_{ij} συσχετίζονται με τις επιταχύνσεις ως εξής:

$$f_{Ci} = m_{i1}\ddot{u}_1 + m_{i2}\ddot{u}_2 + \dots + m_{ij}\ddot{u}_j + \dots + m_{iN}\ddot{u}_N$$

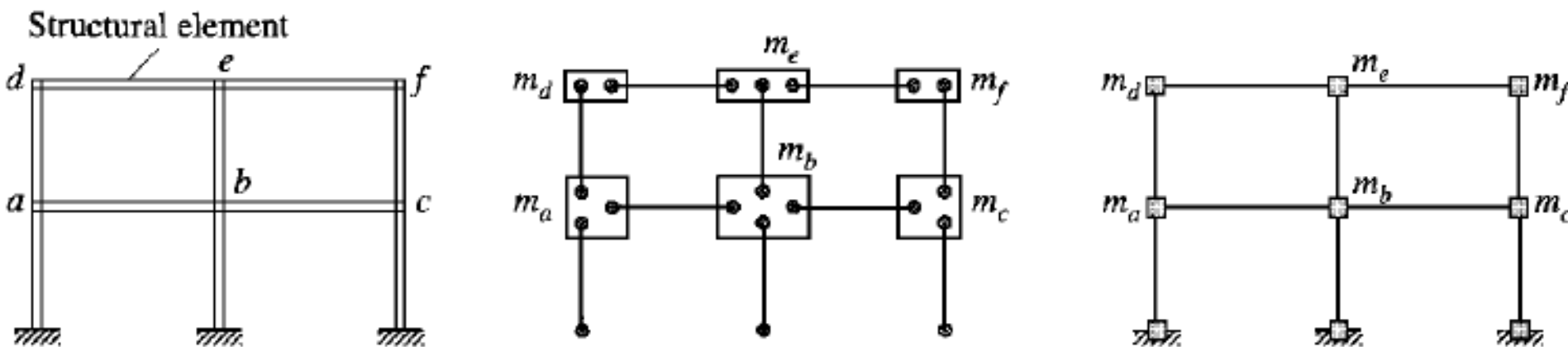
- Σε μητρωϊκή γραφή ισχύει:

$$\begin{Bmatrix} f_{I1} \\ f_{I2} \\ \vdots \\ f_{IN} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1j} & \dots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2j} & \dots & m_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{N1} & m_{N2} & \dots & m_{Nj} & \dots & m_{NN} \end{bmatrix}}_{\mathbf{m}} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_N \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{f}_I = \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}$$

Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

2. Γενική μεθοδολογία για γραμμικά συστήματα

- Αδρανειακές δυνάμεις (Συγκεντρωμένες μάζες):
 - Οι διάφορες μάζες στους κόμβους υπολογίζονται με αντικατάσταση κάθε δομικού στοιχείου από σημειακές μάζες που καθορίζονται από τη στατική.
 - Η συγκεντρωμένη μάζα σε κάθε κόμβο είναι το άθροισμα των συνεισφορών όλων των δομικών στοιχείων που συντρέχουν στον κόμβο.
 - Η στροφική αδράνεια των συγκεντρωμένων μαζών θεωρείται αμελητέα.



Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

2. Γενική μεθοδολογία για γραμμικά συστήματα

- Αδρανειακές δυνάμεις (Συγκεντρωμένες μάζες):
 - Σε γενικές γραμμές το μητρώο μάζας που προκύπτει με την παραδοχή συγκεντρωμένων μαζών είναι διαγώνιο:

$$m_{ij} = 0 \quad \text{για } i \neq j$$

$$m_{jj} = m_j \quad \text{ή } 0$$

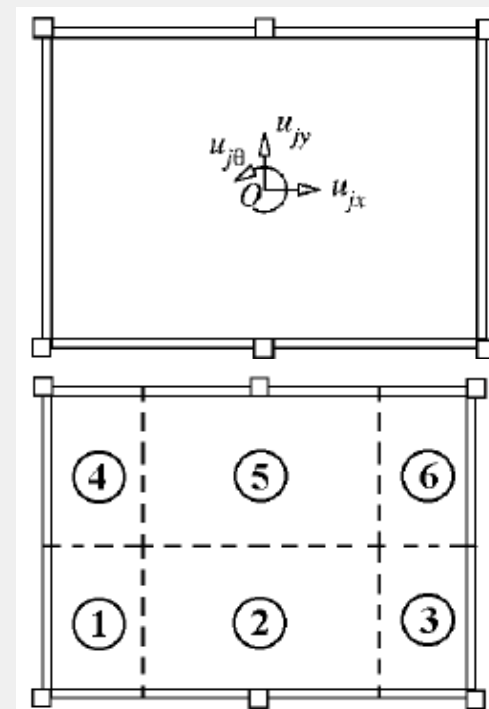
- m_j είναι η συγκεντρωμένη μάζα στον κόμβο και σχετίζεται με όλους τους μεταφορικούς β.ε. Η τιμή 0 αντιστοιχεί στους στροφικούς β.ε.

Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

2. Γενική μεθοδολογία για γραμμικά συστήματα

- Θεωρήσεις για την κατανομή της μάζας των ορόφων:

- Διαφραγματική λειτουργία: Οι πλάκες θεωρούνται άκαμπτες στο επίπεδο τους (συνήθης παραδοχή για πλάκες από σκυρόδεμα) → Η κίνηση των πλαισίων δεν είναι ανεξάρτητη → 3 β.ε στο επίπεδο της πλάκας
- Μη διαφραγματική λειτουργία (π.χ σε ελαφρά ξύλινα δάπεδα) Η μάζα της πλάκας κατανέμεται στους κόμβους και η ευκαμψία του διαφράγματος πρέπει να ληφθεί υπόψη (ενδείκνυται η χρήση FEM)



Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

2. Γενική μεθοδολογία για γραμμικά συστήματα

- Εξισώσεις κίνησης:

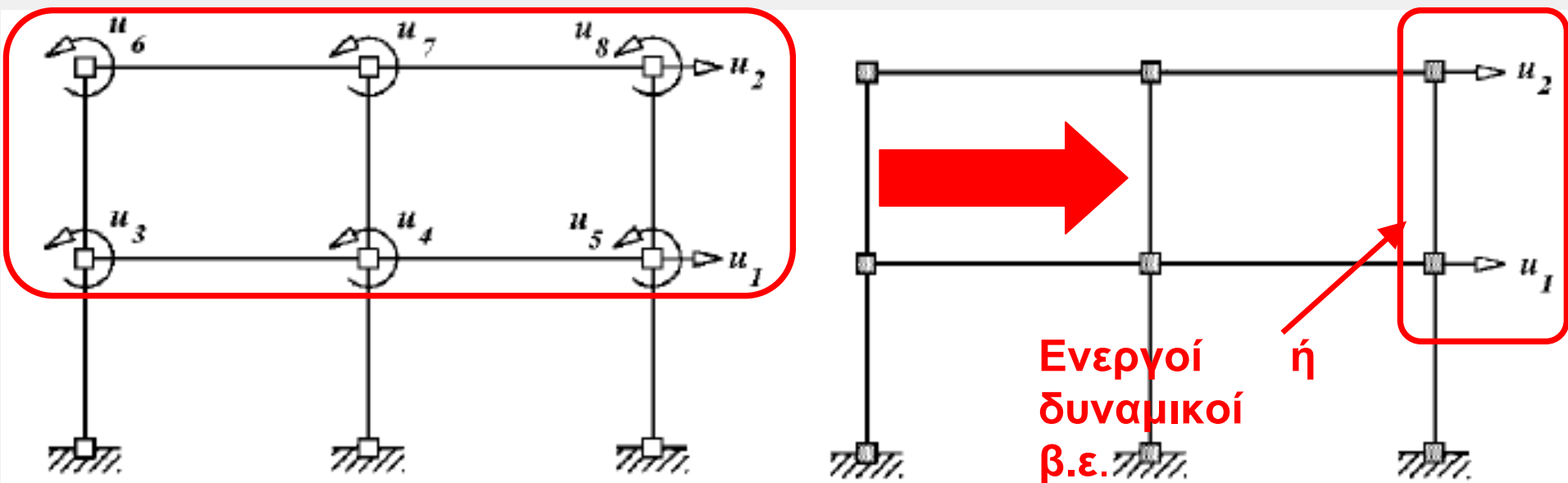
$$\mathbf{f}_I + \mathbf{f}_D + \mathbf{f}_S = \mathbf{p}(t) \Rightarrow \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}(t)$$

- Σύστημα N συνήθων διαφορικών εξισώσεων που ορίζουν το διάνυσμα των μετατοπίσεων $\mathbf{u}(t)$ λόγω των εξωτερικών φορτίων $\mathbf{p}(t)$, N είναι ο αριθμός των β.ε.
- Οι μη διαγώνιοι όροι στα μητρώα \mathbf{m} , \mathbf{c} , \mathbf{k} είναι γνωστοί ως *όροι σύζευξης*. Γενικά οι εξισώσεις περιέχουν σύζευξη μάζας, απόσβεσης και δυσκαμψίας. Η σύζευξη ωστόσο, σε ένα σύστημα εξαρτάται από την επιλογή των β.ε. που χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν την κίνηση

Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

3. Στατική συμπίκνωση (Static condensation)

- Η μέθοδος στατικής συμπίκνωσης ή στατικής απαλοιφής χρησιμοποιείται για να απαλειφθούν από τη δυναμική ανάλυση οι β.ε. στους οποίους αντιστοιχεί μηδενική μάζα (π.χ. στροφικοί β.ε. κόμβων πλαισίων με παραδοχή συγκεντρωμένων μαζών)



Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

3. Στατική συμπίκνωση (Static condensation)

- Το σύστημα των εξισώσεων κίνησης αμελούμενης της απόσβεσης γράφεται ως:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m}_{tt} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_t \\ \ddot{\mathbf{u}}_0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{tt} & \mathbf{k}_{t0} \\ \mathbf{k}_{0t} & \mathbf{k}_{00} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{u}_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_t(t) \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}$$

- Με \mathbf{u}_0 συμβολίζονται οι β.ε. που αντιστοιχούν σε μηδενική συνεισφορά μάζας. Διαχωρίζοντας τα συστήματα έχουμε:

$$\mathbf{m}_{tt} \ddot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{k}_{tt} \mathbf{u}_t + \mathbf{k}_{t0} \mathbf{u}_0 = \mathbf{p}_t(t)$$

$$\mathbf{k}_{0t} \mathbf{u}_t + \mathbf{k}_{00} \mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$$

Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

3. Στατική συμπίκνωση (Static condensation)

- Λόγω μη ύπαρξης αδρανειακών όρων που να σχετίζονται με τις μετατοπίσεις \mathbf{u}_0 , υπάρχει μια στατική σχέση μεταξύ των \mathbf{u}_0 και \mathbf{u}_t :

$$\mathbf{u}_0 = -\mathbf{k}_{00}^{-1}\mathbf{k}_{0t}\mathbf{u}_t$$

- Αντικαθιστώντας την έκφραση του \mathbf{u}_0 στην πρώτη εκ των δύο σχέσεων προκύπτει:

$$\mathbf{m}_{tt}\ddot{\mathbf{u}}_t + \hat{\mathbf{k}}_{tt}\mathbf{u}_t = \mathbf{p}_t(t)$$

- Όπου:

$$\hat{\mathbf{k}}_{tt} = \mathbf{k}_{tt} - \mathbf{k}_{0t}^T\mathbf{k}_{00}^{-1}\mathbf{k}_{0t}$$

Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

4.1. Κίνηση εδάφους σε επίπεδα πολυβάθμια συστήματα

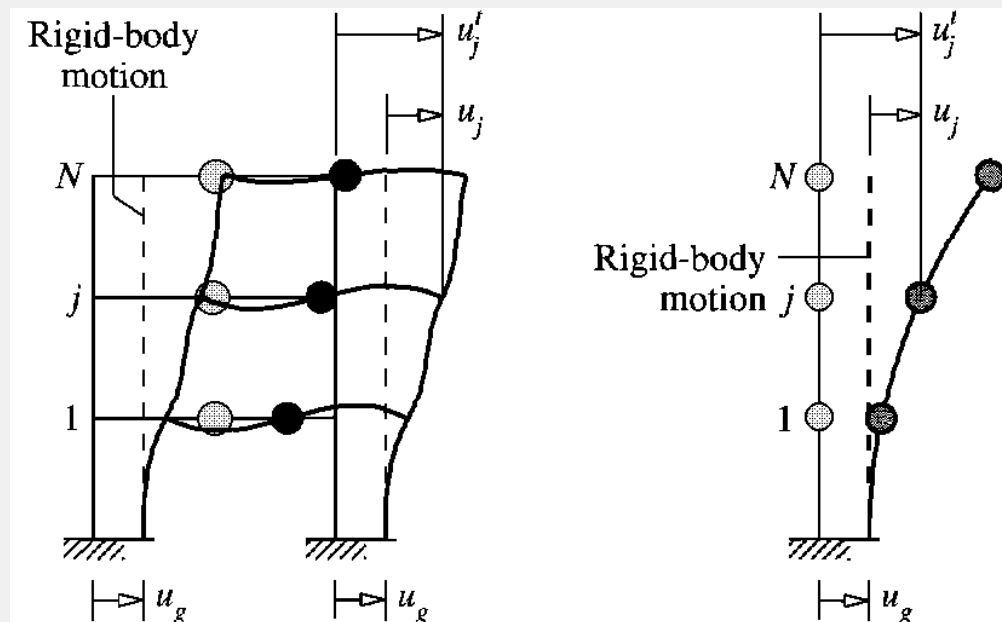
- Μια από τις πιο σημαντικές εφαρμογές είναι η δυναμική ανάλυση πλαισίων που υπόκεινται σε κίνηση της βάσης τους λόγω σεισμικής διέγερσης:

$$u_j^t(t) = u_j(t) + u_g(t)$$

$$\mathbf{u}_j^t(t) = \mathbf{u}_j(t) + u_g(t)\mathbf{1}$$

- Οι εξισώσεις κίνησης γράφονται για μηδενικό εξωτερικό φορτίο:

$$\mathbf{f}_I + \mathbf{f}_D + \mathbf{f}_S = \mathbf{0}$$



Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

4.1. Κίνηση εδάφους σε επίπεδα πολυβάθμια συστήματα

- Οι ελαστικές δυνάμεις και οι δυνάμεις απόσβεσης εξαρτώνται από τις σχετικές μετατοπίσεις που αναπτύσσονται στα μέλη του πλαισίου \mathbf{u} , ενώ οι αδρανειακές δυνάμεις συσχετίζονται με τις συνολικές μετατοπίσεις \mathbf{u}^t :

$$\mathbf{f}_s = \mathbf{k}\mathbf{u}, \quad \mathbf{f}_D = \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{f}_I = \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}^t$$

- Χρησιμοποιώντας τη σχέση μεταξύ των σχετικών μετατοπίσεων και των συνολικών μετατοπίσεων οι εξισώσεις ισορροπίας γράφονται ως εξής:

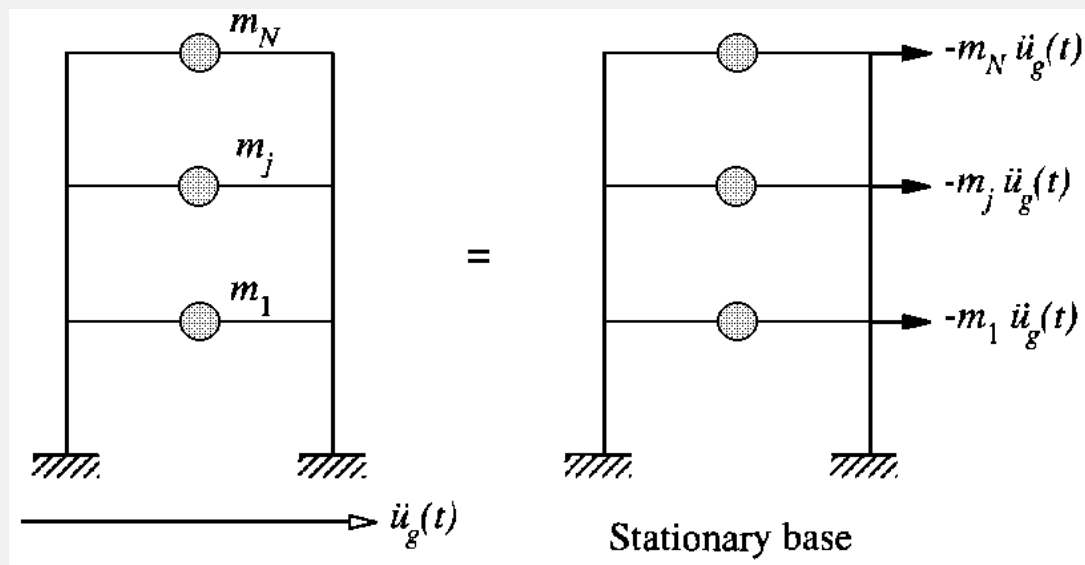
$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = -\mathbf{m}\mathbf{1}\ddot{u}_g(t)$$

Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

4.1. Κίνηση εδάφους σε επίπεδα πολυβάθμια συστήματα

- Συγκρίνοντας τις εξισώσεις κίνησης του συστήματος για την περίπτωση εξωτερικών φορτίων με τις αντίστοιχες για την περίπτωση κίνησης του εδάφους, παρατηρούμε ότι η ανάλυση ενός συστήματος που υπόκειται σε μετακίνηση της βάσης του είναι ισοδύναμη με την ανάλυση του ίδιου συστήματος με εξωτερική φόρτιση \mathbf{p}_{eff} , όπου:

$$\mathbf{p}_{eff} = -\mathbf{m}\mathbf{1}\ddot{u}_g(t)$$

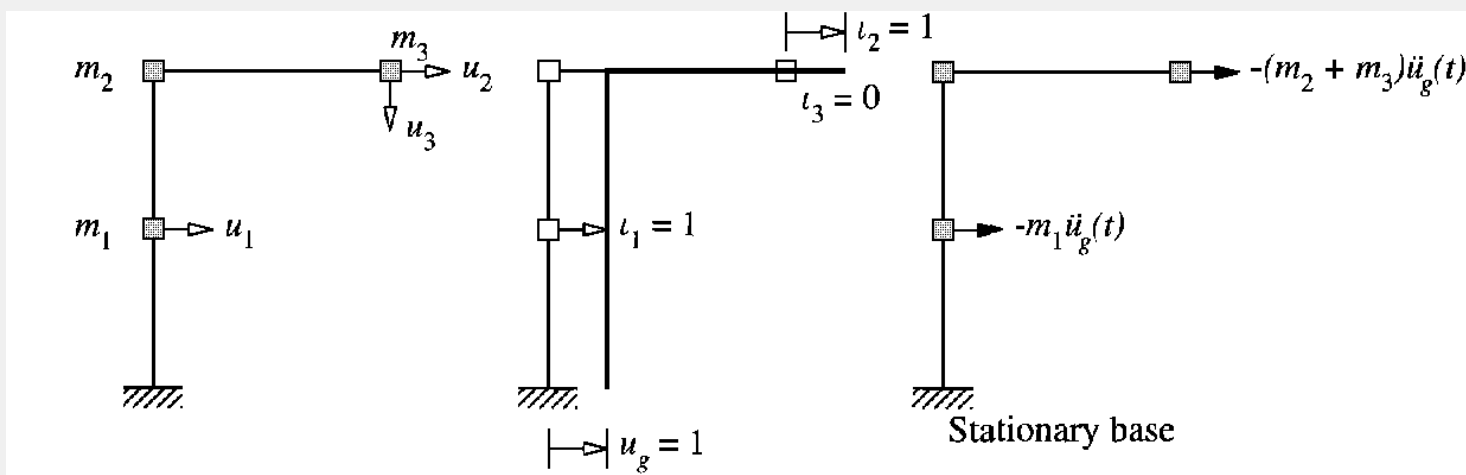


Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

4.1. Κίνηση εδάφους σε επίπεδα πολυβάθμια συστήματα

- Η προηγούμενη διαδικασία μπορεί να γενικευτεί και για περιπτώσεις, όπου η κίνηση του εδάφους δεν είναι ίδια για όλες τις στηρίξεις του φορέα, ή η διεύθυνση της κίνησης δεν συμπίπτει με τη διεύθυνση όλων των β.ε.:

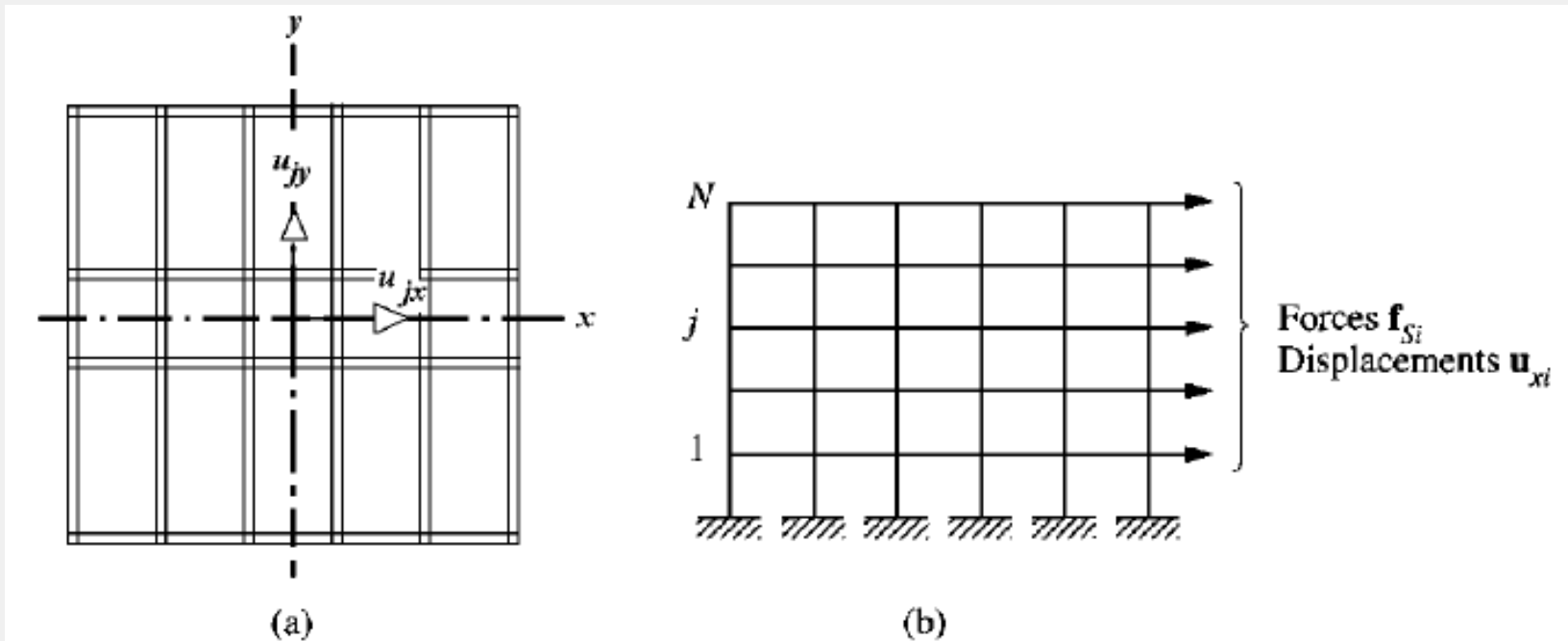
$$\mathbf{u}^t(t) = \mathbf{i} \mathbf{u}_g(t) + \mathbf{u}(t) \quad \mathbf{p}_{eff}(t) = -\mathbf{m} \mathbf{i} \ddot{\mathbf{u}}_g(t) = -\ddot{\mathbf{u}}_g(t) \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & m_2 + m_3 & \\ & & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = -\ddot{\mathbf{u}}_g(t) \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 + m_3 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

4.2. Κτίρια συμμετρικής κάτοψης: Μεταφορική κίνηση εδάφους

- N-ώροφα κτίρια με συμμετρική κατανομή μάζας και δυσκαμψίας μπορούν να αναλυθούν ανεξάρτητα στις δύο πλευρικές διευθύνσεις.



Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

4.2. Κτίρια συμμετρικής κάτοψης: Μεταφορική κίνηση εδάφους

- Κατασκευάζουμε το μητρώο δυσκαμψίας του i πλαισίου που είναι προσανατολισμένο p_x προς τη διεύθυνση x . Με στατική συμπύκνωση απαλείφονται οι κατακόρυφες μετακινήσεις και οι στροφές των κόμβων. Επομένως οι πλευρικές δυνάμεις του i πλαισίου είναι:

$$\mathbf{f}_{si} = \mathbf{k}_{xi} \mathbf{u}_{xi}$$

- Με θεώρηση απαραμόρφωτων στο επίπεδο τους διαφραγμάτων ισχύει:

$$\mathbf{u}_{xi} = \mathbf{u}_x, \quad \mathbf{u}_x^T = \left[u_{1x} \quad u_{2x} \quad \cdots \quad u_{jx} \quad \cdots \quad u_{Nx} \right]$$

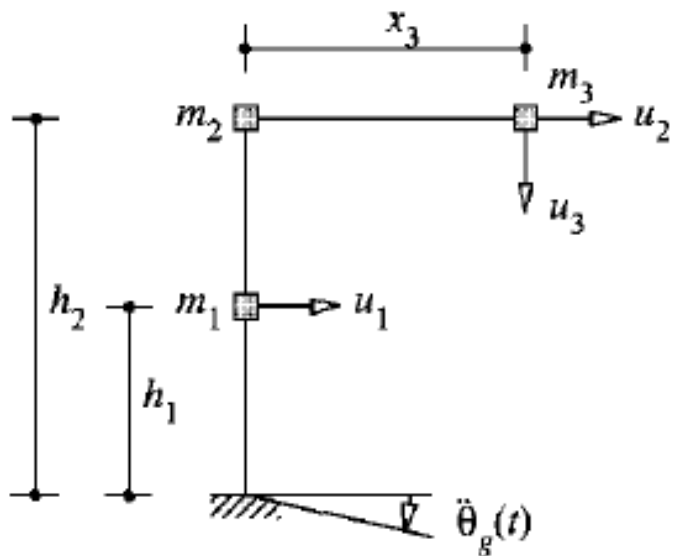
- Οι συνολικές πλευρικές δυνάμεις δίνονται ως:

$$\sum_i \mathbf{f}_{si} = \mathbf{f}_s = \mathbf{k}_s \mathbf{u}_x, \quad \mathbf{k}_x = \sum_i \mathbf{k}_{xi}$$

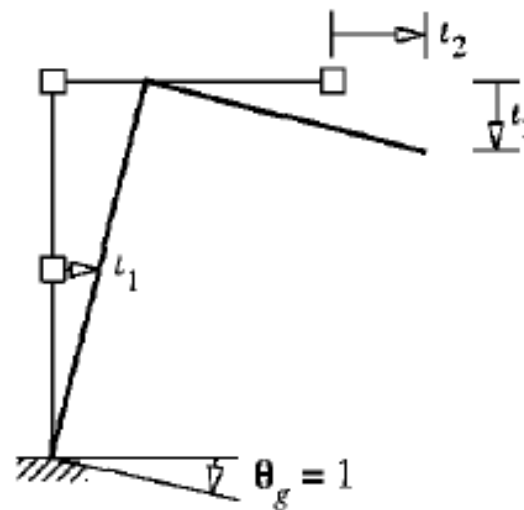
Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

4.3. Στροφική κίνηση εδάφους σε επίπεδα συστήματα

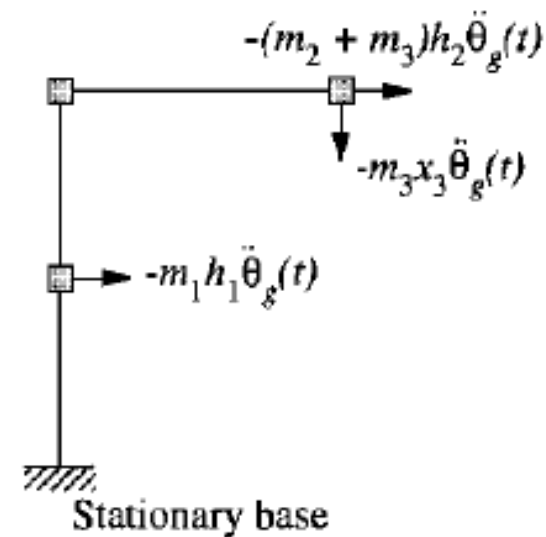
$$\mathbf{u}^t(t) = \mathbf{u}(t) + \mathbf{i}\vartheta_g(t), \quad \mathbf{i} = [h_1 \quad h_2 \quad x_3]$$



(a)



(b)



(c)

Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

4.3. Στροφική κίνηση εδάφους σε επίπεδα συστήματα

- Οι εξισώσεις ισορροπίας ισχύουν όπως έχουν διατυπωθεί παραπάνω, με τροποποίηση των δυνάμεων \mathbf{p}_{eff}

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = -\mathbf{m}\mathbf{i}\ddot{\vartheta}_g(t)$$

$$\mathbf{p}_{eff}(t) = -\mathbf{m}\mathbf{i}\ddot{\vartheta}_g(t) = -\ddot{\vartheta}_g(t) \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & m_2 + m_3 & \\ & & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = -\ddot{\vartheta}_g(t) \begin{Bmatrix} m_1 h_1 \\ (m_2 + m_3) h_2 \\ m_3 x_3 \end{Bmatrix}$$

Ελεύθερες Ταλαντώσεις Πολυβαθμίων Συστημάτων

Ελεύθερες Ταλαντώσεις Πολυβαθμίων Συστημάτων

1. Συστήματα χωρίς απόσβεση

- Το σύστημα των εξισώσεων ισορροπίας γράφεται ως:

$$m\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

- N συζευγμένες ομογενείς διαφορικές εξισώσεις που υπόκεινται στις αρχικές συνθήκες:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(0), \quad \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}(0)$$

- Η κίνηση κάθε μάζας δεν είναι πλέον μια απλή αρμονική κίνηση και η συχνότητα κίνησης δεν μπορεί να προσδιοριστεί.
- Απλή αρμονική κίνηση θα προκύψει εάν η ελεύθερη ταλάντωση εκκινήσει με μια κατάλληλη κατανομή μετατοπίσεων στους β.ε. (ιδιομορφή ή κανονική μορφή ταλάντωσης).

Ελεύθερες Ταλαντώσεις Πολυβαθμίων Συστημάτων

1. Συστήματα χωρίς απόσβεση

- Η *Ιδιοπερίοδος Ταλάντωσης* T_n ενός πολυβάθμιου συστήματος είναι ο χρόνος στον οποίο το σύστημα εκτελεί έναν πλήρη κύκλο απλής αρμονικής κίνησης κατά την n ιδιομορφή του συστήματος. Η αντίστοιχη *κυκλική ιδιοσυχνότητα* συμβολίζεται με ω_n και η *ιδιοσυχνότητα* με f_n

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}, \quad f_n = \frac{1}{T_n}$$

- Η μικρότερη ιδιοσυχνότητα συμβολίζεται με ω_1 και ονομάζεται *θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα*.
- Το διάνυσμα $\varphi_n = \{\varphi_{1n} \dots \varphi_{Nn}\}^T$ είναι το διάνυσμα της n ιδιομορφής.

Ελεύθερες Ταλαντώσεις Πολυβαθμίων Συστημάτων

2. Ιδιοσυχνότητες και ιδιομορφές ταλάντωσης

- Οι ιδιοσυχνότητες και ιδιομορφές ενός συστήματος προκύπτουν από πρόβλημα ιδιοτιμών. Γράφουμε τη λύση ως εξής:

$$\mathbf{u}(t) = q_n(t) \boldsymbol{\phi}_n$$

$$q_n = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)$$

- Όπου A_n και B_n είναι σταθερές ολοκλήρωσης που ορίζονται από τις αρχικές συνθήκες

$$\mathbf{u}(t) = \left[A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) \right] \boldsymbol{\phi}_n$$

- Αντικαθιστώντας τις μετατοπίσεις στην εξίσωση ισορροπίας, έχουμε:

$$\left[-\omega_n^2 \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_n + \mathbf{k} \boldsymbol{\phi}_n \right] q_n(t) = \mathbf{0} \Rightarrow \left[\mathbf{k} - \omega_n^2 \mathbf{m} \right] \boldsymbol{\phi}_n = \mathbf{0}$$

Ελεύθερες Ταλαντώσεις Πολυβαθμίων Συστημάτων

2. Ιδιοσυχνότητες και ιδιομορφές ταλάντωσης

- Έχουμε ένα ομογενές σύστημα N γραμμικών εξισώσεων. Για να έχει μη τετριμμένη λύση, πρέπει να ισχύει:

$$\det [\mathbf{k} - \omega_n^2 \mathbf{m}] = 0$$

- Οι ρίζες του αναπτύγματος της ορίζουσας δίδουν τις ιδιοτιμές ή ιδιοσυχνότητες ω_n (οι οποίες υπάρχουν και είναι θετικές αφού τα \mathbf{m} , \mathbf{k} είναι συμμετρικά και θετικώς ορισμένα)
- Για κάθε ιδιοσυχνότητα επιλύουμε το σύστημα της προηγούμενης διαφάνειας και προκύπτει το διάνυσμα της n ιδιομορφής, Έτσι έχουμε συνολικά

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1N} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{N1} & \varphi_{N2} & \cdots & \varphi_{NN} \end{bmatrix}, \quad \Omega^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_N^2 \end{bmatrix}$$

Ελεύθερες Ταλαντώσεις Πολυβαθμίων Συστημάτων

2. Ιδιοσυχνότητες και ιδιομορφές ταλάντωσης

- Το μητρώο Φ ονομάζεται *μητρώο ιδιομορφών* και το μητρώο Ω^2 ονομάζεται *φασματικό μητρώο*. Ισχύει:

$$\mathbf{k}\phi_n = \mathbf{m}\phi_n\omega_n^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k}\Phi = \mathbf{m}\Phi\Omega^2$$

Ελεύθερες Ταλαντώσεις Πολυβαθμίων Συστημάτων

3. Ορθογωνικότητα των ιδιομορφών

- Οι ιδιομορφές που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοσυχνότητες ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες ορθογωνικότητας:

$$\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_r = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\phi}_r^T \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_n = \mathbf{0}$$

Απόδειξη:

$$\boldsymbol{\phi}_r^T \mathbf{k} \boldsymbol{\phi}_n = \omega_n^2 \boldsymbol{\phi}_r^T \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_n, \text{ ομοίως}$$

$$\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{k} \boldsymbol{\phi}_r = \omega_r^2 \boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_r. \text{ Ο ανάστροφος της πρώτης εξίσωσης προκύπτει ως}$$

$$\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{k} \boldsymbol{\phi}_r = \omega_n^2 \boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_r. \text{ Αφαιρούμε τις δύο εξισώσεις:}$$

$$\left(\omega_n^2 - \omega_r^2 \right) \boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_r = \mathbf{0}$$

- Για την περίπτωση που δεν έχουμε πολλαπλές ιδιοτιμές, για να επαληθεύεται η παραπάνω σχέση προκύπτει η σχέση που ορίζει τη συνθήκη ορθογωνικότητας

Ελεύθερες Ταλαντώσεις Πολυβαθμίων Συστημάτων

3. Ορθογωνικότητα των ιδιομορφών

- Συνέπεια των συνθηκών ορθογωνικότητας είναι ότι τα παρακάτω τετραγωνικά μητρώα είναι διαγώνια:

$$\mathbf{K} \equiv \mathbf{\Phi}^T \mathbf{k} \mathbf{\Phi}, \quad \mathbf{M} \equiv \mathbf{\Phi}^T \mathbf{m} \mathbf{\Phi}$$

- Τα διαγώνια στοιχεία είναι:

$$K_n = \mathbf{\phi}_n^T \mathbf{k} \mathbf{\phi}_n, \quad M_n = \mathbf{\phi}_n^T \mathbf{m} \mathbf{\phi}_n$$

- Ισχύει:

$$K_n = \mathbf{\phi}_n^T \left(\omega_n^2 \mathbf{m} \mathbf{\phi}_n \right) = \omega_n^2 \left(\mathbf{\phi}_n^T \mathbf{m} \mathbf{\phi}_n \right) \Rightarrow$$

$$K_n = \omega_n^2 M_n$$

Ελεύθερες Ταλαντώσεις Πολυβαθμίων Συστημάτων

3. Ερμηνεία της Ορθογωνικότητας των ιδιομορφών

- Συνέπεια: Το έργο που παράγεται από τις αδρανειακές δυνάμεις της n ιδιομορφής για τις μετατοπίσεις της r ιδιομορφής είναι μηδέν:

$$\mathbf{u}_n(t) = q_n(t)\boldsymbol{\phi}_n$$
$$(\mathbf{f}_I)_n = -\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}_n(t) = -\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n\ddot{q}_n(t)$$

Το έργο που παράγεται από τις δυνάμεις αυτές για τις μετατοπίσεις \mathbf{u}_r δίνεται ως:

$$(\mathbf{f}_I)_n^T \mathbf{u}_r = -\left(\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_r\right) \ddot{q}_n(t) q_r(t) = 0$$

- Το ίδιο ισχύει και για τις ελαστικές δυνάμεις

Ελεύθερες Ταλαντώσεις Πολυβαθμίων Συστημάτων

4. Κανονικοποίηση των ιδιομορφών

- Κανονικοποίηση ιδιομορφών: Εφαρμογή συντελεστών κλίμακας στις ιδιομορφές ώστε τα στοιχεία τους που συνδέονται με τους διάφορους β.ε. να ομοιομορφοποιηθούν
- Κανονικοποίηση ως προς το μέγιστο:

$$\Phi_n = \frac{1}{\max \tilde{\varphi}_{kn}} \begin{Bmatrix} 1 \\ \tilde{\varphi}_{in} \\ \vdots \\ \tilde{\varphi}_{Nn} \end{Bmatrix}$$

Ελεύθερες Ταλαντώσεις Πολυβαθμίων Συστημάτων

4. Κανονικοποίηση των ιδιομορφών

- Κανονικοποίηση ως προς το μητρώο μάζας (συνήθης σε προγράμματα υπολογιστών):

$$\boldsymbol{\phi}_n = \mu_n \tilde{\boldsymbol{\phi}}_n, \mu_n \text{ τέτοιο ώστε } \boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_n = 1$$

- Αντικαθιστώντας το διάνυσμα των ιδιομορφών στην τελευταία σχέση προκύπτει ο συντελεστής μ_n :

$$\mu_n = \frac{\tilde{\boldsymbol{\phi}}_n}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\phi}}_n^T \mathbf{m} \tilde{\boldsymbol{\phi}}_n}}$$

Ελεύθερες Ταλαντώσεις Πολυβαθμίων Συστημάτων

5. Ιδιομορφική ανάπτυξη των μετατοπίσεων

- Κάθε σύνολο N ανεξάρτητων διανυσμάτων μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως βάση για να εκφραστεί ένα οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα τάξης N . Οι ιδιομορφές χρησιμοποιούνται ως τέτοια βάση

$$\mathbf{u} = \sum_{r=1}^N \varphi_r q_r = \mathbf{\Phi} \mathbf{q}$$

- Τα q_r ονομάζονται *ιδιομορφικές συντεταγμένες*. Όταν είναι γνωστές οι φ_r , τότε για δεδομένο \mathbf{u} είναι δυνατό να προσδιοριστούν οι ιδιομορφικές συντεταγμένες.

$$\mathbf{\Phi}_n^T \mathbf{m} \mathbf{u} = \sum_{r=1}^N \mathbf{\Phi}_n^T \mathbf{m} \mathbf{\Phi}_r q_r \Rightarrow \mathbf{\Phi}_n^T \mathbf{m} \mathbf{u} = \mathbf{\Phi}_n^T \mathbf{m} \mathbf{\Phi}_n q_n \Rightarrow$$

$$q_n = \frac{\mathbf{\Phi}_n^T \mathbf{m} \mathbf{u}}{\mathbf{\Phi}_n^T \mathbf{m} \mathbf{\Phi}_n}$$

Ελεύθερες Ταλαντώσεις Πολυβαθμίων Συστημάτων

6. Επίλυση εξισώσεων ελεύθερης ταλάντωσης (χωρίς απόσβεση)

- Για να βρούμε τη λύση του αρχικού προβλήματος της κατασκευής, λύνουμε το πρόβλημα ιδιοτιμών και η γενική λύση προκύπτει ως

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^N \varphi_n (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t)$$

- A_n, B_n είναι σταθερές ολοκλήρωσης. Για να υπολογιστούν, έχουμε:

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \sum_{n=1}^N \varphi_n \omega_n (-A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t)$$

- Για $t=0$ έχουμε:

$$\mathbf{u}(0) = \sum_{n=1}^N \varphi_n A_n, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \sum_{n=1}^N \varphi_n \omega_n B_n$$

- Με γνωστές τις αρχικές συνθήκες μπορούν να υπολογιστούν. Μπορούμε να γράψουμε:

Ελεύθερες Ταλαντώσεις Πολυβαθμίων Συστημάτων

6. Επίλυση εξισώσεων ελεύθερης ταλάντωσης (χωρίς απόσβεση)

$$\mathbf{u}(0) = \sum_{n=1}^N \varphi_n q_n(0), \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \sum_{n=1}^N \varphi_n \omega_n \dot{q}_n(0)$$

- Από τα προηγούμενα ισχύει:

$$q_n(0) = \frac{\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{m} \mathbf{u}(0)}{\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_n}, \quad \dot{q}_n(0) = \frac{\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{u}}(0)}{\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_n}$$

- Συνεπώς το τελικό διάνυσμα της λύσης μπορεί να γραφεί ως:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^N \boldsymbol{\phi}_n \left(q_n(0) \cos \omega_n t + \frac{\dot{q}_n(0)}{\omega_n} \sin \omega_n t \right)$$

Ελεύθερες Ταλαντώσεις Πολυβαθμίων Συστημάτων

7. Ελεύθερη ταλάντωση συστημάτων με απόσβεση

- Το σύστημα εξισώσεων με απόσβεση προκύπτει ως:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{m}\Phi\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}\Phi\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{k}\Phi\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

- Προπολλαπλασιάζουμε με Φ^T και προκύπτει:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

- Τα \mathbf{M} , \mathbf{K} όπως έχει αναλυθεί είναι διαγώνια λόγω των συνθηκών ορθογωνικότητας. Το \mathbf{C} εν γένει δεν είναι διαγώνιο. Για τις περιπτώσεις, όπου είναι διαγώνιο, λέμε ότι το σύστημα έχει κλασική απόσβεση και μπορεί να λυθεί με την κλασική ιδιομορφική ανάλυση.

Ελεύθερες Ταλαντώσεις Πολυβαθμίων Συστημάτων

7.1. Ελεύθερη ταλάντωση συστημάτων με κλασική απόσβεση

- Στην περίπτωση όπου έχουμε κλασική απόσβεση, το σύστημα των εξισώσεων αποσυμπλέκεται σε N διαφορικές εξισώσεις ως προς τις ιδιομορφικές συντεταγμένες:

$$M_n \ddot{q}_n + C_n \dot{q}_n + K_n q_n = 0$$

- Τα K_n και M_n έχουν οριστεί. Ανάλογα το C_n είναι:

$$C_n = \Phi_n^T \mathbf{c} \Phi_n$$

- Επομένως ο λόγος απόσβεσης, σε αναλογία με το μονοβάθμιο σύστημα, μπορεί να οριστεί ως:

$$\zeta_n = \frac{C_n}{2M_n \omega_n}$$

Ελεύθερες Ταλαντώσεις Πολυβαθμίων Συστημάτων

8. Επίλυση των εξισώσεων ελεύθερης ταλάντωσης με κλασική απόσβεση

- Διαιρούμε την n εξίσωση του αποσυζευγμένου συστήματος με M_n :

$$\ddot{q}_n + 2\zeta_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = 0$$

- Η εξίσωση αυτή είναι ίδια με αυτή του μονοβαθμίου συστήματος με απόσβεση, ως προς τη n ιδιομορφική συντεταγμένη. Η λύση του προκύπτει ως:

$$q_n(t) = e^{-\zeta_n \omega_n t} \left[q_n(0) \cos \omega_{nD} t + \frac{\dot{q}_n(0) + \zeta_n \omega_n q_n(0)}{\omega_{nD}} \sin \omega_{nD} t \right]$$

- Όπου η η n ιδιοσυχνότητα με απόσβεση είναι:

$$\omega_{nD} = \omega_n \sqrt{1 - \zeta_n^2}$$

Ελεύθερες Ταλαντώσεις Πολυβαθμίων Συστημάτων

8. Επίλυση των εξισώσεων ελεύθερης ταλάντωσης με κλασική απόσβεση

- Διαιρούμε την n εξίσωση του αποσυζευγμένου συστήματος με M_n :

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^N \boldsymbol{\phi}_n e^{-\zeta_n \omega_n t} \left[q_n(0) \cos \omega_{nD} t + \frac{\dot{q}_n(0) + \zeta_n \omega_n q_n(0)}{\omega_{nD}} \sin \omega_{nD} t \right]$$

- Η παραπάνω εξίσωση δίνει τη λύση του προβλήματος ελεύθερων ταλαντώσεων για ένα πολυβάθμιο σύστημα με κλασική απόσβεση, λόγω των αρχικών συνθηκών $\mathbf{u}(0)$ και $\dot{\mathbf{u}}(0)$.
- Η επιρροή της απόσβεσης στις ιδιομορφές και τις ιδιοσυχνότητες της ταλάντωσης μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα για λόγους απόσβεσης μικρότερους του 20%, ένα εύρος που περιλαμβάνει τις περισσότερες κατασκευές στην πράξη.

Ελεύθερες Ταλαντώσεις Πολυβαθμίων Συστημάτων

9. Μέθοδοι επίλυσης για το πρόβλημα ιδιοτιμών

- Η εύρεση των ιδιομορφών και των ιδιοσυχνοτήτων περιλαμβάνει την επίλυση του προβλήματος ιδιοτιμών:

$$\mathbf{k}\boldsymbol{\phi} = \lambda \mathbf{m}\boldsymbol{\phi}$$

- Όπου $\lambda \equiv \omega_n^2$ είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης:

$$p(\lambda) = \det[\mathbf{k} - \lambda \mathbf{m}] = 0$$

- Για $N > 4$ εφαρμόζεται αριθμητική εύρεση των λ και $\boldsymbol{\phi}$. Υπάρχουν τρεις κατηγορίες μεθόδων:
 - 1) Οι διανυσματικές επαναληπτικές μέθοδοι
 - 2) Οι μέθοδοι μετασχηματισμού
 - 3) Οι πολυωνυμικές επαναληπτικές τεχνικές

Ελεύθερες Ταλαντώσεις Πολυβαθμίων Συστημάτων

9. Μέθοδοι επίλυσης για το πρόβλημα ιδιοτιμών

- Όλες οι μέθοδοι έχουν επαναληπτικό χαρακτήρα
- Για να βρεθεί ένα ιδιοζεύγος, μόνο εκ των δύο μερών υπολογίζεται με επαναλήψεις. Αν πχ υπολογιστούν οι ιδιοτιμές, τα ιδιοδιανύσματα υπολογίζονται επιλύοντας το σύστημα

$$(\mathbf{k} - \lambda_n \mathbf{m}) \boldsymbol{\phi}_n = \mathbf{0}$$

- Αν υπολογιστούν με επαναληπτική διαδικασία τα ιδιοδιανύσματα, οι ιδιοτιμές προκύπτουν με χρήση του πηλίκου Rayleigh:
- Το τι συμφέρει να υπολογιστεί και συνεπώς η επιλογή μεθόδου επίλυσης εξαρτάται από τις ιδιότητες των μητρώων του προβλήματος
- Συνήθως σε προβλήματα δομοστατικής φύσεως χρησιμοποιούνται μέθοδοι αντίστροφης διανυσματικής επαναλήψεως

Ελεύθερες Ταλαντώσεις Πολυβαθμίων Συστημάτων

10. Το πηλίκο του Rayleigh

- Προκύπτει με προπολλαπλασιασμό με $\boldsymbol{\phi}^T$ της παρακάτω εξίσωσης:

$$\mathbf{k}\boldsymbol{\phi} = \lambda\mathbf{m}\boldsymbol{\phi} \Rightarrow \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{k}\boldsymbol{\phi} = \lambda\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{m}\boldsymbol{\phi}$$

- Ο συντελεστής του λ_n είναι πάντα μη μηδενικός λόγω του ότι το \mathbf{m} είναι θετικώς ορισμένο. Επομένως:

$$\lambda = \frac{\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{k}\boldsymbol{\phi}}{\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{m}\boldsymbol{\phi}}$$

- 1) Όταν το $\boldsymbol{\phi}$ είναι ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{\phi}_n$, τότε το πηλίκο του Rayleigh είναι ίσο με την αντίστοιχη ιδιοτιμή.
- 2) Όταν το $\boldsymbol{\phi}$ είναι προσέγγιση ιδιοδιανύσματος $\boldsymbol{\phi}_n$ με σφάλμα πρώτης τάξης, τότε το πηλίκο του Rayleigh είναι μια προσέγγιση της αντίστοιχης ιδιοτιμής με σφάλμα δεύτερης τάξης. Είναι δηλαδή *στάσιμο* στις γειτονιές των πραγματικών ιδιοδιανυσμάτων
- 3) Το πηλίκο του Rayleigh είναι φραγμένο μεταξύ ω_1^2 και ω_N^2 , τη μικρότερη και μεγαλύτερη ιδιοτιμή.

Μέθοδος Διανυσματικής Επανάληψης Stodola

Μέθοδος Διανυσματικής Επανάληψης Stodola

Θεωρούμε διακριτό δυναμικό σύστημα (η) β.ε. με $[\mathbf{M}]$ και $[\mathbf{K}]$ σε ελεύθερη ταλάντωση και ζητούμε τον προσδιορισμό των ιδιομορφών του $\{\phi\}_i$ και των αντίστοιχων ιδιοσυχνοτήτων ω_i ($i=1,2,\dots,\eta$) με τη μέθοδο της διανυσματικής επανάληψης.

Η ελεύθερη κίνηση του συστήματος έχει τη μορφή:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{x}\} + [\mathbf{k}]\{x\} = \{0\} \quad (1)$$

Κατ' αναλογία προς τη συμπεριφορά μονοβαθμίων συστημάτων, υποθέτουμε ότι η λύση της εξίσωσης είναι της μορφής:

$$\{x\} = \{\phi\} \sin(\omega t + \theta) \quad (2)$$



Διάνυσμα ιδιομορφής που δεν μεταβάλλεται με τον χρόνο

Μέθοδος Διανυσματικής Επανάληψης Stodola

Αντικαθιστώντας την (2) στην εξίσωση κίνησης (1) προκύπτει:

$$[\mathbf{k}]\{\phi\} = \omega^2 [\mathbf{M}]\{\phi\} \quad (3)$$

Η εφαρμογή της μεθόδου της διανυσματικής επανάληψης απαιτεί η εξίσωση (3) να έλθει στη μορφή του κλασσικού προβλήματος ιδιοτιμών

$$[D]\{\phi\} = \lambda \{\phi\} \quad (4)$$

Πράγματι, πολλαπλασιάζοντας την (3) με $[\mathbf{K}]^{-1}$ από αριστερά έχουμε

$$[\mathbf{k}]^{-1} [\mathbf{M}]\{\phi\} = \left(1 / \omega^2\right) \{\phi\} \quad (5)$$

Η οποία είναι της μορφής (4) με $[D] = [\mathbf{k}]^{-1} [\mathbf{M}]$ και $\lambda = 1 / \omega^2$

Μέθοδος Διανυσματικής Επανάληψης Stodola

Πολλαπλασιάζοντας την (3) με $[\mathbf{M}]^{-1}$ από αριστερά λαμβάνουμε

$$[\mathbf{M}]^{-1} [\mathbf{k}] \{\phi\} = \omega^2 \{\phi\} \quad (6)$$

Η οποία είναι της μορφής (4) με $[D] = [\mathbf{M}]^{-1} [\mathbf{k}]$ και $\lambda = \omega^2$

Η μέθοδος διανυσματικής επανάληψης για $[D] = [\mathbf{M}]^{-1} [\mathbf{k}]$ ονομάζεται **ευθεία**
ενώ για $[D] = [\mathbf{k}]^{-1} [\mathbf{M}]$ ονομάζεται **αντίστροφη**.

Είναι προφανές ότι, η αντιστροφή του μητρώου $[\mathbf{M}]$ είναι πολύ ευκολότερη αυτής του μητρώου $[\mathbf{k}]$ επειδή συνήθως το μητρώο $[\mathbf{M}]$ είναι διαγώνιο μητρώο.

Μέθοδος Διανυσματικής Επανάληψης Stodola

Η διαδικασία της μεθόδου διανυσματικής επανάληψης, όπως εφαρμόζεται στην εξίσωση (4), έχει ως εξής:

- 1) Υποθέτουμε ένα διάνυσμα $\{\phi\}_i$ π.χ. της μορφής $\{\phi\}^{(1)} = \{1, 1, \dots, 1\}$ και υπολογίζουμε το διάνυσμα $[D] \{\phi\}^{(1)} = \{\phi\}^{(2)}$, το οποίο κανονικοποιούμε διαιρώντας όλα τα στοιχεία του με την τιμή του πρώτου στοιχείου, οπότε έχουμε:

$$[D]\{\phi\}^{(1)} = \{\phi\}^{(2)} = \lambda_1 \{\bar{\phi}\}^{(2)} \quad (7)$$

όπου $\{\phi\}^{(2)} = \{\lambda_1, \beta, \dots, \varepsilon\}^T$ και $\{\bar{\phi}\}^{(2)} = \{1, \beta / \lambda_1, \dots, \varepsilon / \lambda_1\}^T$
και λ_1 είναι η πρώτη προσέγγιση του λ και $\{\phi\}^{(2)}$ η πρώτη προσέγγιση του $\{\phi\}$ της εξίσωσης (4)

- 2) Υποθέτουμε ένα διάνυσμα $[D] \{\phi\}^{(2)} = \{\phi\}^{(3)}$, το οποίο κανονικοποιούμε όπως προηγουμένως, οπότε

$$[D]\{\phi\}^{(2)} = \{\phi\}^{(3)} = \lambda_2 \{\bar{\phi}\}^{(3)} \quad (8)$$

και λ_2 είναι η δεύτερη προσέγγιση του λ και $\{\phi\}^{(3)}$ η δεύτερη προσέγγιση του $\{\phi\}$

Μέθοδος Διανυσματικής Επανάληψης Stodola

- 3) Συνεχίζουμε την παραπάνω διαδικασία μέχρις ότου επιτύχουμε σύγκλιση κατά τον κύκλο κ των επαναλήψεων, δηλαδή βρούμε τιμές λ_κ και $\{\phi\}^{(\kappa+1)}$ που είναι όσο κοντά επιθυμούμε με τις $\lambda_{\kappa-1}$ και $\{\phi\}^{(\kappa)}$. Αποδεικνύεται ότι υπάρχει σύγκλιση της διαδικασίας αυτής στη μέγιστη ιδιοτιμή λ . Έτσι, όταν $[D] = [\mathbf{k}]^{-1} [\mathbf{M}]$ η μέθοδος συγκλίνει στην ελάχιστη ιδιοσυχνότητα ω_1 ($\lambda = 1/\omega^2$) ενώ όταν $[D] = [\mathbf{M}]^{-1} [\mathbf{k}]$ η μέθοδος συγκλίνει στη μέγιστη ιδιοσυχνότητα ω_n ($\lambda = \omega^2$)

Όταν θέλουμε να γίνει σύγκλιση της μεθόδου με $[D] = [\mathbf{k}]^{-1} [\mathbf{M}]$ στη δεύτερη ιδιομορφή και ιδιοσυχνότητα θα πρέπει να σαρώσουμε το μητρώο $[D]$ από επιρροές της πρώτης ιδιομορφής που έχουμε ήδη υπολογίσει. Αποδεικνύεται ότι αυτό επιτυγχάνεται με τη μετατροπή του $[D]$ σε $[D]_2$ τέτοιο ώστε

$$[D]_2 = [D][S]_1 \quad (9)$$

Όπου το μητρώο σάρωσης $[S]_1$ που περιλαμβάνει την επιρροή της πρώτης ιδιομορφής υπολογίζεται ως

$$[S]_1 = \begin{bmatrix} [I] - \frac{\{\phi\}_1 \{\phi\}_1^T [M]}{\{\phi\}_1^T [M] \{\phi\}_1} \end{bmatrix} \quad (10)$$