



Μέρος I: Μονοβάθμια Συστήματα

Διδάσκων: Ε.Ι. Σαπουντζάκης

Δυναμική των Κατασκευών

Περιεχόμενα

1. Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης
2. Ελεύθερες Ταλαντώσεις Μονοβαθμίων Συστημάτων
3. Απόκριση σε Αρμονικές και Περιοδικές Διεγέρσεις
4. Απόκριση σε Αυθαίρετες, Βαθμιδωτές και Παλμικές Διεγέρσεις
5. Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης
6. Σεισμική Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων
7. Γενικευμένα Μονοβάθμια Συστήματα

Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

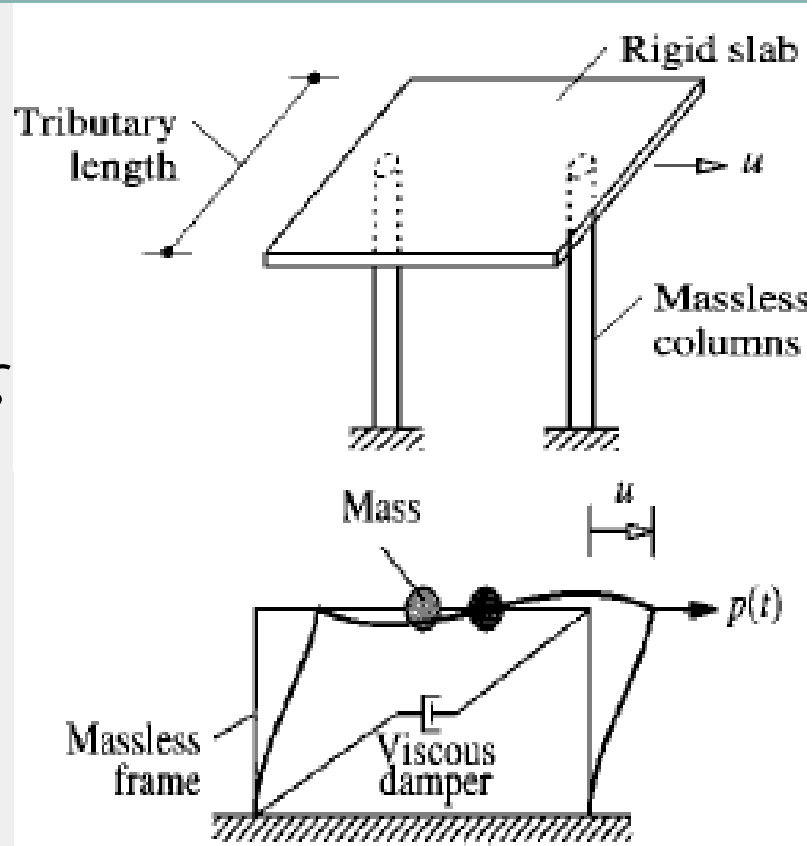
Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

1. Απλές Κατασκευές

- i. Μονώροφα πλαίσια
- ii. Υπερυψωμένη δεξαμενή ύδατος
- iii. Εξιδανικευμένη κατασκευή πέργκολας

2. Μονοβάθμιο Σύστημα

- i. Στοιχείο Μάζας
- ii. Στοιχείο Δυσκαμψίας
- iii. Στοιχείο Απόσβεσης



Ο αριθμός των **ανεξάρτητων** μετατοπίσεων που απαιτείται για να καθοριστούν οι μετατοπισμένες θέσεις όλων των μαζών σε σχέση με την αρχική τους θέση καλείται αριθμός των **βαθμών ελευθερίας** (DOFs ή β.ε.)

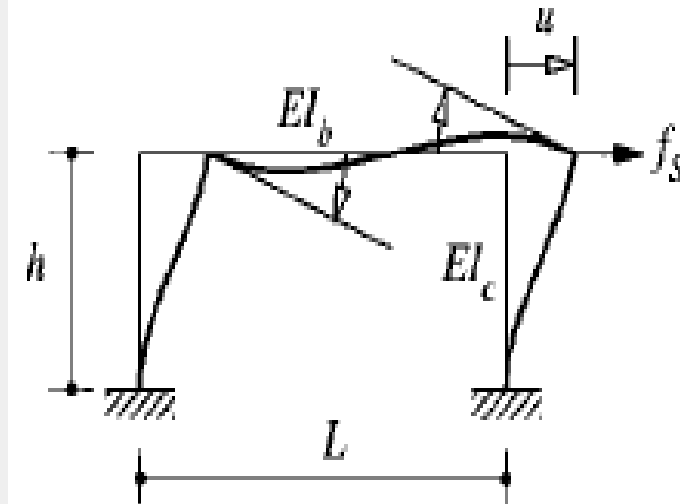
Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

3. Σχέση Δύναμης – Μετατόπισης

ι. Γραμμικώς ελαστικά συστήματα: $f_s = ku$

$$\alpha. EI_b = \infty \quad k = \sum \frac{12EI_c}{h^3} = 24 \frac{EI_c}{h^3}$$

$$\beta. EI_b = 0 \quad k = \sum \frac{3EI_c}{h^3} = 6 \frac{EI_c}{h^3}$$



Για ρεαλιστική τιμή της δυσκαμψίας της δοκού, η πλευρική δυσκαμψία του πλαισίου υπολογίζεται με γνωστές διαδικασίες Στατικής Ανάλυσης. «Μητρώο δυσκαμψίας πλαισίου με 3 β.ε. (u, φ_1, φ_2) και στατική συμπύκνωση των στρωφικών β.ε.»

ii. Ανελαστικά συστήματα: $f_s = f_s(u, \dot{u})$

Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

4. Δυναμική Απόσβεση

ι. Ενεργειακή απώλεια από:

α. Θέρμανση λόγω τριβής

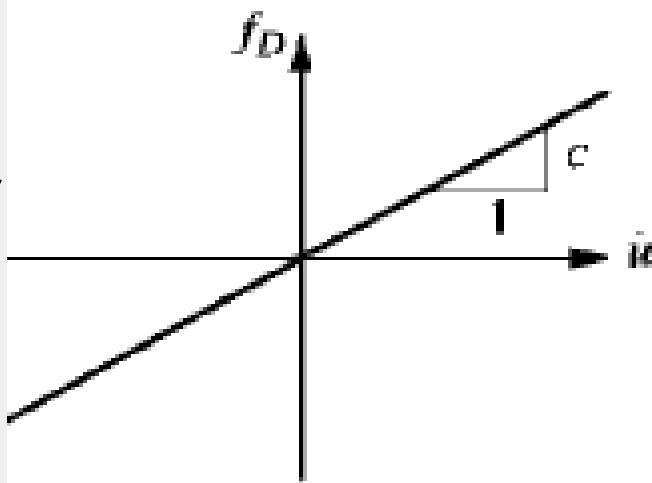
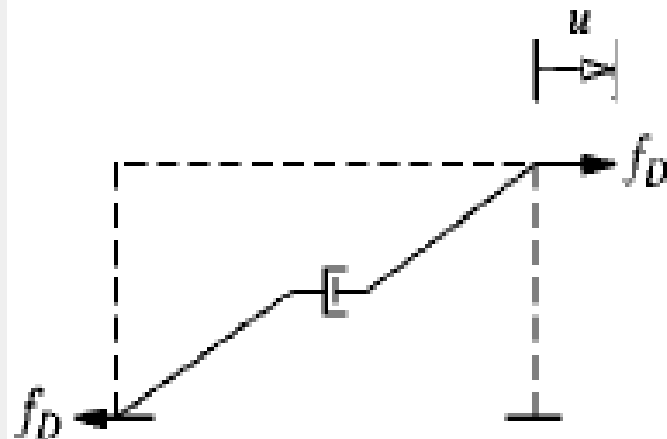
β. Τριβή στις μεταλλικές συνδέσεις

γ. Άνοιγμα - κλείσιμο μικρορωγμών στο σκυρόδεμα

δ. Τριβή μεταξύ δομικού σκελετού και μη δομικών στοιχείων όπως οι τοίχοι πλήρωσης

Γραμμικός ιξώδης αποσβεστήρας:

$$f_D = c\dot{u}$$



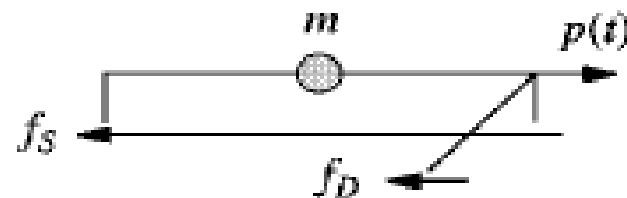
Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

5. Εξίσωση της Κίνησης

- i. Εξωτερική δύναμη μεταβάλλεται με το χρόνο (t): $p = p(t)$
- ii. Ελαστική (ανελαστική) δύναμη αντίστασης: f_s
- iii. Δύναμη απόσβεσης: f_D
- iv. Μετατόπιση της μάζας $u = u(t)$
- v. Ταχύτητα της μάζας $\dot{u} = \dot{u}(t)$
- vi. Επιτάχυνση της μάζας $\ddot{u} = \ddot{u}(t)$

Χρήση του 2^{ου} Νόμου του Νεύτωνα: $p - f_s - f_D = m\ddot{u} \Rightarrow$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + f_s(u, \dot{u}) = p(t)$$



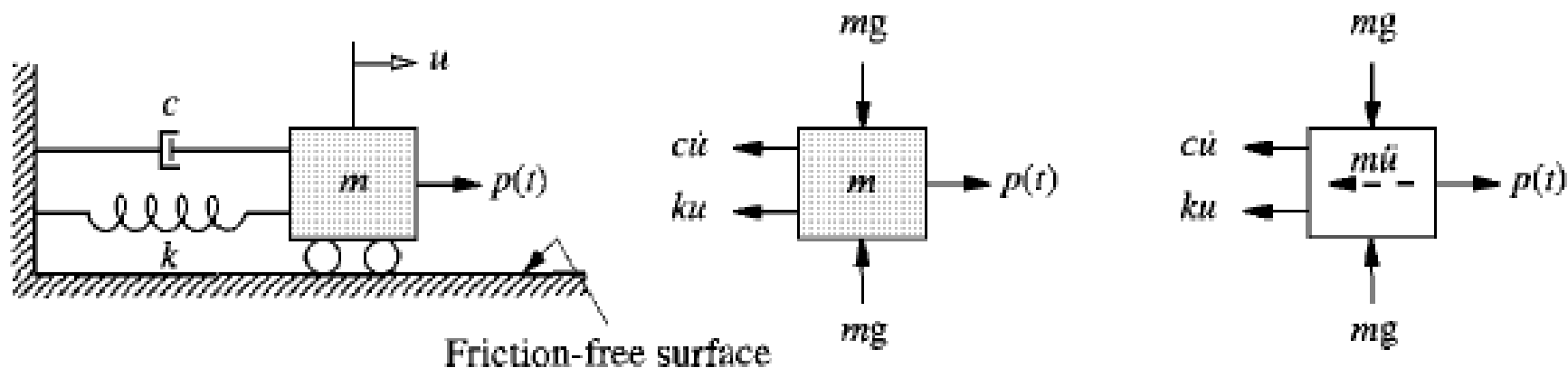
Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

6. Σύστημα Μάζας – Ελατηρίου - Αποσβεστήρα

Το κλασικό μονοβάθμιο σύστημα είναι το σύστημα Μάζας–Ελατηρίου-Αποσβεστήρα

Με χρήση του 2^{ου} Νόμου του Νεύτωνα ή της Αρχής D'Alembert:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + f_s(u, \dot{u}) = p(t)$$



Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

7. Εξίσωση Κίνησης: Σεισμική Διέγερση

Συνολική μετατόπιση της μάζας $u^t(t)$

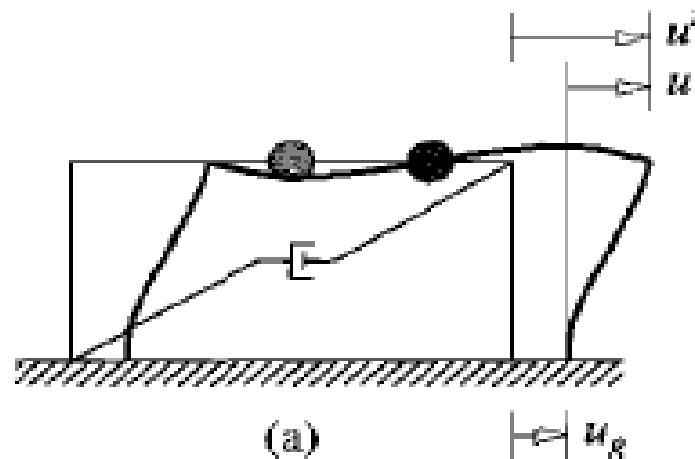
Μετατόπιση του εδάφους $u_g(t)$

Σχετική μετατόπιση $u(t)$

$$u^t(t) = u(t) + u_g(t)$$

Εξίσωση της κίνησης: $m\ddot{u}^t + c\dot{u} + ku = 0$ $\xrightarrow{u^t(t)}$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g(t) \longrightarrow p_{eff}(t) = -m\ddot{u}_g(t)$$



Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

8. Εντατικά Μεγέθη Μελών

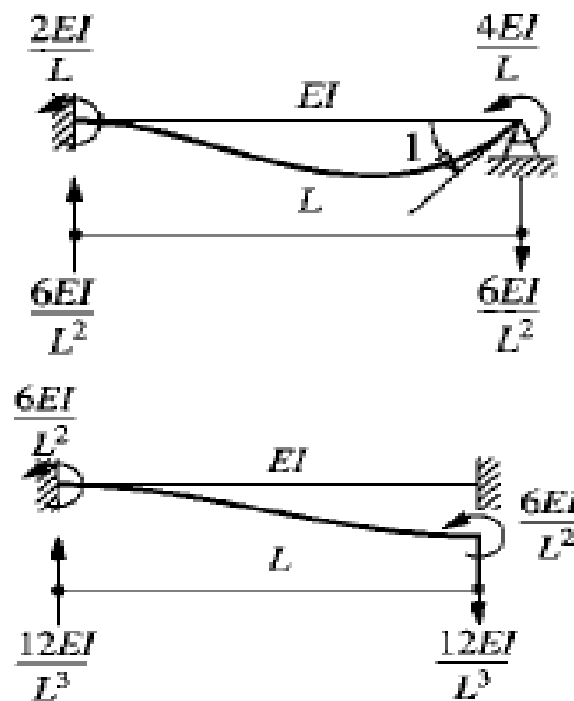
Μετά τον προσδιορισμό της απόκρισης $u(t)$ σε κάθε χρονική στιγμή μπορούν να προσδιοριστούν οι στροφές των κόμβων.

Από τη γνωστή μετατόπιση και στροφή κάθε άκρου κάθε μέλους μπορούν να υπολογισθούν (M, Q) μέσω των συντελεστών δυσκαμψίας, ενώ οι τάσεις να εξαχθούν από τα εντατικά μεγέθη.

$$M_a = \frac{4EI}{L}\theta_a + \frac{2EI}{L}\theta_b + \frac{6EI}{L^2}u_a - \frac{6EI}{L^2}u_b$$

$$V_a = \frac{12EI}{L^3}u_a - \frac{12EI}{L^3}u_b + \frac{6EI}{L^2}\theta_a + \frac{6EI}{L^2}\theta_b$$

Ομοίως M_b, V_b



Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

9. Επαλληλίζοντας Στατική και Δυναμική Απόκριση

i) Για ένα γραμμικό σύστημα οι συνολικές δυνάμεις μπορούν να προσδιορισθούν επαλληλίζοντας τα αποτελέσματα δυο ξεχωριστών αναλύσεων :

(1) Στατικής Ανάλυση «μόνιμα, κινητά φορτία...»

(2) Δυναμική Ανάλυση «φορτία μεταβαλλόμενα στο χρόνο»

ii) Η ανάλυση μη γραμμικών συστημάτων ΔΕΝ μπορεί να χωριστεί σε δύο ανεξάρτητες αναλύσεις.

Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

9. Επαλληλίζοντας Στατική και Δυναμική Απόκριση

i) Για ένα γραμμικό σύστημα οι συνολικές δυνάμεις μπορούν να προσδιορισθούν επαλληλίζοντας τα αποτελέσματα δυο ξεχωριστών αναλύσεων :

(1) Στατική Ανάλυση «μόνιμα, κινητά φορτία...»

(2) Δυναμική Ανάλυση «φορτία μεταβαλλόμενα στο χρόνο»

ii) Η ανάλυση μη γραμμικών συστημάτων ΔΕΝ μπορεί να χωριστεί σε δύο ανεξάρτητες αναλύσεις.

10. Μέθοδοι Επίλυσης της Διαφορικής Εξίσωσης

Διαφορική εξίσωση 2^{ας} τάξης

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t)$$

Αρχική μετατόπιση $u(0)$

Αρχική ταχύτητα $\dot{u}(0)$

Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

10. Μέθοδοι Επίλυσης της Διαφορικής Εξίσωσης

i. Κλασική λύση

α. γενική λύση u_c

β. μερική λύση u_p

$$u(t) = u_c(t) + u_p(t)$$

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t p(\tau) \sin[\omega_n(t - \tau)] d\tau$$

ii. Ολοκλήρωμα Duhamel

$$\omega_n = \sqrt{k/m}$$

iii. Μέθοδοι στο πεδίο των συχνοτήτων

α. μετασχηματισμός Laplace

β. μετασχηματισμός Fourier

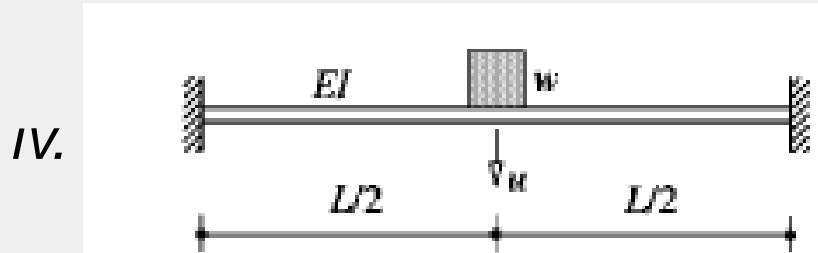
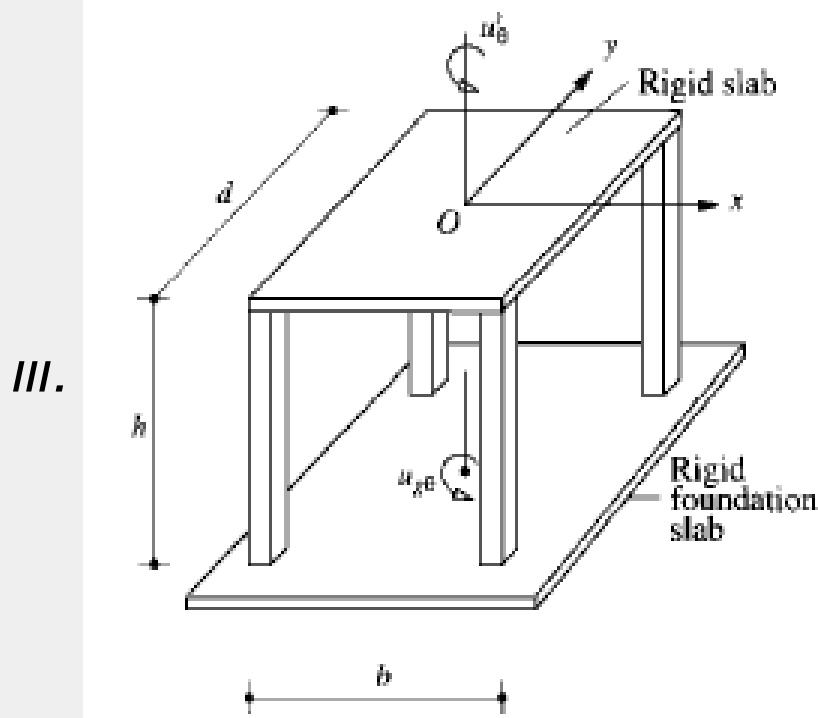
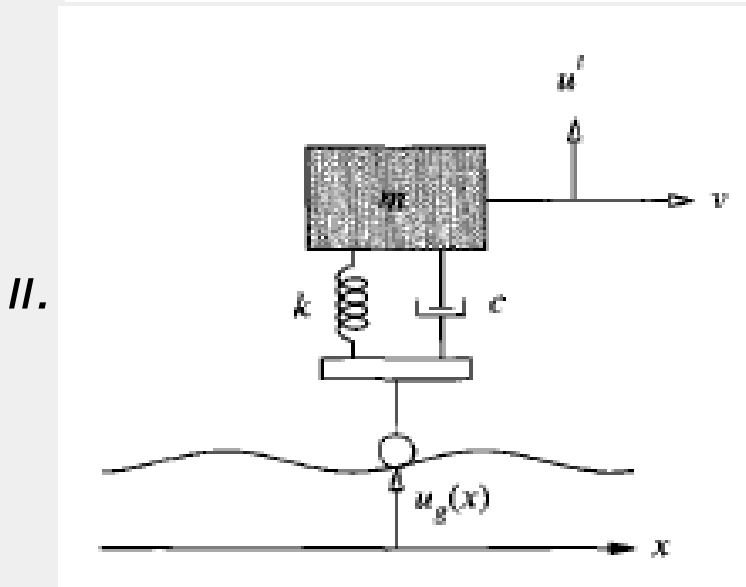
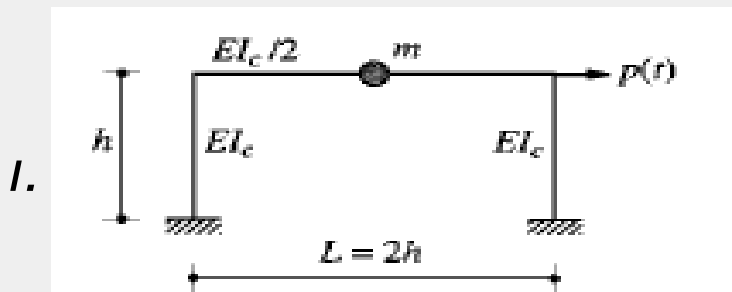
$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) P(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$P(\omega) = F[p(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-i\omega t} dt$$

iv. Αριθμητικές μέθοδοι

Εξισώσεις Κίνησης και Μέθοδοι Επίλυσης

11. Παραδείγματα – Προβλήματα



Ελεύθερες Ταλαντώσεις Μονοβαθμίων Συστημάτων

Ελεύθερες Ταλαντώσεις

1. Ελεύθερη Ταλάντωση Χωρίς Απόσβεση

Θέτοντας $p(t) = 0$ η διαφορική εξίσωση ελεύθερης ταλάντωσης:

$$m\ddot{u} + ku = 0 \quad \text{με αρχικές συνθήκες: } u(0) \quad \dot{u}(0)$$

Η επίλυση ομογενούς διαφορική εξίσωση:

$$u(t) = u(0) \cos \omega_n t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} \sin \omega_n t$$

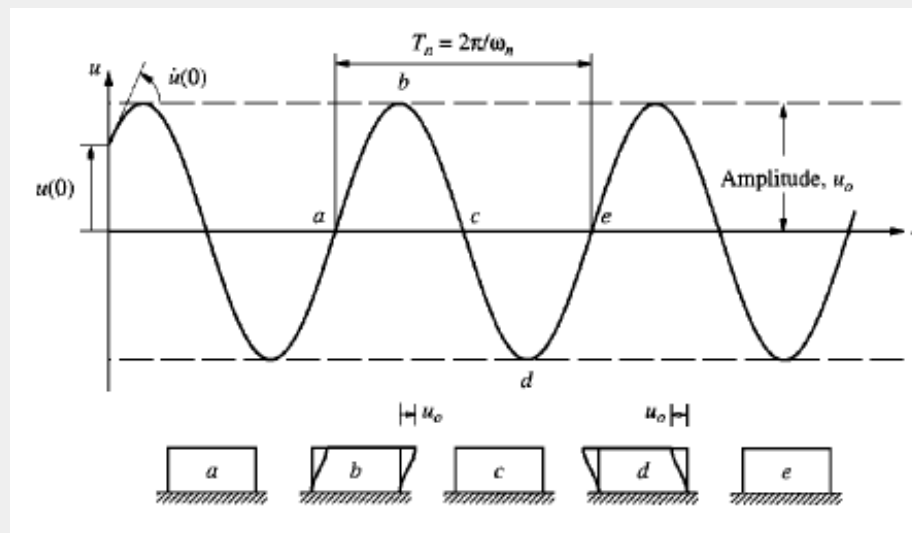
όπου

$$\omega_n = \sqrt{k/m}$$

$$f_n = 1/T_n$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$$

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$$



Ελεύθερες Ταλαντώσεις

2. Ελεύθερη Ταλάντωση με Ιξώδη Απόσβεση

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad \text{Διαιρώντας με τη μάζα } m:$$

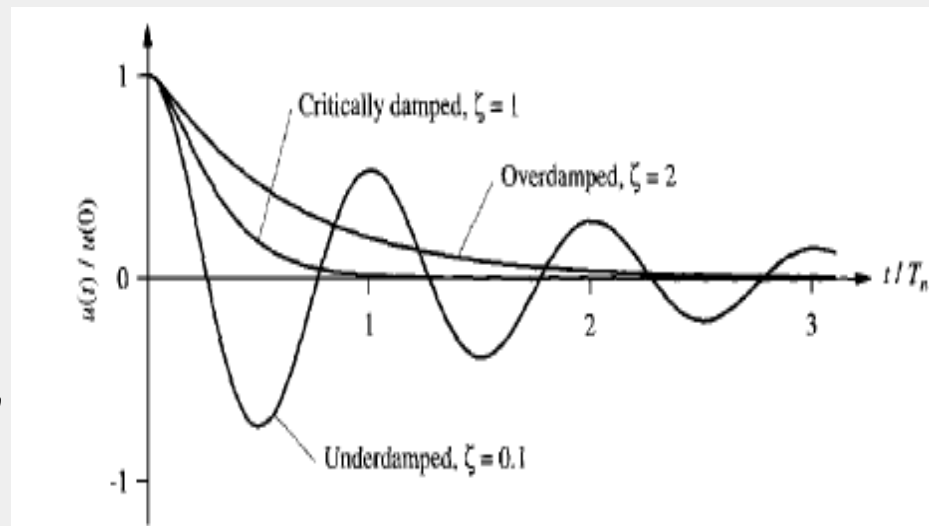
$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2u = 0 \quad \text{όπου} \quad \zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{c_{cr}}$$

Συντελεστής κρίσιμης απόσβεσης

$$c_{cr} = 2m\omega_n = 2k / \omega_n$$

Είδη κίνησης:

- i. Απόσβεση ίση με κρίσιμη
- ii. Απόσβεση μεγαλύτερη από κρίσιμη
- iii. Απόσβεση μικρότερη από κρίσιμη



Ελεύθερες Ταλαντώσεις

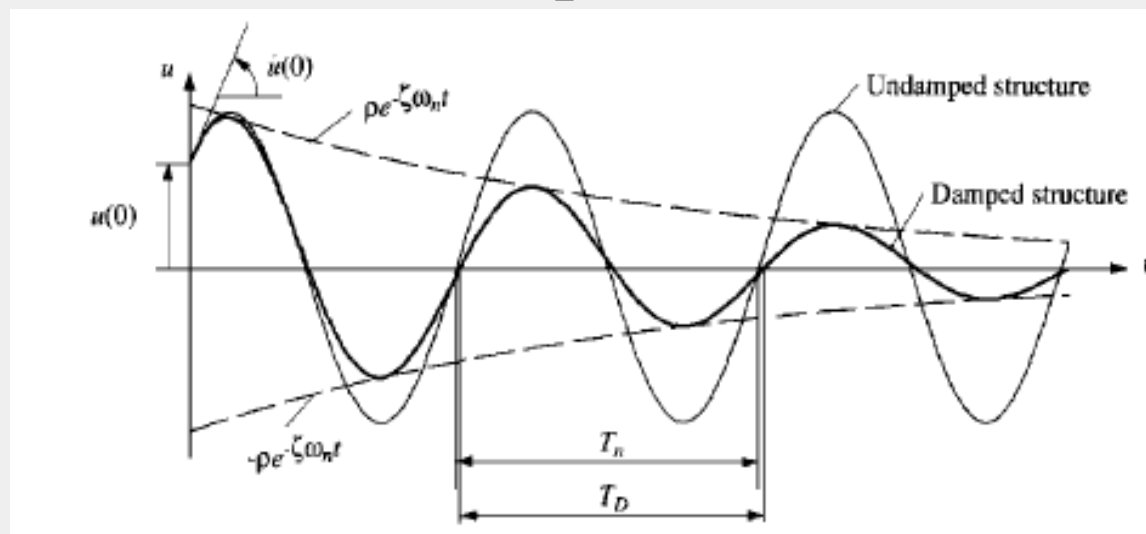
3. Συστήματα με Απόσβεση Μικρότερη της Κρίσιμης

Η λύση της εξίσωσης ελεύθερης ταλάντωσης με γνωστές αρχικές συνθήκες, για $c < c_{cr}$ είναι:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left[u(0) \cos \omega_D t + \frac{\dot{u}(0) + \zeta\omega_n u(0)}{\omega_D} \sin \omega_D t \right] \quad \omega_D = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Η ιδιοπερίοδος T_D συνδέεται με την T_n

$$T_D = \frac{T_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$



Ελεύθερες Ταλαντώσεις

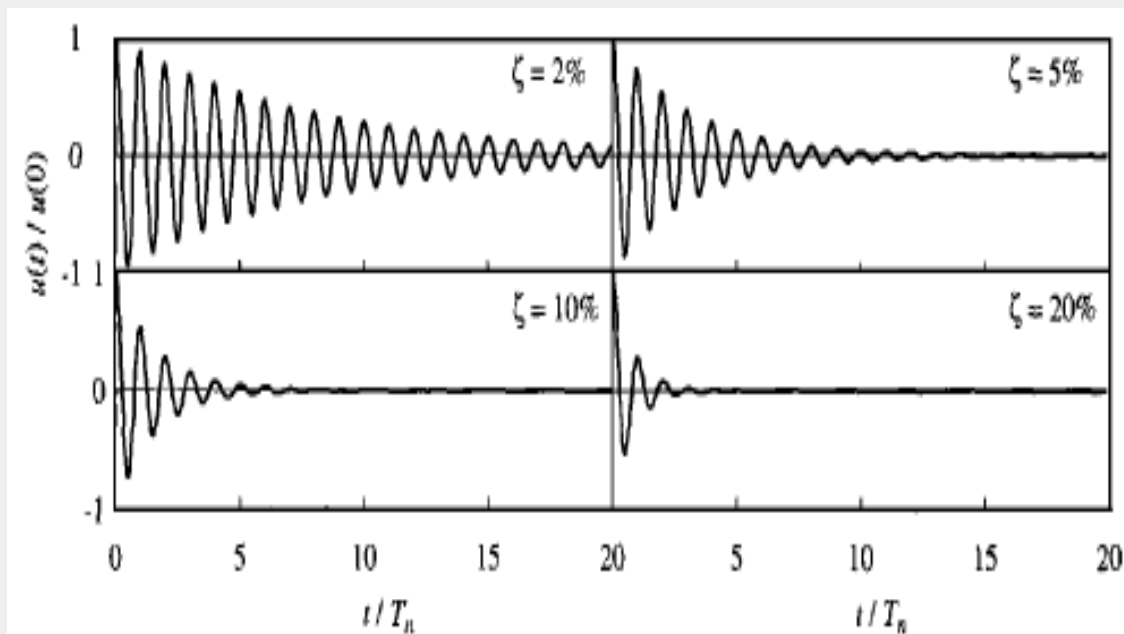
3. Συστήματα με Απόσβεση Μικρότερη της Κρίσιμης

Η πιο σημαντική επίδραση της απόσβεσης είναι ο ρυθμός μείωσης της ελεύθερης ταλάντωσης.

Η σχέση μεταξύ του λόγου δύο διαδοχικών μεγίστων της αποσβενυμένης ελεύθερης ταλάντωσης

$$\frac{u(t)}{u(t+T_D)} = e^{\zeta\omega_n T_D} = e^{\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

4. Ο λόγος απόσβεσης (ζ) προσδιορίζεται μέσω ΠΕΙΡΑΜΑΤΩΝ ελεύθερης ταλάντωσης



Ελεύθερες Ταλαντώσεις

5. Ενέργεια στην Ελεύθερη Ταλάντωση

Η εισαγόμενη ενέργεια σε ένα μονοβάθμιο ταλαντωτή λόγω αρχικής μετατόπισης και ταχύτητας είναι:

$$E_t = \frac{1}{2}k[u(0)]^2 + \frac{1}{2}m[\dot{u}(0)]^2$$

Κινητική: $E_s(t) = \frac{1}{2}k[u(0)]^2$

Παραμόρφωσης
Ελατηρίου:

$$E_k(t) = \frac{1}{2}m[\dot{u}(0)]^2$$

$$E_s(t) = \frac{1}{2}k \left[u(0) \cos \omega_n t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} \sin \omega_n t \right]^2 \quad E_k(t) = \frac{1}{2}m\omega_n^2 \left[-u(0) \sin \omega_n t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} \cos \omega_n t \right]^2$$

Η ολική ενέργεια είναι ανεξάρτητη του χρόνου και ίση με την αρχική.

Απόκριση σε Αρμονικές και Περιοδικές Διεγέρσεις

Απόκριση σε Αρμονικές και Περιοδικές Διεγέρσεις

1. Αρμονική Ταλάντωση Συστημάτων Χωρίς Απόσβεση

$$m\ddot{u} + ku = p_o \sin(\omega t) \quad \text{με αρχικές συνθήκες: } u(0) \quad \dot{u}(0)$$

Η μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης: $u_p(t) = \frac{p_o}{k} \frac{1}{1 - (\omega / \omega_n)^2} \sin(\omega t)$

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης: $u_c(t) = A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t)$

Οι σταθερές A, B προσδιορίζονται θέτοντας τις αρχικές συνθήκες και τελικά

$$u(t) = u_c(t) + u_p(t)$$

$$u(t) = \underbrace{u(0) \cos(\omega_n t) + \left[\frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} - \frac{p_o}{k} \frac{\omega / \omega_n}{1 - (\omega / \omega_n)^2} \right] \sin(\omega_n t)}_{\text{Παροδική}} + \underbrace{\frac{p_o}{k} \frac{1}{1 - (\omega / \omega_n)^2} \sin(\omega t)}_{\text{Μόνιμη}}$$

Απόκριση σε Αρμονικές και Περιοδικές Διεγέρσεις

1. Αρμονική Ταλάντωση Συστημάτων Χωρίς Απόσβεση

Η μόνιμη δυναμική απόκριση μπορεί να εκφραστεί ως:

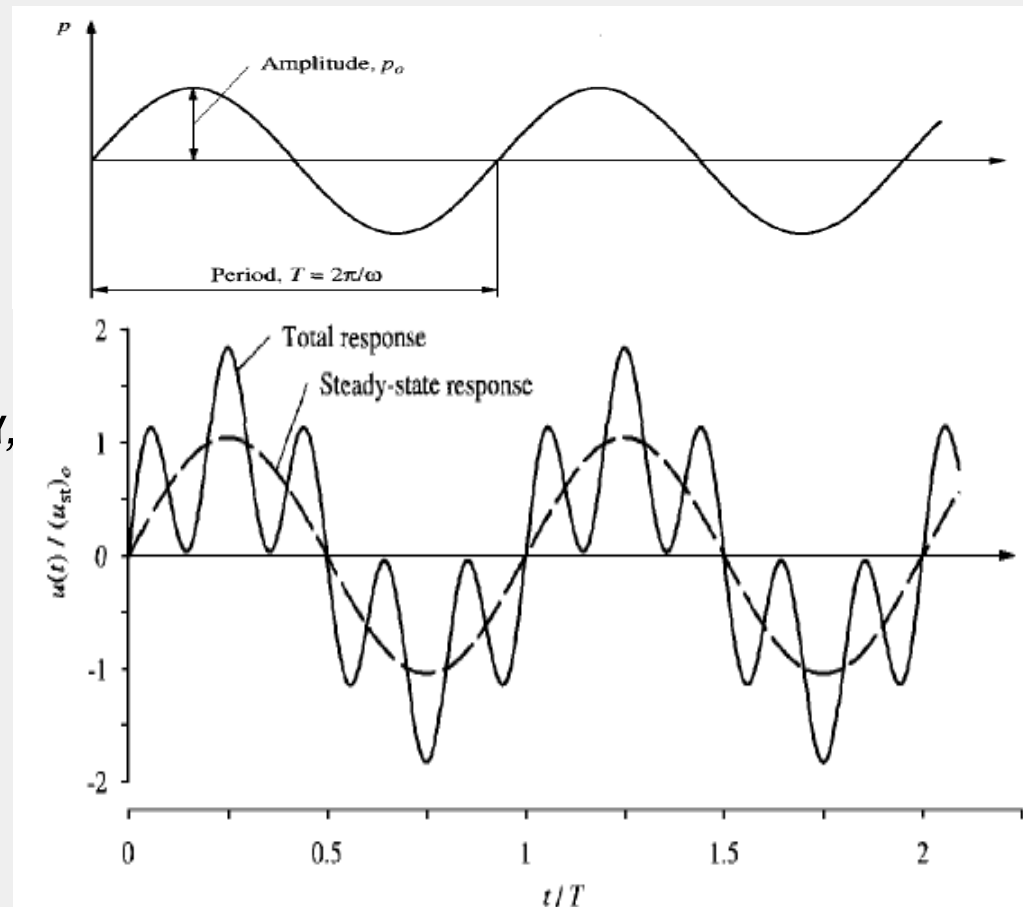
$$u(t) = (u_{st})_0 \left[\frac{1}{1 - (\omega / \omega_n)^2} \right] \sin(\omega t)$$

Αγνοώντας τα δυναμικά φαινόμενα, η στατική παραμόρφωση κάθε χρονική στιγμή:

$$u_{st}(t) = \frac{P_o}{k} \sin(\omega t)$$

Μέγιστη τιμή:

$$(u_{st})_0 = \frac{P_o}{k}$$



Απόκριση σε Αρμονικές και Περιοδικές Διεγέρσεις

1. Αρμονική Ταλάντωση Συστημάτων Χωρίς Απόσβεση

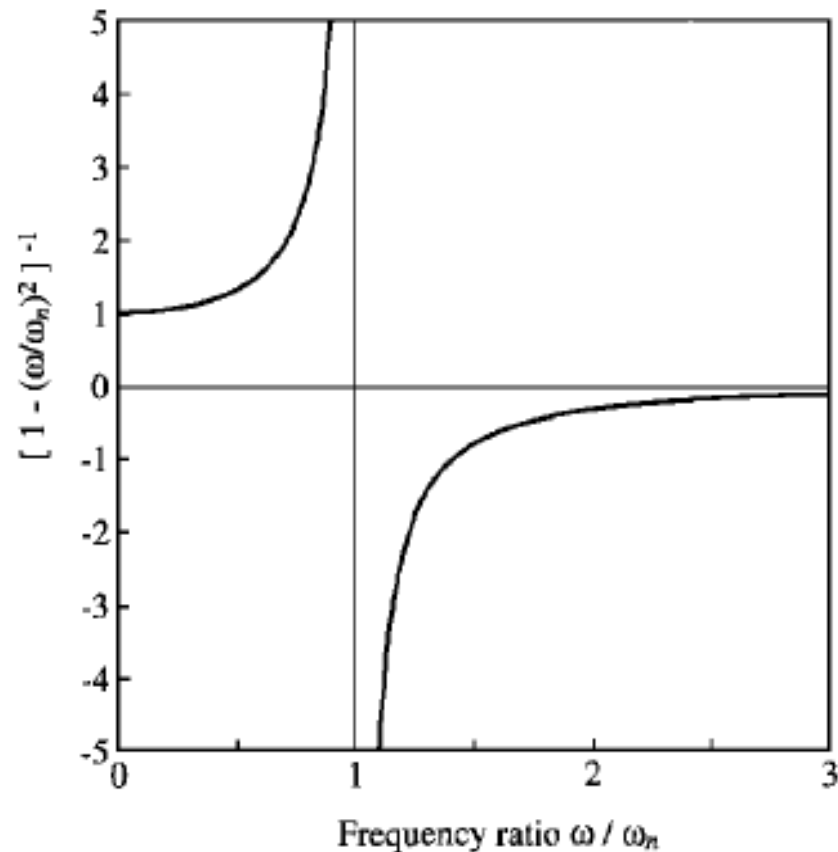
Ο όρος $\left[\frac{1}{1 - (\omega / \omega_n)^2} \right]$ απεικονίζεται :

Για $\omega / \omega_n < 1$ τα u και p έχουν το ίδιο πρόσημο.

Οπότε η μετατόπιση είναι σε φάση με την επιβαλλόμενη δύναμη.

Για $\omega / \omega_n > 1$ τα u και p έχουν αντίθετο πρόσημο.

Οπότε η μετατόπιση είναι εκτός φάσης με την επιβαλλόμενη δύναμη.



Απόκριση σε Αρμονικές και Περιοδικές Διεγέρσεις

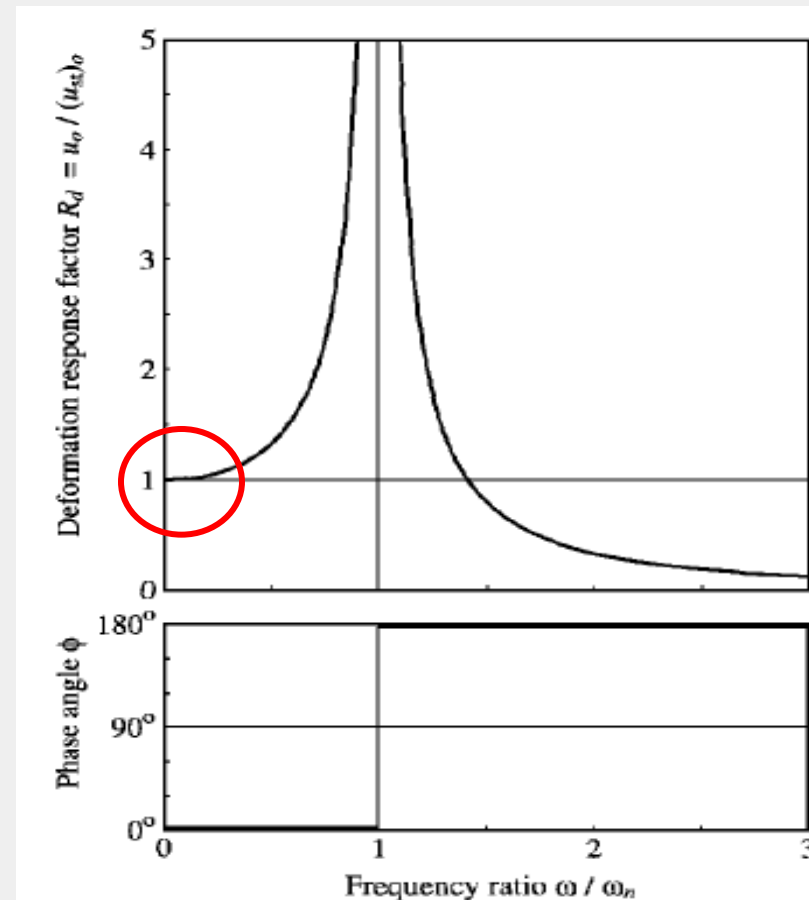
1. Αρμονική Ταλάντωση Συστημάτων Χωρίς Απόσβεση

Γωνία φάσης:
$$\varphi = \begin{cases} 0^\circ & \omega < \omega_n \\ 180^\circ & \omega > \omega_n \end{cases}$$

Παράγων απόκρισης
παραμορφώσεων (ή μετατοπίσεων):

$$R_d = \frac{u_0}{(u_{st})_0} = \frac{1}{\left|1 - (\omega / \omega_n)^2\right|}$$

Για R_d λίγο μεγαλύτερο από το 1 το εύρος δυναμικής παραμόρφωσης είναι ουσιαστικά το ίδιο με της στατικής.



Απόκριση σε Αρμονικές και Περιοδικές Διεγέρσεις

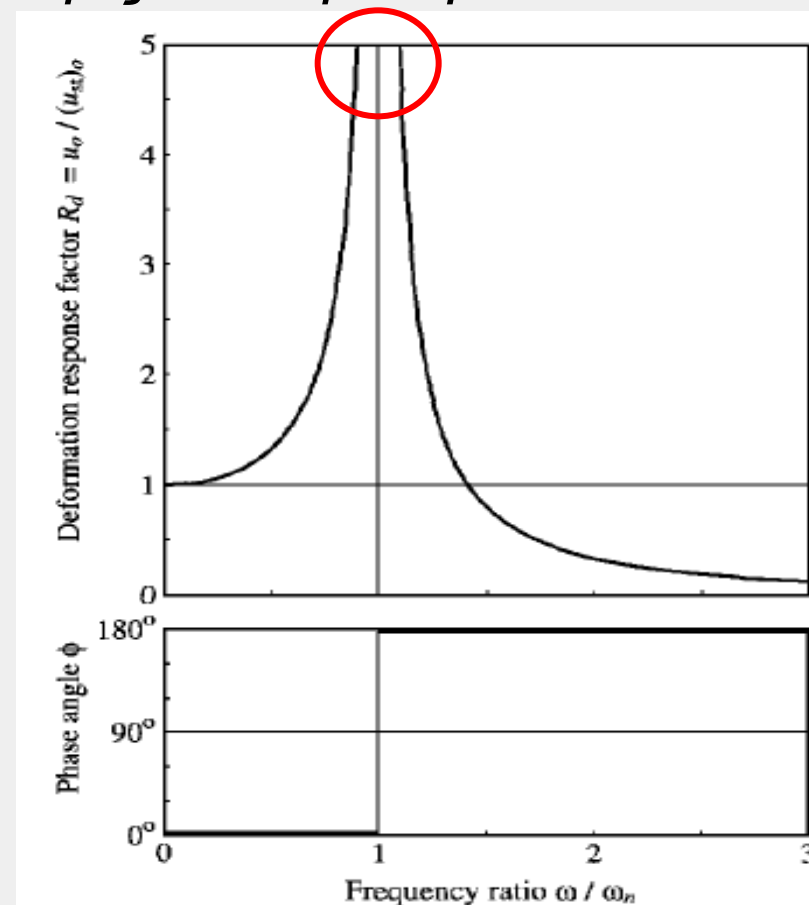
1. Αρμονική Ταλάντωση Συστημάτων Χωρίς Απόσβεση

Γωνία φάσης:
$$\varphi = \begin{cases} 0^\circ & \omega < \omega_n \\ 180^\circ & \omega > \omega_n \end{cases}$$

Παράγων απόκρισης
παραμορφώσεων (ή μετατοπίσεων):

$$R_d = \frac{u_0}{(u_{st})_0} = \frac{1}{\left|1 - (\omega / \omega_n)^2\right|}$$

Η συχνότητα συντονισμού ορίζεται ως η επιβαλλόμενη συχνότητα για την οποία το R_d μεγιστοποιείται.



Απόκριση σε Αρμονικές και Περιοδικές Διεγέρσεις

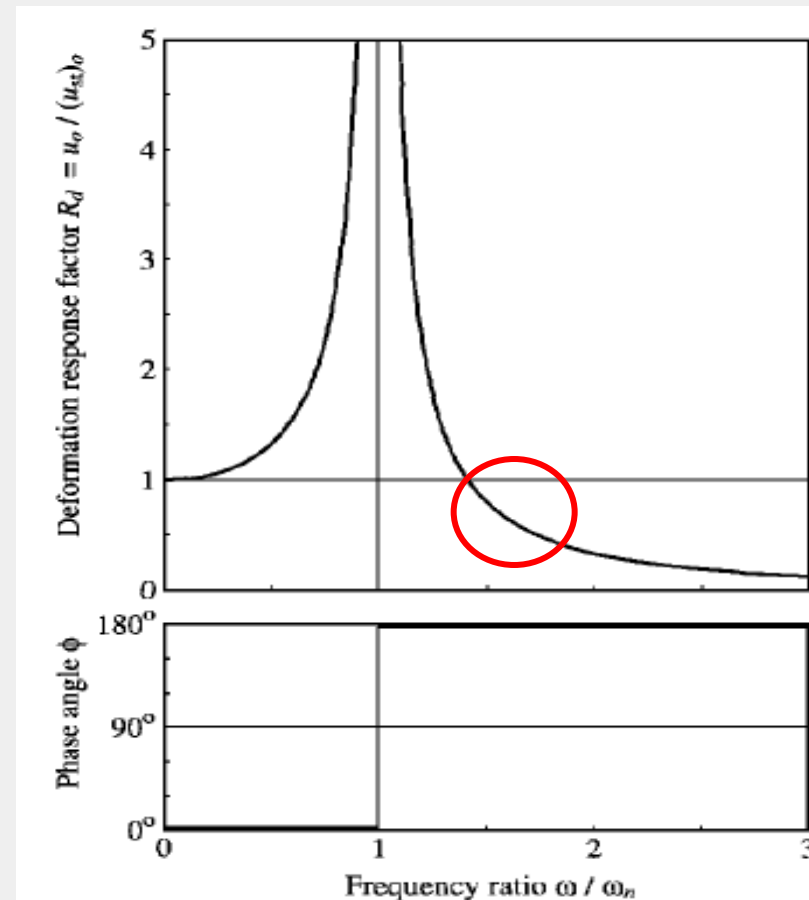
1. Αρμονική Ταλάντωση Συστημάτων Χωρίς Απόσβεση

Γωνία φάσης:
$$\varphi = \begin{cases} 0^\circ & \omega < \omega_n \\ 180^\circ & \omega > \omega_n \end{cases}$$

Παράγων απόκρισης
παραμορφώσεων (ή μετατοπίσεων):

$$R_d = \frac{u_0}{(u_{st})_0} = \frac{1}{|1 - (\omega / \omega_n)^2|}$$

Για $R_d < 1$ το εύρος δυναμικής παραμόρφωσης είναι μικρότερο από της στατικής.



Απόκριση σε Αρμονικές και Περιοδικές Διεγέρσεις

1. Αρμονική Ταλάντωση Συστημάτων Χωρίς Απόσβεση

Για $\omega = \omega_n$ η μερική λύση είναι $u_p(t) = -\frac{p_o}{2k} \omega_n t \cos(\omega_n t)$

και για αρχικές συνθήκες ηρεμίας $u(0) = \dot{u}(0) = 0$ η συνολική λύση είναι:

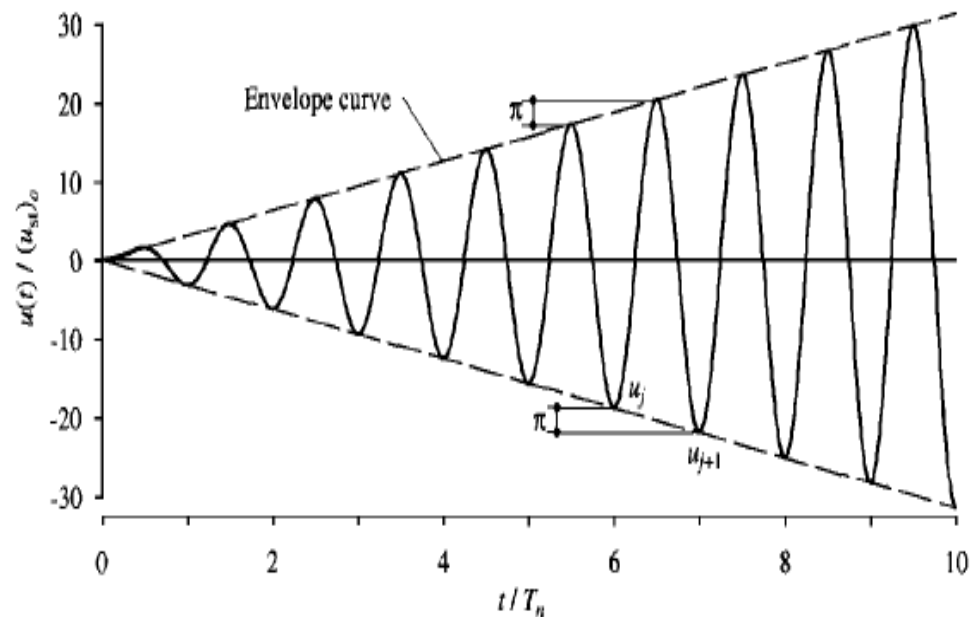
$$u(t) = -\frac{1}{2} \frac{p_o}{k} (\omega_n t \cos(\omega_n t) - \sin(\omega_n t))$$



$$\frac{u(t)}{(u_{st})_0} = -\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi t}{T_n} \cos \frac{2\pi t}{T_n} - \sin \frac{2\pi t}{T_n} \right)$$

Το εύρος παραμόρφωσης αυξάνει επ' άοριστον. «Συντονισμός»

“Ακαδημαϊκό” αποτέλεσμα....



Απόκριση σε Αρμονικές και Περιοδικές Διεγέρσεις

2. Αρμονική Ταλάντωση με Ιξώδη Απόσβεση

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0 \sin(\omega t) \quad \text{με αρχικές συνθήκες: } u(0) \quad \dot{u}(0)$$

Η μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης: $u_p(t) = C \sin(\omega t) + D \cos(\omega t)$

$$\text{όπου: } C = \frac{p_0}{k} \frac{1 - (\omega / \omega_n)^2}{\left[1 - (\omega / \omega_n)^2\right]^2 + \left[2\zeta (\omega / \omega_n)\right]^2}$$

$$D = \frac{p_0}{k} \frac{-2\zeta \omega / \omega_n}{\left[1 - (\omega / \omega_n)^2\right]^2 + \left[2\zeta (\omega / \omega_n)\right]^2}$$

Η γενική λύση: $u_c(t) = e^{-\zeta \omega_n t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) \quad \text{με } \omega_D = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$

Οι σταθερές A, B προσδιορίζονται θέτοντας τις αρχικές συνθήκες.

Απόκριση σε Αρμονικές και Περιοδικές Διεγέρσεις

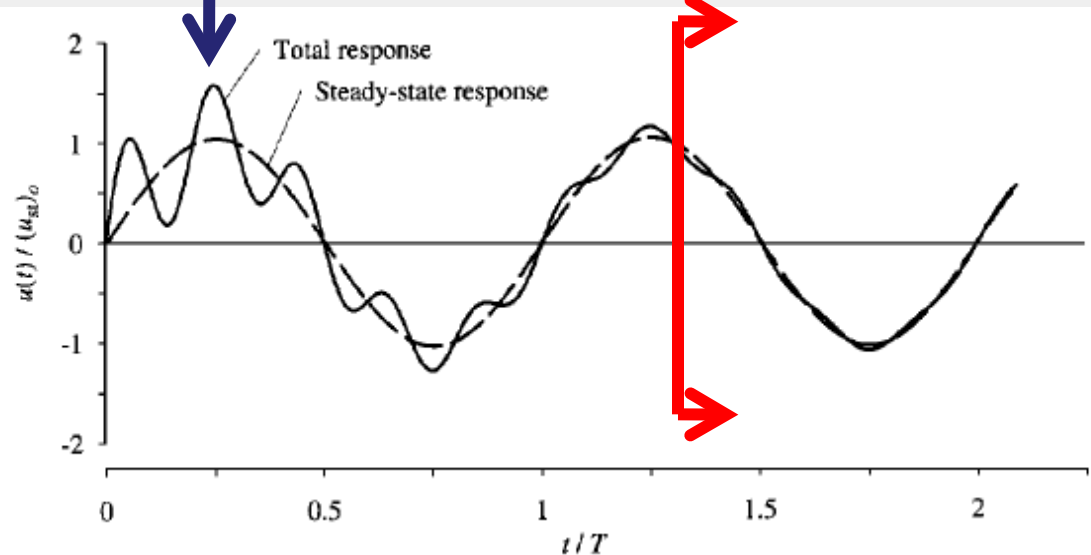
2. Αρμονική Ταλάντωση με Ιξώδη Απόσβεση

Τελικά $u(t) = u_c(t) + u_p(t) \Rightarrow$

$$u(t) = \underbrace{e^{-\zeta\omega_n t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t)}_{\text{Παροδική}} + \underbrace{C \sin \omega t + D \cos \omega t}_{\text{Μόνιμη}}$$

Μετά από λίγο μένει μόνο η επιβαλλόμενη απόκριση.

Το μέγιστο της παραμόρφωσης μπορεί να συμβεί πριν το σύστημα φτάσει τη μόνιμη κατάσταση.



Απόκριση σε Αρμονικές και Περιοδικές Διεγέρσεις

2. Αρμονική Ταλάντωση με Ιξώδη Απόσβεση

Για $\omega = \omega_n$ και για αρχικές συνθήκες ηρεμίας:

$$u(t) = (u_{st})_0 \frac{1}{2\zeta} \left[e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_D t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_D t \right) - \cos \omega_n t \right]$$

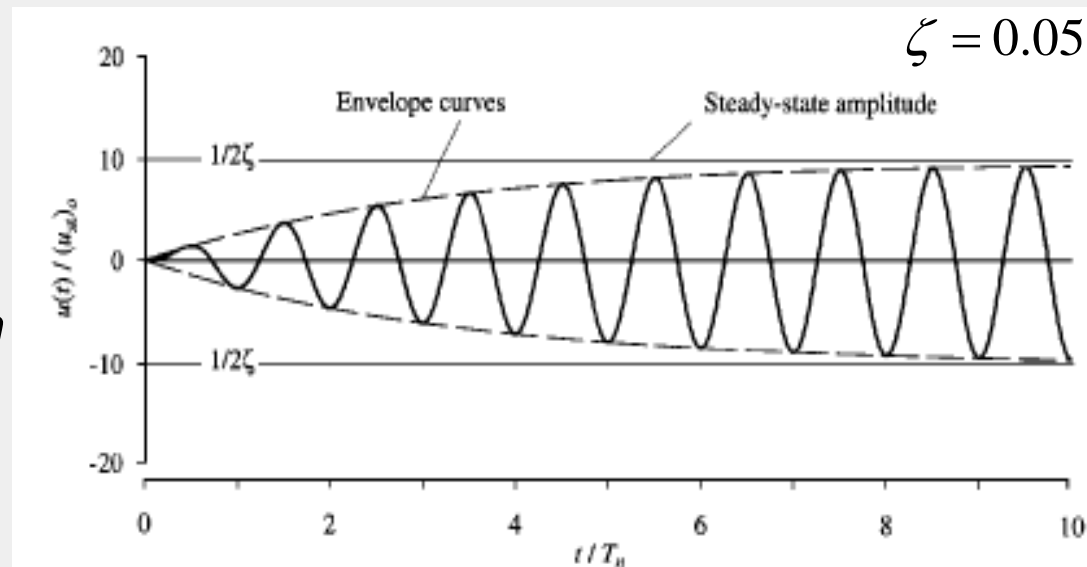
Η απόσβεση περιορίζει την απόκριση στην φραγμένη τιμή

$$u_0 = (u_{st})_0 / 2\zeta$$

Για συστήματα με μικρή απόσβεση

$$u(t) = \underbrace{(u_{st})_0 \frac{1}{2\zeta} (e^{-\zeta\omega_n t} - 1)}_{\text{Περιβάλλουσα Συνάρτησης}} \cos \omega_n t$$

Περιβάλλουσα Συνάρτησης



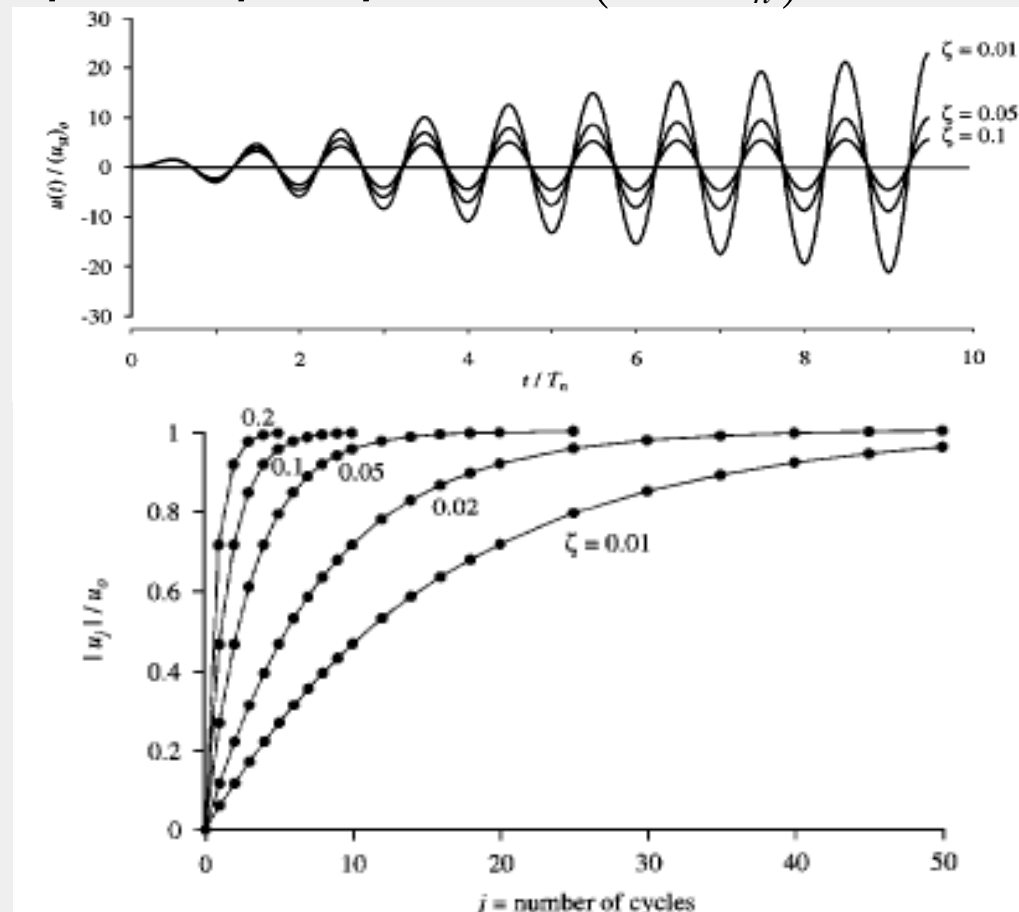
Απόκριση σε Αρμονικές και Περιοδικές Διεγέρσεις

2. Αρμονική Ταλάντωση με Ιξώδη Απόσβεση ($\omega = \omega_n$)

Το μέγιστο u_j μετά από j κύκλους:

$$\frac{|u_j|}{u_0} = 1 - e^{-2\pi\zeta j}$$

Όσο πιο μικρή είναι η απόσβεση τόσο πιο μεγάλος ο αριθμός των κύκλων που απαιτείται για να επιτευχθεί ένα συγκεκριμένο ποσοστό του u_0 του μόνιμου εύρους.



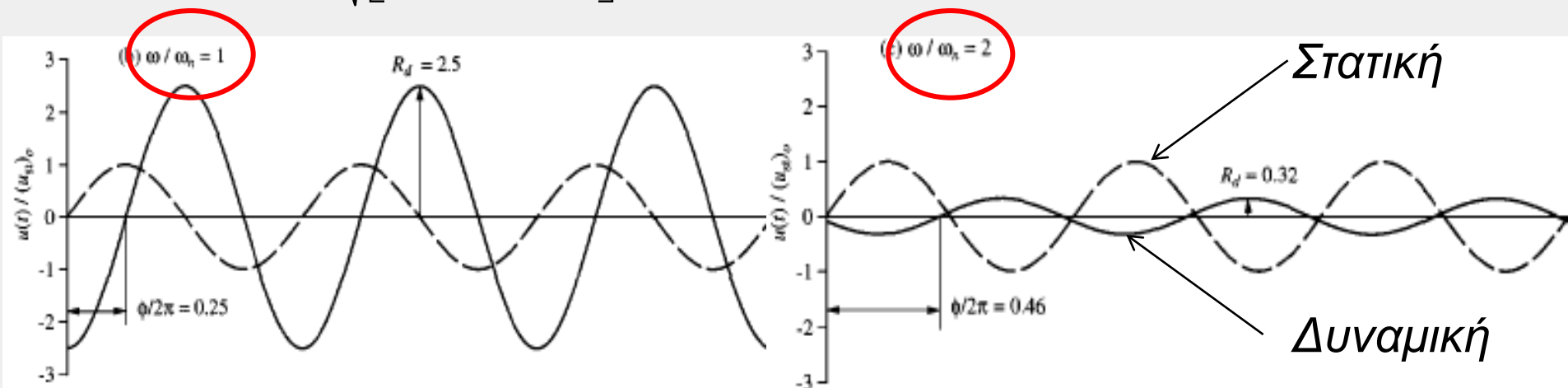
Απόκριση σε Αρμονικές και Περιοδικές Διεγέρσεις

2. Αρμονική Ταλάντωση με Ιξώδη Απόσβεση

Η μόνιμη παραμόρφωση του συστήματος: $u(t) = (u_{st})_0 R_d \sin(\omega t - \varphi)$
όπου $u_0 = \sqrt{C^2 + D^2}$ και $\varphi = \tan^{-1}(-D/C)$ Αντικαθιστώντας τα C,D:

$$R_d = \frac{u_0}{(u_{st})_0} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega / \omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega / \omega_n)]^2}}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{2\zeta(\omega / \omega_n)}{1 - (\omega / \omega_n)^2}$$



Απόκριση σε Αρμονικές και Περιοδικές Διεγέρσεις

2. Αρμονική Ταλάντωση με Ιξώδη Απόσβεση

Για R_d λίγο μεγαλύτερο του 1 το εύρος δυναμικής παραμόρφωσης είναι ουσιαστικά ανεξάρτητο από την απόσβεση.

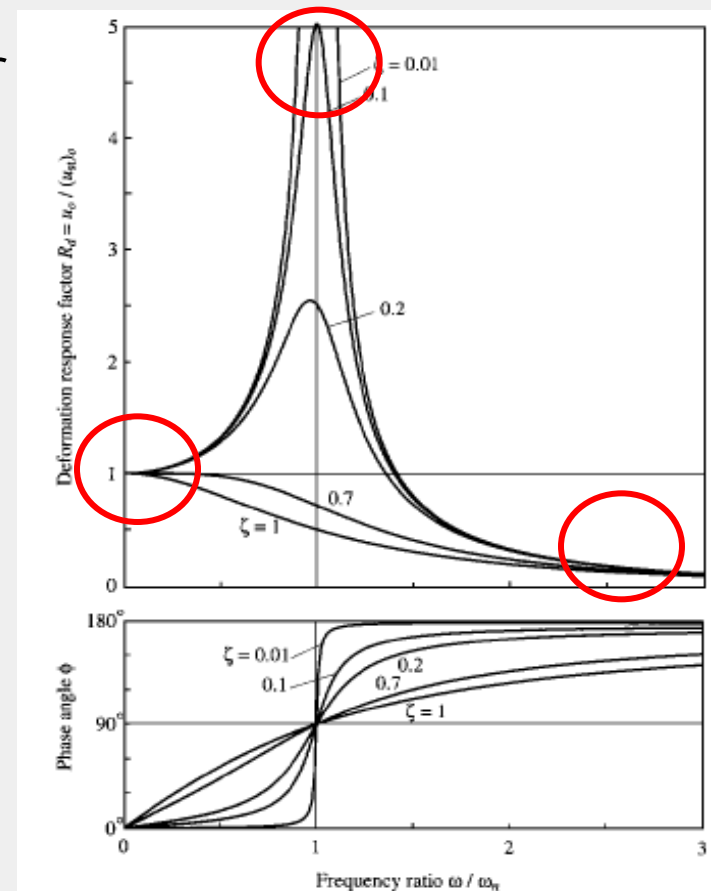
$$u_0 = (u_{st})_0 = \frac{p_o}{k}$$

Η συχνότητα συντονισμού ορίζεται ως η επιβαλλόμενη συχνότητα για την οποία το R_d μεγιστοποιείται.

$$u_0 = \frac{(u_{st})_0}{2\zeta} = \frac{p_o}{c\omega_n}$$

Για R_d τείνει στο μηδέν το εύρος δυναμικής παραμόρφωσης είναι ουσιαστικά ανεξάρτητο από την απόσβεση.

$$u_0 = (u_{st})_0 \frac{\omega_n^2}{\omega^2} = \frac{p_o}{m\omega^2}$$



Απόκριση σε Αρμονικές και Περιοδικές Διεγέρσεις

2. Αρμονική Ταλάντωση με Ιξώδη Απόσβεση

Δυναμικοί παράγοντες απόκρισης:

i) Παράγων απόκρισης παραμόρφωσης:

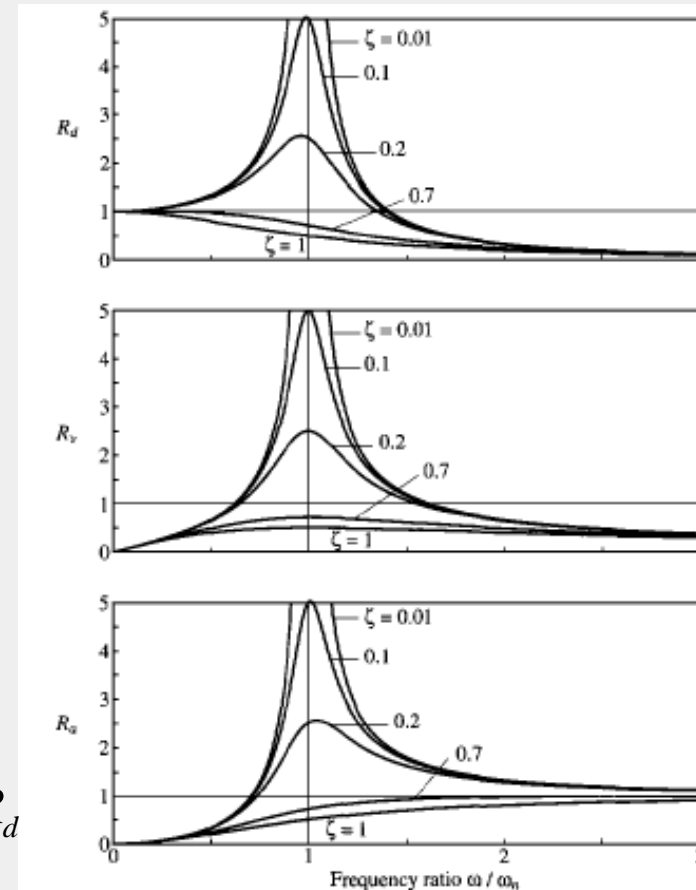
$$\frac{u(t)}{p_0/k} = R_d \sin(\omega t - \varphi) \Rightarrow R_d = \frac{u_0}{(u_{st})_0}$$

ii) Παράγων απόκρισης ταχύτητας:

$$\frac{\dot{u}(t)}{p_0/\sqrt{km}} = R_v \cos(\omega t - \varphi) \Rightarrow R_v = \frac{\omega}{\omega_n} R_d$$

iii) Παράγων απόκρισης επιτάχυνσης:

$$\frac{\ddot{u}(t)}{p_0/m} = -R_a \sin(\omega t - \varphi) \Rightarrow R_a = \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 R_d$$



Απόκριση σε Αρμονικές και Περιοδικές Διεγέρσεις

2. Αρμονική Ταλάντωση με Ιξώδη Απόσβεση

Συχνότητες Συντονισμού:

i) Συχνότητα Συντονισμού/ Παράγων απόκρισης παραμόρφωσης:

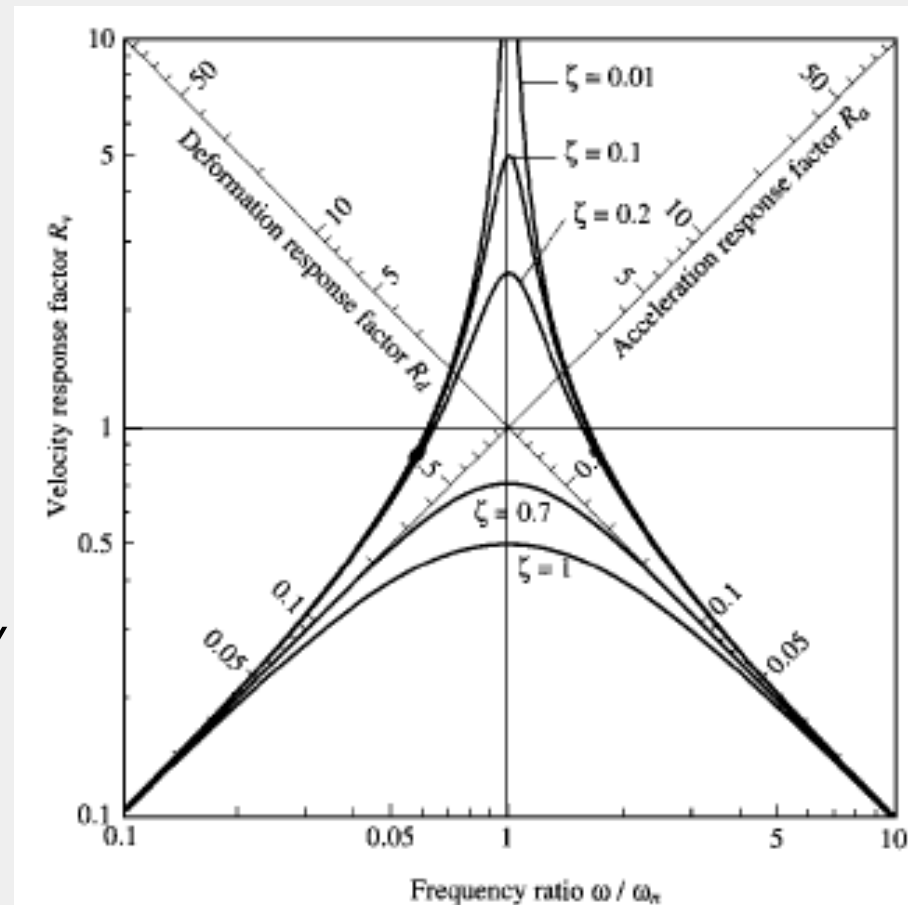
$$\omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad R_d = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

ii) Συχνότητα Συντονισμού/ Παράγων απόκρισης ταχύτητας:

$$\omega_n \quad R_v = \frac{1}{2\zeta}$$

iii) Συχνότητα Συντονισμού/ Παράγων απόκρισης επιτάχυνσης:

$$\omega_n \div \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad R_a = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$$



Απόκριση σε Αρμονικές και Περιοδικές Διεγέρσεις

3. Μετάδοση Δυνάμεων και Μόνωση Ταλαντώσεων

Σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα υπόκειται σε αρμονική δύναμη.
Η δύναμη που μεταφέρεται στη βάση:

$$f_T = f_s + f_D = ku + c\dot{u}$$

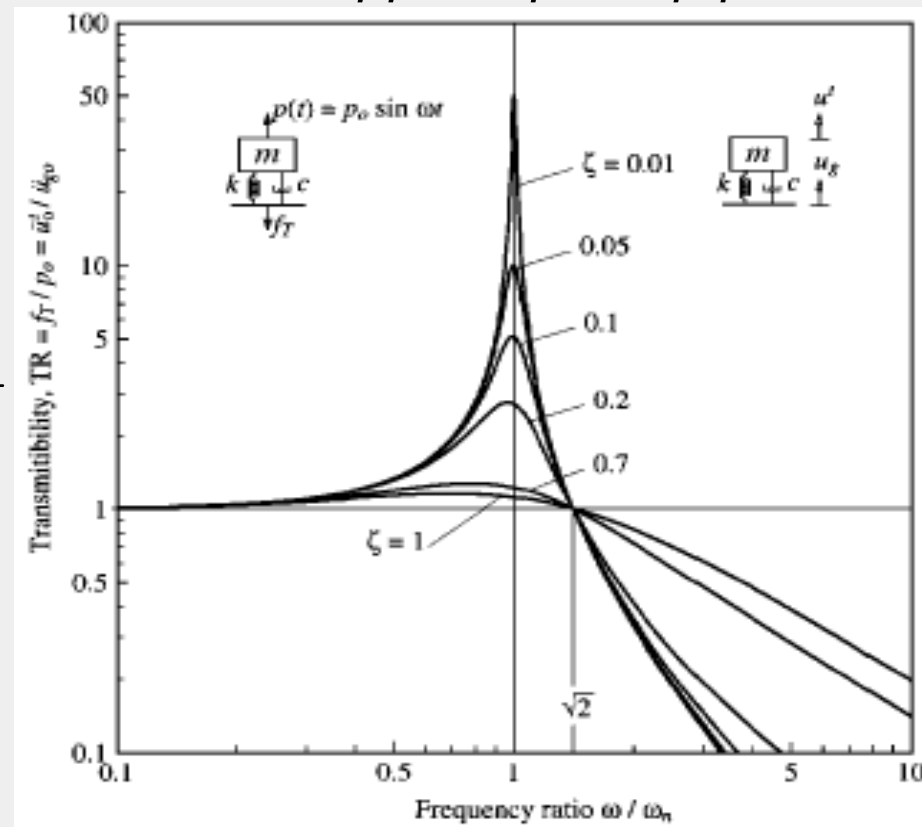
Αντικαθιστώντας τα u και \dot{u}

$$f_T = (u_{st})_0 R_d \left[k \sin(\omega t - \varphi) + c\omega \cos(\omega t - \varphi) \right]$$

Η μέγιστη τιμή της $\frac{(f_T)_0}{p_0} = R_d \sqrt{1 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$

Μεταδοτικότητα:

$$TR = \left[\frac{1 + (2\zeta\omega / \omega_n)^2}{\left[1 - (\omega / \omega_n)^2 \right]^2 + (2\zeta\omega / \omega_n)^2} \right]^{1/2}$$



Απόκριση σε Αρμονικές και Περιοδικές Διεγέρσεις

4. Απόκριση σε Εδαφική Κίνηση

Μονοβάθμιο σύστημα σε αρμονική εδαφική κίνηση $\ddot{u}_g(t) = \ddot{u}_{g0} \sin \omega t$

Η εξίσωση κίνησης είναι: $u(t) = -\frac{m\ddot{u}_{g0}}{k} R_d \sin(\omega t - \varphi)$

Η επιτάχυνση της μάζας είναι: $\ddot{u}^t(t) = \ddot{u}_g(t) + \ddot{u}(t)$

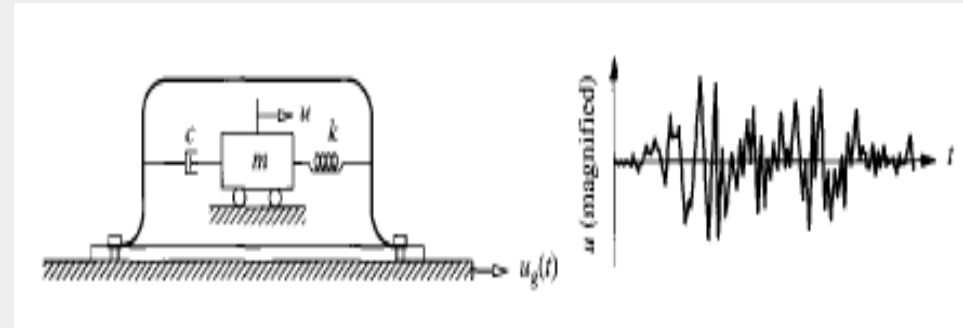
Ο λόγος της επιτάχυνσης που μεταδίδεται στη μάζα προς το εύρος της εδαφικής επιτάχυνσης είναι γνωστός ως μεταδοτικότητα TR του συστήματος :

$$TR = \frac{\ddot{u}_0^t}{\ddot{u}_{g0}} = \left[\frac{1 + (2\zeta\omega / \omega_n)^2}{\left[1 - (\omega / \omega_n)^2\right]^2 + (2\zeta\omega / \omega_n)^2} \right]^{1/2}$$

Απόκριση σε Αρμονικές και Περιοδικές Διεγέρσεις

5. Μετρητές Ταλαντώσεων

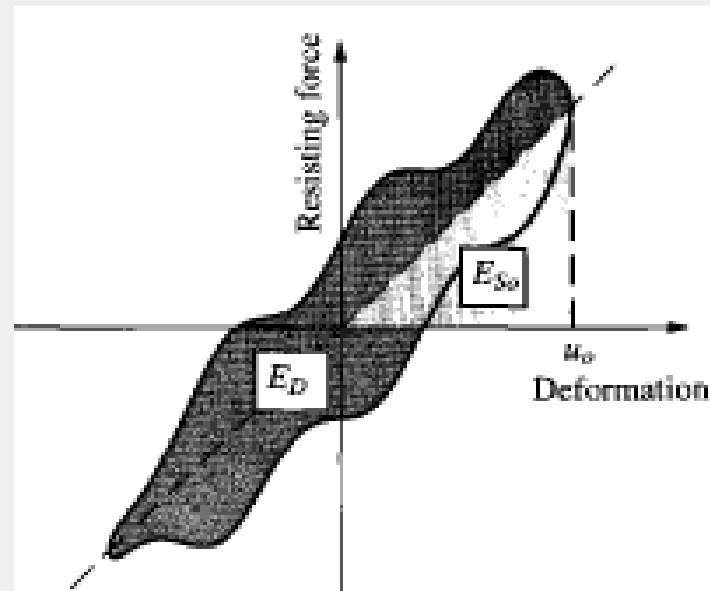
- i) Μέτρηση της επιτάχυνσης
- ii) Μέτρηση της μετατόπισης



6. Ισοδύναμη Ιξώδης Απόσβεση

Η συνηθέστερη μέθοδος προσδιορισμού της ισοδύναμης ιξώδους απόσβεσης είναι να εξισωθεί η ενέργεια που αναλώνεται σε έναν κύκλο ταλάντωσης της πραγματικής κατασκευής και ενός ισοδύναμου ιξώδους συστήματος.

$$\zeta_{eq} = \frac{1}{4\pi} \frac{E_D}{E_{So}}$$



Απόκριση σε Αρμονικές και Περιοδικές Διεγέρσεις

7. Συστήματα με Μη Ιξώδη Απόσβεση

i) Απόσβεση ανεξάρτητη της συχνότητας

$$f_D = \frac{nk}{\omega} \dot{u} \quad \eta: \text{ο συντελεστής απόσβεσης}$$

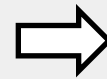
Η ενέργεια που αναλώνεται σε έναν κύκλο ταλάντωσης συχνότητας ω είναι ανεξάρτητη του ω .

$$E_D = \pi n k u_0^2 = 2\pi n E_{S_0}$$

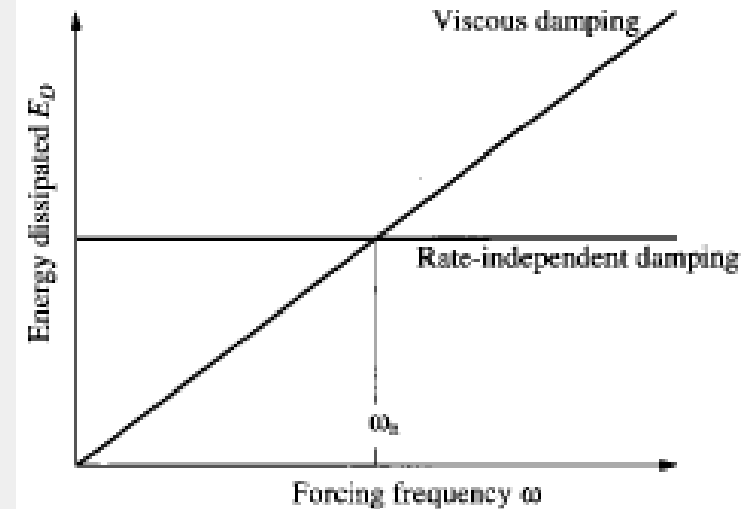
ii) Μόνιμη απόκριση σε αρμονική δύναμη

Για επιβαλλόμενη φόρτιση

$$p(t) = p_o \sin \omega t$$



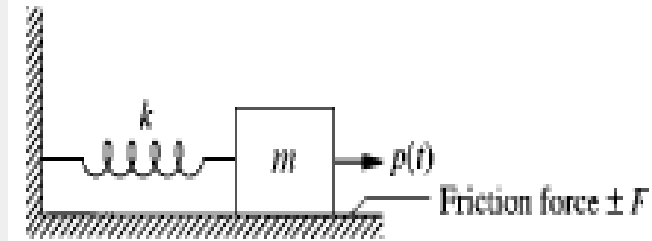
$$m\ddot{u} + \frac{nk}{\omega} \dot{u} + ku = p(t)$$
$$u_0 = (u_{st})_0 \frac{1}{\sqrt{\left[1 - (\omega / \omega_n)^2\right]^2 + n}}$$



Απόκριση σε Αρμονικές και Περιοδικές Διεγέρσεις

8. Αρμονική Ταλάντωση με Τριβή Coulomb

$$m\ddot{u} + ku \pm F = p(t)$$



Το πρόσημο της τριβής μεταβάλλεται με την διεύθυνση της κίνησης.

Η ενέργεια που αναλώνεται λόγω τριβής Coulomb σε έναν κύκλο ταλάντωσης με εύρος ταλάντωσης u_0 είναι το εμβαδόν του βρόχου υστέρησης του διαγράμματος Δύναμης Τριβής-Μετατόπισης.

$$E_F = 4Fu_0$$

Η απώλεια ενέργειας λόγω τριβής Coulomb ανά κύκλο είναι λιγότερη από την εισερχόμενη ενέργεια. Το εύρος ταλάντωσης θα αυξάνει κύκλο με κύκλο χωρίς όριο.

Απόκριση σε Αρμονικές και Περιοδικές Διεγέρσεις

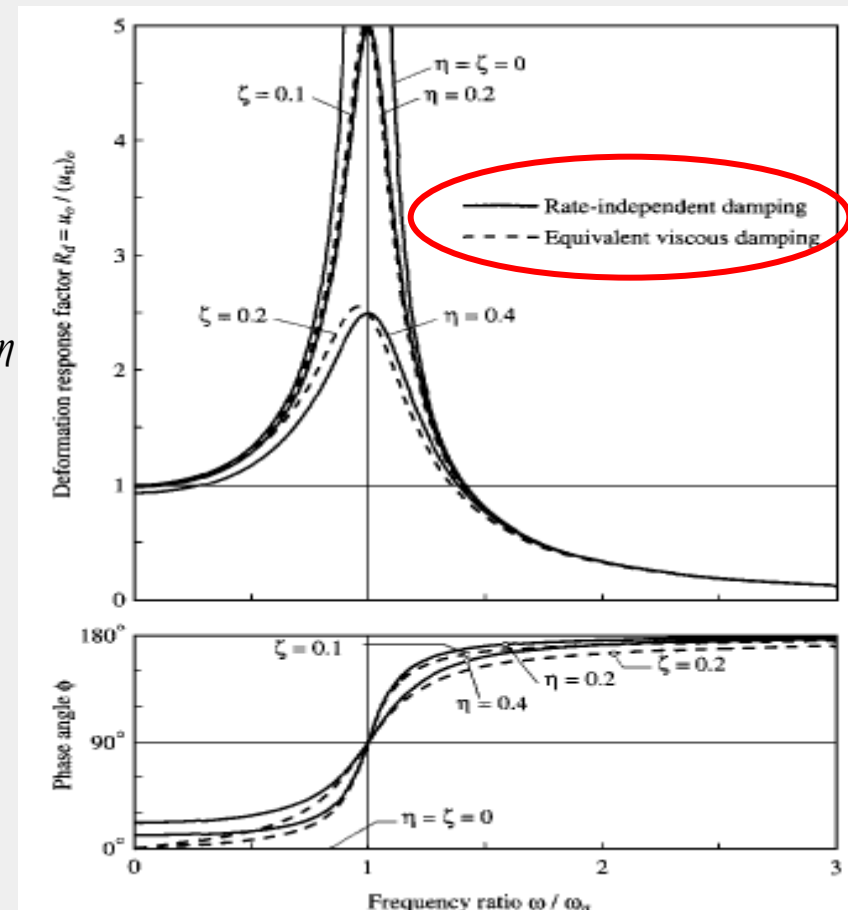
9. Παράγων Απόκρισης Παραμόρφωσης και Γωνία Φάσης

Λύση συστήματος με Μη Ιξώδη Απόσβεση και χρήση Ισοδύναμης Ιξώδους Απόσβεσης.

Η εξίσωση των ενεργειών για $\omega = \omega_\eta$

$$\zeta_{eq} = \frac{\eta}{2}$$

Η προσεγγιστική λύση συμπίπτει με την ακριβή για $\omega = \omega_\eta$ και είναι αρκετά ακριβής για πολλές πρακτικές εφαρμογές μηχανικού.



Απόκριση σε Αρμονικές και Περιοδικές Διεγέρσεις

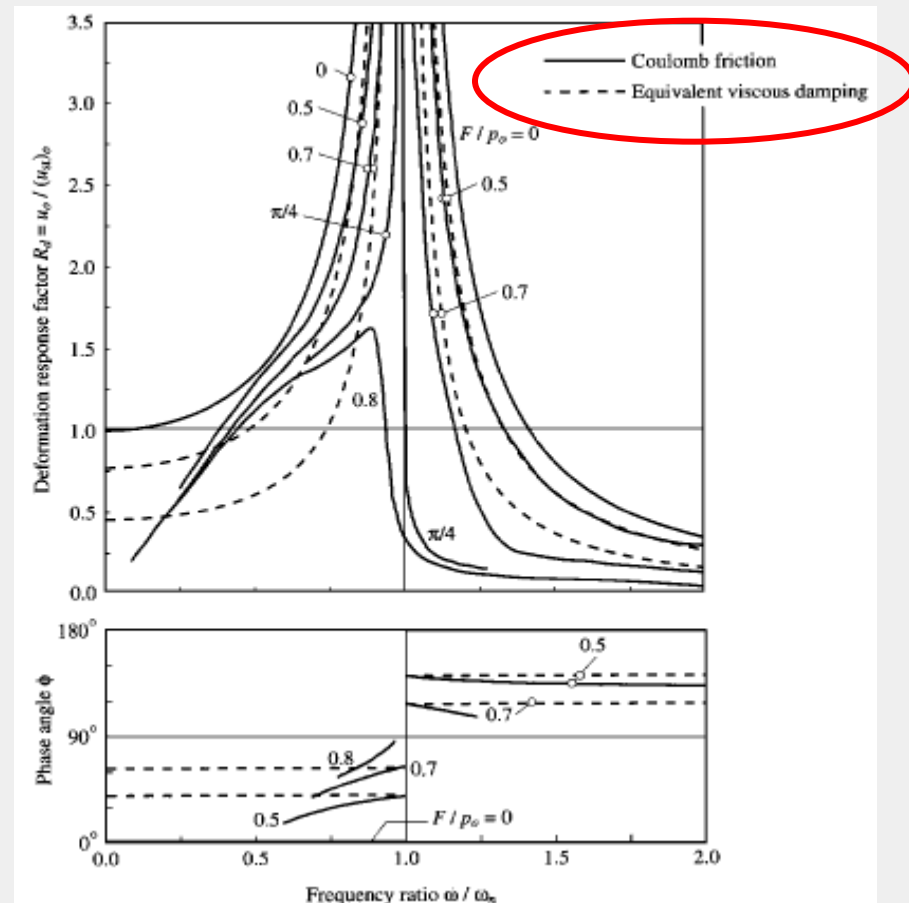
9. Παράγων Απόκρισης Παραμόρφωσης και Γωνία Φάσης

Λύση συστήματος με Τριβή
Coulomb και χρήση Ισοδύναμης
Ιξώδους Απόσβεσης.

Η εξίσωση των ενεργειών

$$\zeta_{eq} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\omega / \omega_n} \frac{u_F}{u_0} \quad u_F = F / k$$

Αν η δύναμη τριβής είναι αρκετά μικρή η λύση είναι πρακτικώς ημιτονοειδής. Αν η δύναμη τριβής είναι μεγάλη η λύση απέχει από το ημίτονο.

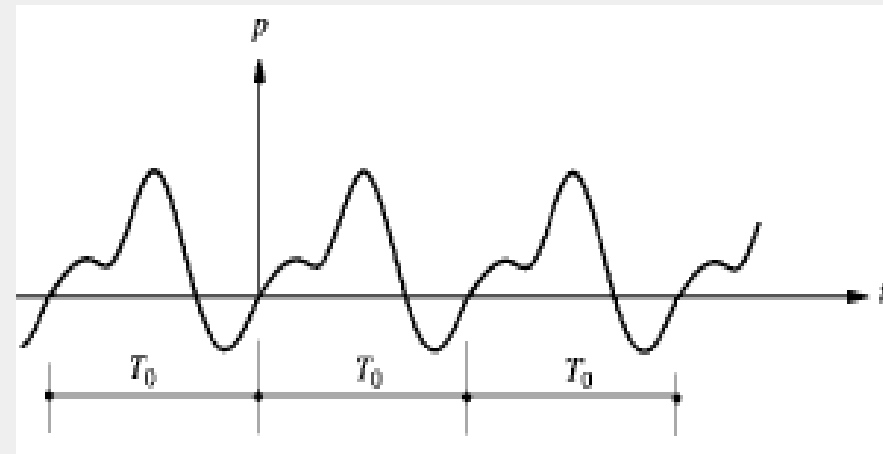


Απόκριση σε Αρμονικές και Περιοδικές Διεγέρσεις

10. Απόκριση σε Περιοδική Διέγερση

Μια συνάρτηση p καλείται περιοδική με περίοδο T_0 αν ικανοποιεί

$$p(t + jT_0) = p(t) \quad j = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty$$



Απόκριση σε Αρμονικές και Περιοδικές Διεγέρσεις

10. Απόκριση σε Περιοδική Διέγερση

Μια συνάρτηση p καλείται περιοδική με περίοδο T_0 αν ικανοποιεί

$$p(t + jT_0) = p(t) \quad j = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty$$

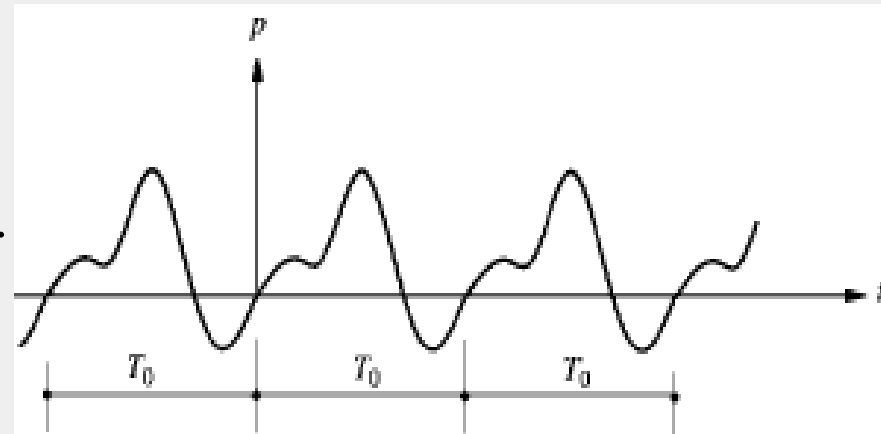
Μια περιοδική συνάρτηση μπορεί να διαχωριστεί στις αρμονικές της συνιστώσες με χρήση σειρών Fourier:

$$p(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(j\omega_0 t) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(j\omega_0 t) \quad \text{Θεμελιώδης αρμονική } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} p(t) dt$$

$$a_j = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} p(t) \cos(j\omega_0 t) dt \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

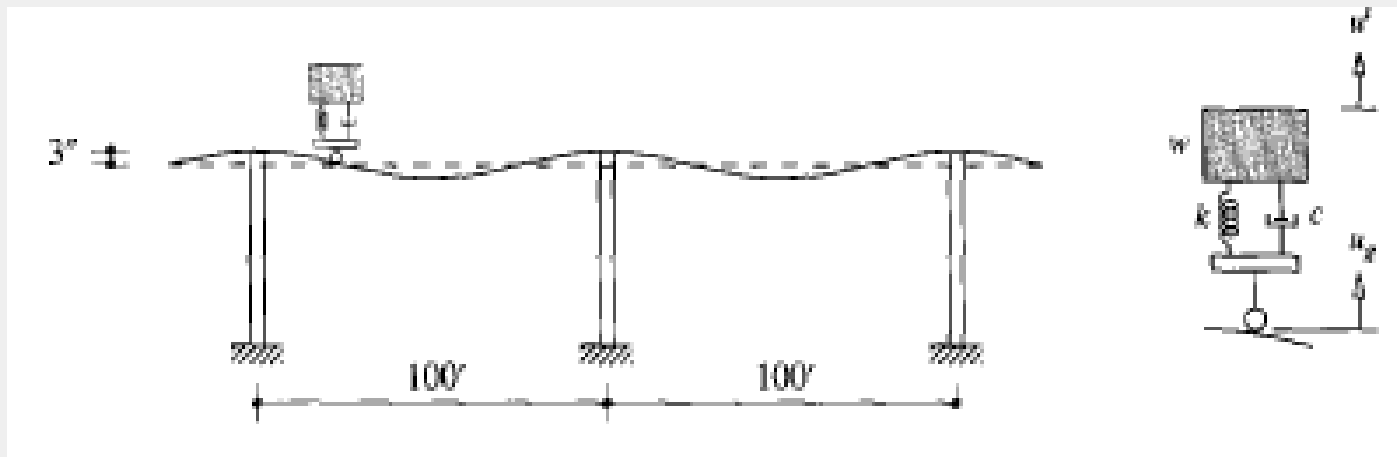
$$b_j = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} p(t) \sin(j\omega_0 t) dt \quad j = 1, 2, 3, \dots$$



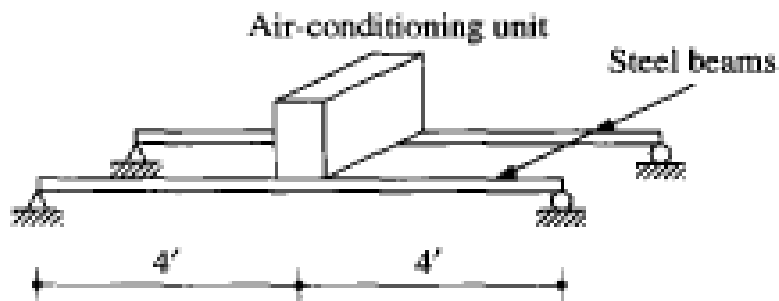
Απόκριση σε Αρμονικές και Περιοδικές Διεγέρσεις

11. Παραδείγματα – Προβλήματα

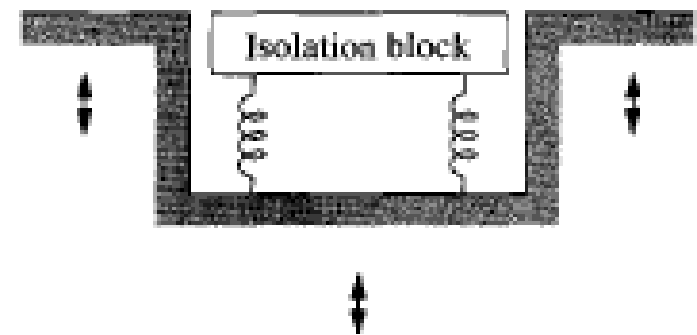
I.



II.



III.



Απόκριση σε Αυθαίρετες, Βαθμιδωτές και Παλμικές Διεγέρσεις

Απόκριση σε Αυθαίρετες, Βαθμιδωτές και Παλμικές Διεγέρσεις

1. Απόκριση σε Δυνάμεις Αυθαίρετα Μεταβαλλόμενες με το Χρόνο
 - i. Απόκριση σε μοναδιαία ωστική δύναμη (Unit Impulse)
 - ii. Απόκριση σε αυθαίρετη δύναμη

2. Απόκριση σε Βαθμιδωτές και Γραμμικώς Κλιμακούμενες Δυνάμεις
 - i. Βαθμιδωτή δύναμη
 - ii. Ομαλά κλιμακούμενη ή γραμμικά αυξανόμενη δύναμη
 - iii. Βαθμιδωτή δύναμη με πεπερασμένο χρόνο ανάπτυξης

3. Απόκριση σε Παλμικές Διεγέρσεις
 - i. Ορθογωνικός παλμός
 - ii. Παλμός μισού κύκλου ημιτόνου
 - iii. Συμμετρικός τριγωνικός παλμός

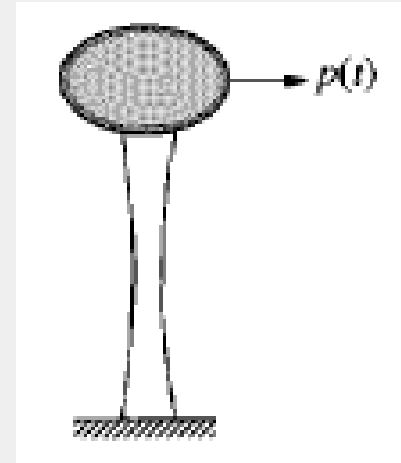
Απόκριση σε Αυθαίρετες, Βαθμιδωτές και Παλμικές Διεγέρσεις

1. Απόκριση σε Δυνάμεις Αυθαίρετα Μεταβαλλόμενες με το Χρόνο
Ψάχνουμε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης της κίνησης:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t)$$

με αρχικές συνθήκες:

$$u(0) = 0$$
$$\dot{u}(0) = 0$$



Αναπτύσσοντας τη γενική λύση, η δύναμη $p(t)$ αντιμετωπίζεται σαν μια ακολουθία ωθήσεων απειροελάχιστης διάρκειας και η απόκριση του συστήματος στη δύναμη $p(t)$ είναι το άθροισμα των επιμέρους αποκρίσεων του συστήματος σε ξεχωριστές ωθήσεις.

Απόκριση σε Αυθαίρετες, Βαθμιδωτές και Παλμικές Διεγέρσεις

1. Απόκριση σε Δυνάμεις Αυθαίρετα Μεταβαλλόμενες με το Χρόνο

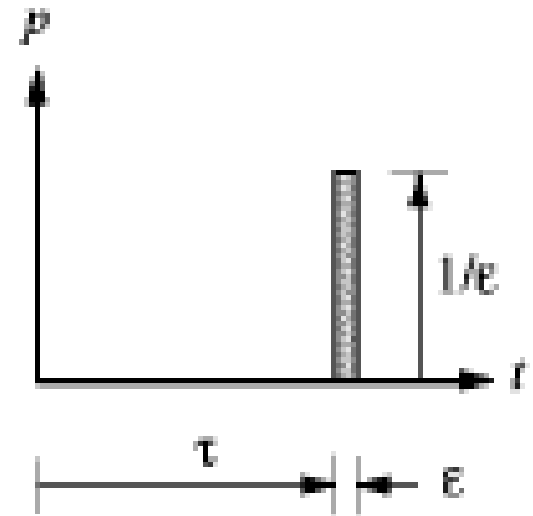
ι. Απόκριση σε μοναδιαία ωστική δύναμη (Unit Impulse)

Μια πολύ μεγάλη δύναμη που δρα για μικρό χρονικό διάστημα

Στην οριακή τιμή που $\varepsilon \rightarrow 0$ ονομάζεται μοναδιαία ωστική δύναμη

Η συνάρτηση Dirac ορίζει μαθηματικά τη μοναδιαία ώθηση

$$\text{Dirac: } \delta(t - \tau) \quad \text{με κέντρο } t = \tau$$



Απόκριση σε Αυθαίρετες, Βαθμιδωτές και Παλμικές Διεγέρσεις

1. Απόκριση σε Δυνάμεις Αυθαίρετα Μεταβαλλόμενες με το Χρόνο

ι. Απόκριση σε μοναδιαία ωστική δύναμη (Unit Impulse)

Μια πολύ μεγάλη δύναμη που δρα για μικρό χρονικό διάστημα

Στην οριακή τιμή που $\varepsilon \rightarrow 0$ ονομάζεται μοναδιαία ωστική δύναμη

Η συνάρτηση Dirac ορίζει μαθηματικά τη μοναδιαία ώθηση

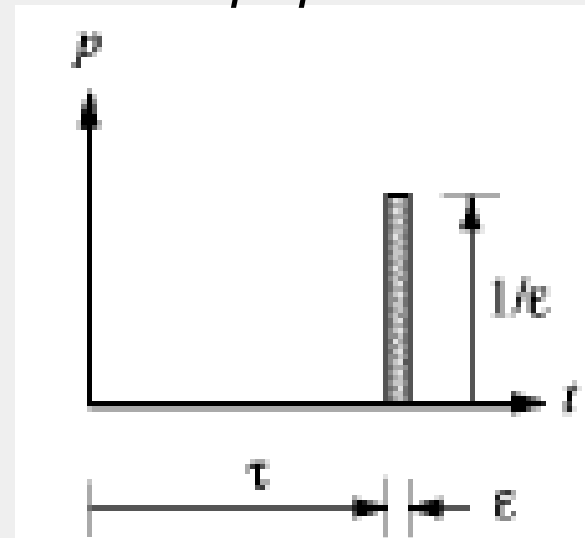
$$\text{Dirac: } \delta(t - \tau) \quad \text{με κέντρο } t = \tau$$

Δεύτερος νόμος κίνησης Νεύτωνα:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{u}) = p$$

Για σταθερή μάζα:

$$p = m\ddot{u}$$



Απόκριση σε Αυθαίρετες, Βαθμιδωτές και Παλμικές Διεγέρσεις

1. Απόκριση σε Δυνάμεις Αυθαίρετα Μεταβαλλόμενες με το Χρόνο

ι. Απόκριση σε μοναδιαία ωστική δύναμη (Unit Impulse)

Ολοκληρώνοντας και τα 2 μέλη της εξίσωσης ως προς τον χρόνο

Μέγεθος ώθησης $\int_{t_1}^{t_2} p dt = m(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) = m\Delta\dot{u}$ Μεταβολή ορμής

Απόκριση σε Αυθαίρετες, Βαθμιδωτές και Παλμικές Διεγέρσεις

1. Απόκριση σε Δυνάμεις Αυθαίρετα Μεταβαλλόμενες με το Χρόνο

ι. Απόκριση σε μοναδιαία ωστική δύναμη (Unit Impulse)

Ολοκληρώνοντας και τα 2 μέλη της εξίσωσης ως προς τον χρόνο

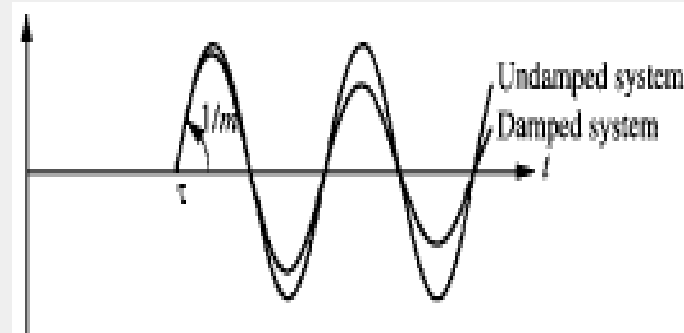
Μέγεθος ώθησης $\int_{t_1}^{t_2} p dt = m(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) = m\Delta\dot{u}$ Μεταβολή ορμής

Η μοναδιαία ώθηση προκαλεί ελεύθερη ταλάντωση εξαιτίας της αρχικής ταχύτητας και μετατόπισης.

Η απόκριση του συστήματος:

$$(t = \tau \rightarrow \dot{u}(\tau) = 1/m, u(\tau) = 0)$$

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_D} e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)] \quad t \geq \tau$$



Απόκριση σε Αυθαίρετες, Βαθμιδωτές και Παλμικές Διεγέρσεις

1. Απόκριση σε Δυνάμεις Αυθαίρετα Μεταβαλλόμενες με το Χρόνο

ι. Απόκριση σε μοναδιαία ωστική δύναμη (Unit Impulse)

Ολοκληρώνοντας και τα 2 μέλη της εξίσωσης ως προς τον χρόνο

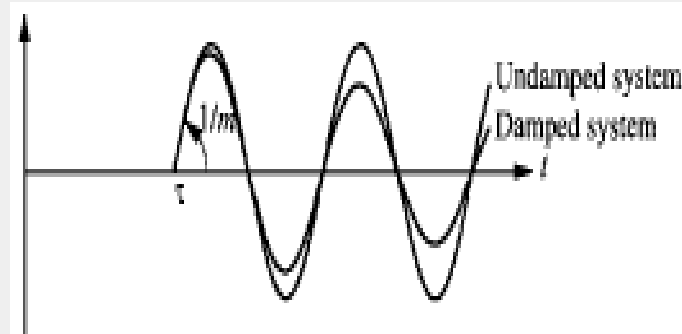
Μέγεθος ώθησης $\int_{t_1}^{t_2} p dt = m(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) = m\Delta\dot{u}$ Μεταβολή ορμής

Η μοναδιαία ώθηση προκαλεί ελεύθερη ταλάντωση εξαιτίας της αρχικής ταχύτητας και μετατόπισης.

Η απόκριση του συστήματος:

Χωρίς απόσβεση:

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_D} \sin[\omega_n(t - \tau)] \quad t \geq \tau$$



Απόκριση σε Αυθαίρετες, Βαθμιδωτές και Παλμικές Διεγέρσεις

1. Απόκριση σε Δυνάμεις Αυθαίρετα Μεταβαλλόμενες με το Χρόνο

ii. Απόκριση σε αυθαίρετη δύναμη

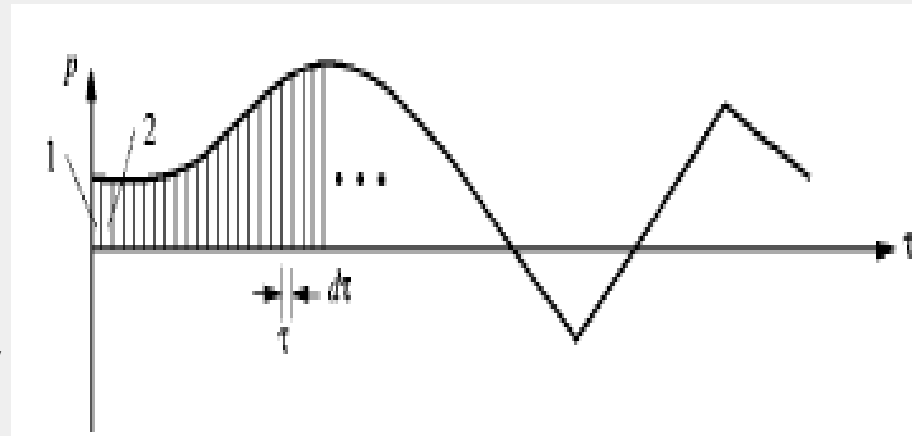
Μια αυθαίρετα μεταβαλλόμενη δύναμη μπορεί αν αντιπροσωπευθεί από μια σειρά απειροελάχιστων μικρών ωθήσεων.

Η απόκριση του συστήματος τη χρονική στιγμή t είναι το άθροισμα των αποκρίσεων σε όλες τις ωθήσεις μέχρι εκείνο το χρόνο.

$$u(t) = \int_0^t p(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

Η απόκριση του συστήματος:

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)] d\tau$$



Απόκριση σε Αυθαίρετες, Βαθμιδωτές και Παλμικές Διεγέρσεις

2. Απόκριση σε Βαθμιδωτές και Γραμμικώς Κλιμακούμενες Δυνάμεις

1. Βαθμιδωτή δύναμη

Μια βαθμιδωτή δύναμη αυξάνει απότομα από μηδενική τιμή στην τιμή p_0

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0$$

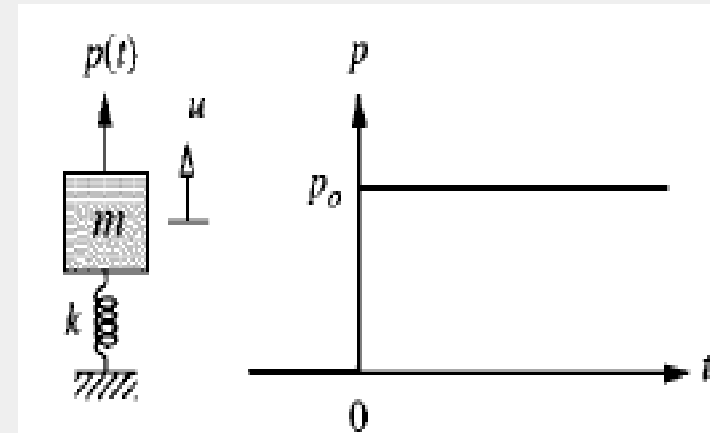
$$p(t) = p_0$$

Η απόκριση του συστήματος με / χωρίς απόσβεση.

$$u(t) = (u_{st})_0 \left[1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_D t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_D t \right) \right]$$

$$u(t) = (u_{st})_0 (1 - \cos \omega_n t)$$

$$\text{Η μέγιστη τιμή της } u(t): u_0 = 2(u_{st})_0 = 2p_0 / k$$



Απόκριση σε Αυθαίρετες, Βαθμιδωτές και Παλμικές Διεγέρσεις

2. Απόκριση σε Βαθμιδωτές και Γραμμικώς Κλιμακούμενες Δυνάμεις

ii. Ομαλά κλιμακούμενη ή γραμμικά αυξανόμενη δύναμη

Με χρήση του ολοκληρώματος *Duhamel* η λύση της διαφορικής εξίσωσης χωρίς απόσβεση:

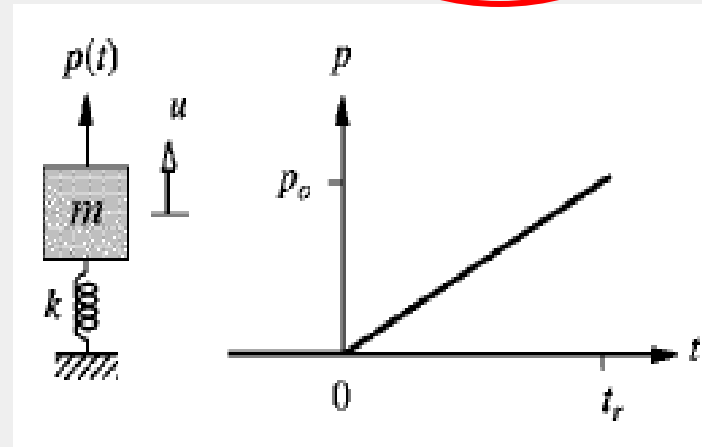
$$u(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t p_0 \frac{\tau}{t_r} \sin \omega_D (t - \tau) d\tau \quad \Rightarrow$$

$$u(t) = (u_{st})_0 \left(\frac{t}{T_n} \frac{T_n}{t_r} - \frac{\sin 2\pi t / T_n}{2\pi t_r / T_n} \right)$$

Η στατική μετατόπιση σε κάθε χρονική στιγμή

$$u_{st}(t) = \frac{p(t)}{k} = (u_{st})_0 \frac{t}{t_r}$$

$$p(t) = p_0 \frac{t}{t_r}$$



Απόκριση σε Αυθαίρετες, Βαθμιδωτές και Παλμικές Διεγέρσεις

2. Απόκριση σε Βαθμιδωτές και Γραμμικώς Κλιμακούμενες Δυνάμεις

iii. Βαθμιδωτή δύναμη με πεπερασμένο χρόνο ανάπτυξης

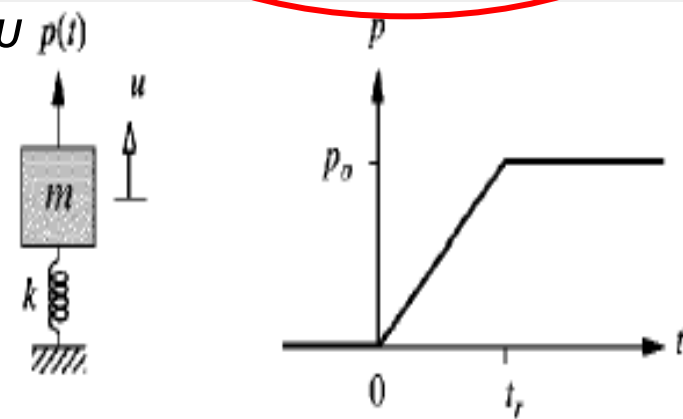
Για $t < t_r$, η λύση είναι γνώστη από (ii.)

$$u(t) = (u_{st})_0 \left(\frac{t}{t_r} - \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n t} \right)$$

$$p(t) = \begin{cases} p_0 (t/t_r) & t \leq t_r \\ p_0 & t \geq t_r \end{cases}$$

Για $t > t_r$, η απόκριση προσδιορίζεται με χρήση του ολοκληρώματος *Duhamel*

$$u(t) = (u_{st})_0 \left(1 - \frac{1}{\omega_n t_r} \left[\sin \omega_n t - \sin \omega_n (t - t_r) \right] \right)$$



Απόκριση σε Αυθαίρετες, Βαθμιδωτές και Παλμικές Διεγέρσεις

2. Απόκριση σε Βαθμιδωτές και Γραμμικώς Κλιμακούμενες Δυνάμεις

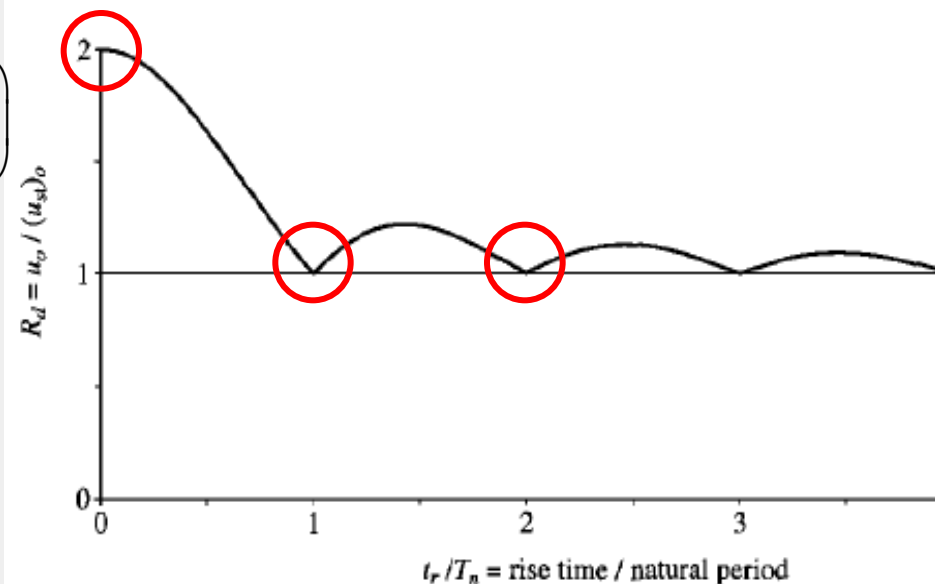
iii. Βαθμιδωτή δύναμη με πεπερασμένο χρόνο ανάπτυξης

Η $u(t)$ αποκτά τη μέγιστη τιμή της κατά τη διάρκεια της φάσης απόκρισης όπου η δύναμη παραμένει σταθερή :

$$u_0 = (u_{st})_0 \left(1 + \frac{1}{\omega_n t_r} \sqrt{(1 - \cos \omega_n t_r)^2 + (\sin \omega_n t_r)^2} \right)$$

Παράγων απόκρισης παραμόρφωσης

$$R_d = \frac{u_0}{(u_{st})_0} = 1 + \frac{|\sin(\pi t_r / T_r)|}{\pi t_r / T_r}$$



Απόκριση σε Αυθαίρετες, Βαθμιδωτές και Παλμικές Διεγέρσεις

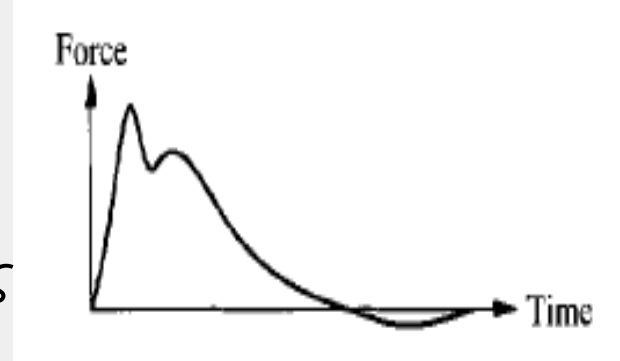
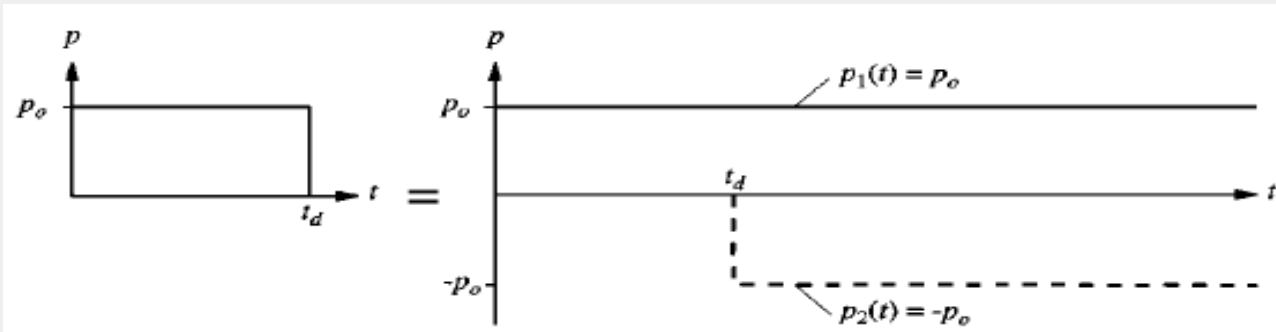
3. Απόκριση σε Παλμικές Διεγέρσεις

Μέθοδοι επίλυσης:

- i) Κλασική μέθοδος επίλυσης διαφορικής εξίσωσης
- ii) Υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα *Duhamel*
- iii) Εκφράζοντας τον παλμό ως επαλληλία δυο απλούστερων συναρτήσεων για τις οποίες η λύση είναι ήδη διαθέσιμη.

Για παράδειγμα ο παλμός ορθογωνικής μορφής είναι μια βηματική συνάρτηση $p_1(t)$ συν τη βηματική συνάρτηση $p_2(t)$ ίσου εύρους αλλά με χρονική διαφορά t_d

Η απόκριση είναι το άθροισμα των αποκρίσεων των δυο βηματικών συναρτήσεων.

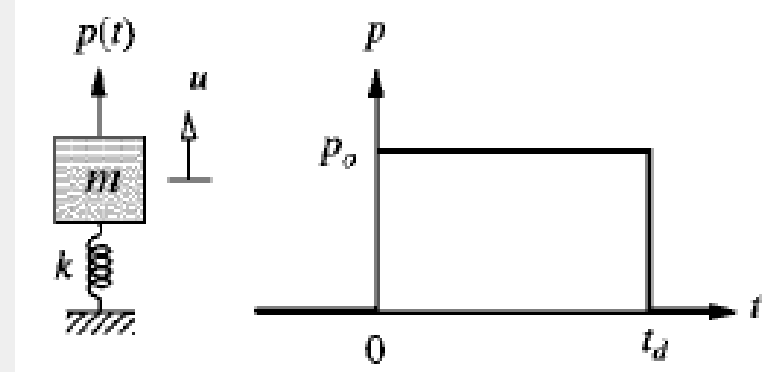


Απόκριση σε Αυθαίρετες, Βαθμιδωτές και Παλμικές Διεγέρσεις

3. Απόκριση σε Παλμικές Διεγέρσεις

ι. Ορθογωνικός παλμός

$$m\ddot{u} + ku = \begin{cases} p_0 & t \leq t_d \\ 0 & t \geq t_d \end{cases} \quad \begin{aligned} u(0) &= 0 \\ \dot{u}(0) &= 0 \end{aligned}$$



α. Φάση εξαναγκασμένης ταλάντωσης (Βαθμιδωτή δύναμη)

$$\frac{u(t)}{(u_{st})_0} = 1 - \cos \omega_n t = 1 - \cos \frac{2\pi t}{T_n} \quad t \leq t_d$$

β. Φάση ελεύθερης ταλάντωσης

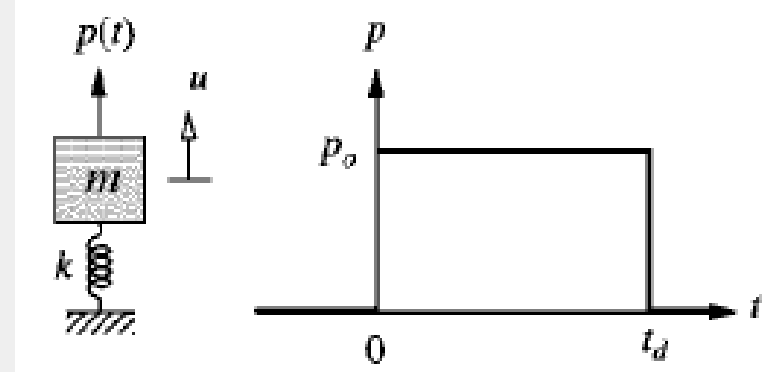
$$u(t) = u(t_d) \cos \omega_n (t - t_d) + \frac{\dot{u}(t_d)}{\omega_n} \sin \omega_n (t - t_d)$$

Απόκριση σε Αυθαίρετες, Βαθμιδωτές και Παλμικές Διεγέρσεις

3. Απόκριση σε Παλμικές Διεγέρσεις

1. Ορθογωνικός παλμός

$$m\ddot{u} + ku = \begin{cases} p_0 & t \leq t_d \\ 0 & t \geq t_d \end{cases} \quad \begin{cases} u(0) = 0 \\ \dot{u}(0) = 0 \end{cases}$$



α. Φάση εξαναγκασμένης ταλάντωσης (Βαθμιδωτή δύναμη)

$$\frac{u(t)}{(u_{st})_0} = 1 - \cos \omega_n t = 1 - \cos \frac{2\pi t}{T_n} \quad t \leq t_d$$

β. Φάση ελεύθερης ταλάντωσης

$$u(t) = u(t_d) \cos \omega_n (t - t_d) + \frac{\dot{u}(t_d)}{\omega_n} \sin \omega_n (t - t_d) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Αρχικές συνθήκες } t = t_d \\ u(t_d) = (u_{st})_0 [1 - \cos \omega_n t_d] \\ \dot{u}(t_d) = (u_{st})_0 \omega_n \sin \omega_n t_d \end{array} \right.$$

Απόκριση σε Αυθαίρετες, Βαθμιδωτές και Παλμικές Διεγέρσεις

3. Απόκριση σε Παλμικές Διεγέρσεις

1. Ορθογωνικός παλμός

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω

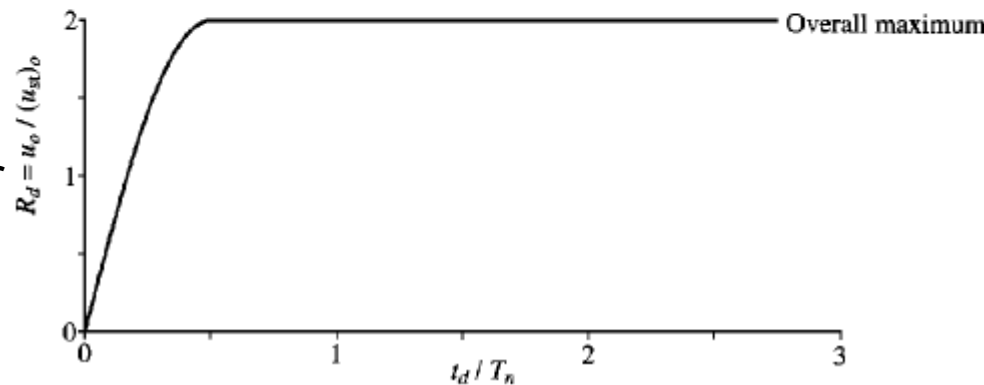
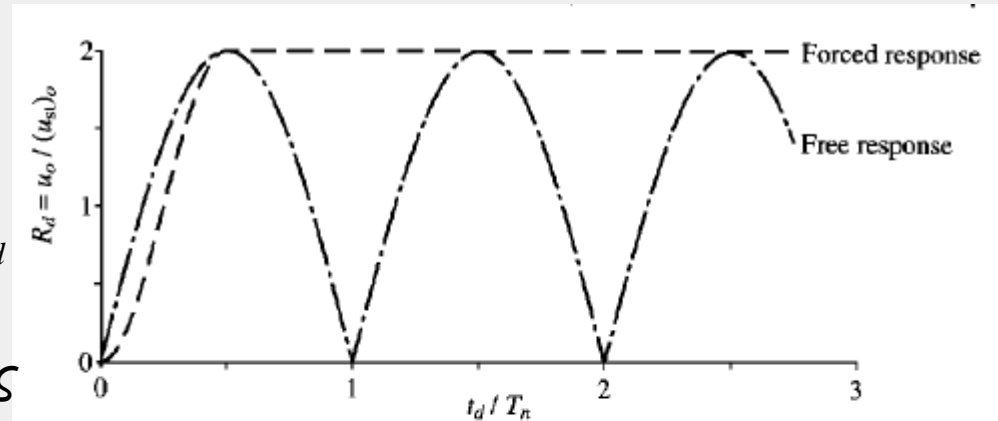
$$\frac{u(t)}{(u_{st})_0} = \cos \omega_n (t - t_d) - \cos \omega_n t \quad t \geq t_d$$

Μέγιστη μετατόπιση κατά την διάρκεια της φάσης της εξαναγκασμένης ταλάντωσης

$$R_d = \frac{u_0}{(u_{st})_0} = \begin{cases} 1 - \cos(2\pi t_d / T_n) & t_d / T_n \leq 1/2 \\ 2 & t_d / T_n \geq 1/2 \end{cases}$$

Μέγιστη μετατόπιση κατά την διάρκεια της φάσης της ελεύθερης ταλάντωσης

$$R_d = \frac{u_0}{(u_{st})_0} = 2 \left| \sin \frac{\pi t_d}{T_n} \right|$$

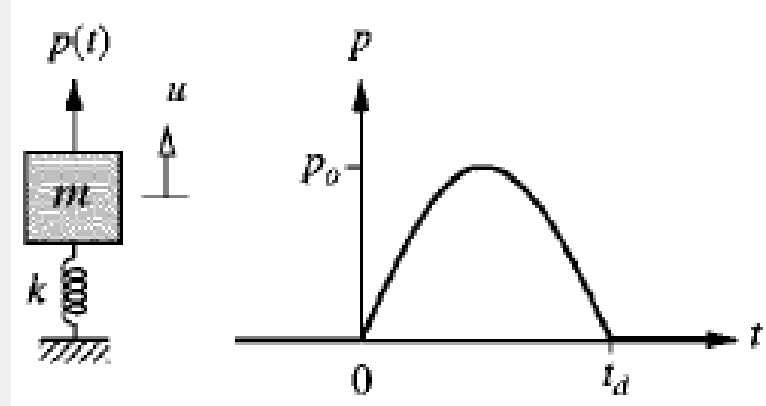


Απόκριση σε Αυθαίρετες, Βαθμιδωτές και Παλμικές Διεγέρσεις

3. Απόκριση σε Παλμικές Διεγέρσεις

ii. Παλμός μισού κύκλου ημιτόνου

$$m\ddot{u} + ku = \begin{cases} p_0 \sin(\pi t / t_d) & t \leq t_d \\ 0 & t \geq t_d \end{cases} \quad \begin{aligned} u(0) &= 0 \\ \dot{u}(0) &= 0 \end{aligned}$$



Η λύση παρουσιάζεται για $\omega \neq \omega_n \Rightarrow t_d / T_d \neq 1/2$ και $\omega = \omega_n \Rightarrow t_d / T_d = 1/2$

Περίπτωση 1^η : $\omega \neq \omega_n \Rightarrow t_d / T_d \neq 1/2$

Περίπτωση 2^η : $\omega = \omega_n \Rightarrow t_d / T_d = 1/2$

Η ανάλυση οργανώνεται σε:

- εξαναγκασμένη ταλάντωση
- ελεύθερη ταλάντωση

Απόκριση σε Αυθαίρετες, Βαθμιδωτές και Παλμικές Διεγέρσεις

3. Απόκριση σε Παλμικές Διεγέρσεις ii. Παλμός μισού κύκλου ημιτόνου

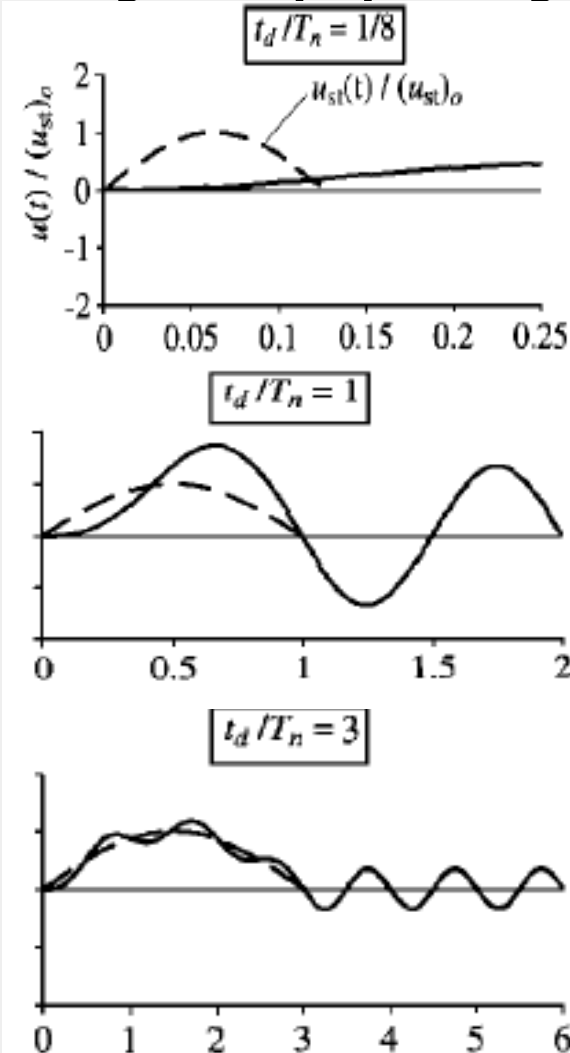
Περίπτωση 1^η : $\omega \neq \omega_n \Rightarrow t_d / T_n \neq 1/2$

α. Φάση εξαναγκασμένης ταλάντωσης

$$\frac{u(t)}{(u_{st})_0} = \frac{1}{1 - (T_n / 2t_d)^2} \left[\sin\left(\pi \frac{t}{t_d}\right) - \frac{T_n}{2t_d} \sin\left(2\pi \frac{t}{T_n}\right) \right] \quad t \leq t_d$$

β. Φάση ελεύθερης ταλάντωσης

$$\frac{u(t)}{(u_{st})_0} = \frac{(T_n / t_d) \cos(\pi t_d / T_n)}{(T_n / 2t_d)^2 - 1} \sin\left[2\pi \left(\frac{t}{T_n} - \frac{1}{2} \frac{t_d}{T_n}\right)\right] \quad t \geq t_d$$



Απόκριση σε Αυθαίρετες, Βαθμιδωτές και Παλμικές Διεγέρσεις

3. Απόκριση σε Παλμικές Διεγέρσεις ii. Παλμός μισού κύκλου ημιτόνου

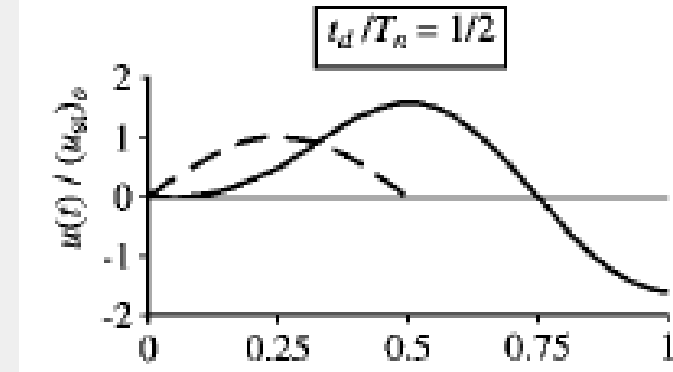
Περίπτωση 2^η : $\omega = \omega_n \Rightarrow t_d / T_n = 1/2$

α. Φάση εξαναγκασμένης ταλάντωσης

$$\frac{u(t)}{(u_{st})_0} = \frac{1}{2} \left[\sin\left(\frac{2\pi t}{T_n}\right) - \frac{2\pi t}{T_n} \cos\frac{2\pi t}{T_n} \right] \quad t \leq t_d$$

β. Φάση ελεύθερης ταλάντωσης

$$\frac{u(t_d)}{(u_{st})_0} = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{u}(t_d) = 0 \quad t = t_d \quad \Rightarrow \quad \frac{u(t)}{(u_{st})_0} = \frac{\pi}{2} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T_n} - \frac{1}{2} \right) \quad t \geq t_d$$



Απόκριση σε Αυθαίρετες, Βαθμιδωτές και Παλμικές Διεγέρσεις

3. Απόκριση σε Παλμικές Διεγέρσεις ii. Παλμός μισού κύκλου ημιτόνου

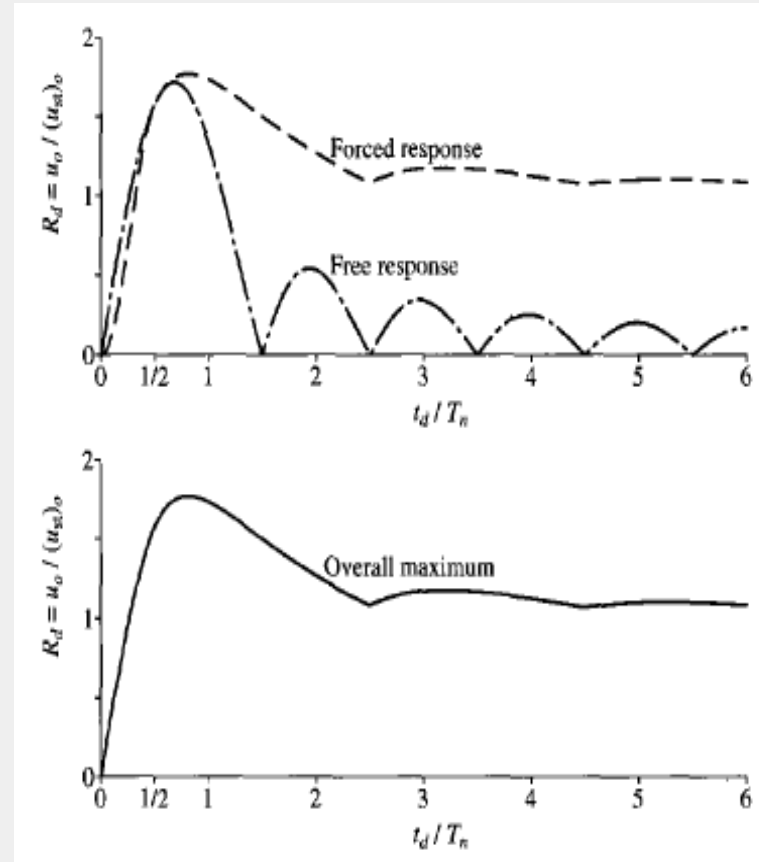
Μέγιστη μετατόπιση κατά την διάρκεια της φάσης της εξαναγκασμένης ταλάντωσης

$$R_d = \frac{u_0}{(u_{st})_0} = \frac{1}{1 - (T_n / 2t_d)^2} \left(\sin \frac{2\pi t}{1 + 2t_d / T_n} - \frac{T_n}{2t_d} \sin \frac{2\pi t}{1 + T_n / 2t_d} \right)$$

Μέγιστη μετατόπιση κατά την διάρκεια της φάσης της ελεύθερης ταλάντωσης

$$R_d = \frac{u_0}{(u_{st})_0} = \frac{(T_n / t_d) \cos(\pi t_d / T_n)}{(T_n / 2t_d)^2 - 1}$$

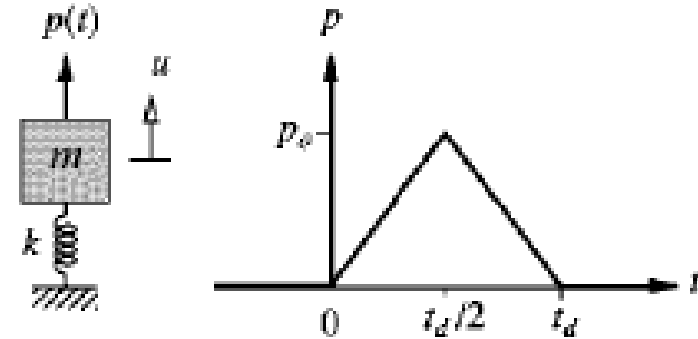
Μέγιστη μετατόπιση όταν $t_d / T_d = 1/2 \Rightarrow R_d = \frac{u_0}{(u_{st})_0} = \frac{\pi}{2}$



Απόκριση σε Αυθαίρετες, Βαθμιδωτές και Παλμικές Διεγέρσεις

3. Απόκριση σε Παλμικές Διεγέρσεις iii. Συμμετρικός τριγωνικός παλμός

$$m\ddot{u} + ku = p(t) \quad \begin{aligned} u(0) &= 0 \\ \dot{u}(0) &= 0 \end{aligned}$$



Η ανάλυση οργανώνεται σε τρεις διαφορετικές φάσεις:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq t \leq t_d / 2 \\ t_d / 2 \leq t \leq t_d \\ t_d \leq t \end{array} \right.$$

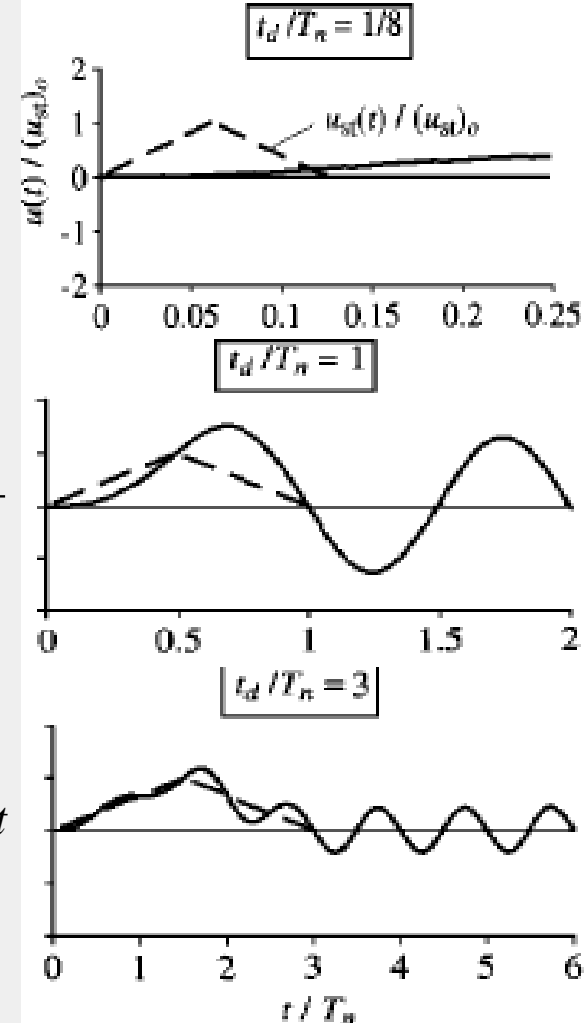
Ο τρόπος για να λυθεί το πρόβλημα είναι να εκφραστεί ο τριγωνικός παλμός ως επαλληλία τριών γραμμικώς αυξανόμενων συναρτήσεων και η απόκριση του συστήματος είναι το άθροισμα των αποκρίσεων των γραμμικών συναρτήσεων.

Απόκριση σε Αυθαίρετες, Βαθμιδωτές και Παλμικές Διεγέρσεις

3. Απόκριση σε Παλμικές Διεγέρσεις iii. Συμμετρικός τριγωνικός παλμός

Το τελικό αποτέλεσμα είναι:

$$\frac{u(t)}{(u_{st})_0} = \begin{cases} 2 \left(\frac{t}{t_d} - \frac{T_n}{2\pi t_d} \sin \frac{2\pi t}{T_n} \right) & 0 \leq t \leq \frac{t_d}{2} \\ 2 \left\{ 1 - \frac{t}{t_d} + \frac{T_n}{2\pi t_d} \left[2 \sin \frac{2\pi}{T_n} \left(t - \frac{t_d}{2} \right) - \sin \frac{2\pi t}{T_n} \right] \right\} & \frac{t_d}{2} \leq t \leq t_d \\ 2 \left\{ \frac{T_n}{2\pi t_d} \left[2 \sin \frac{2\pi}{T_n} \left(t - \frac{t_d}{2} \right) - \sin \frac{2\pi}{T_n} (t - t_d) - \sin \frac{2\pi t}{T_n} \right] \right\} & t_d \leq t \end{cases}$$



Απόκριση σε Αυθαίρετες, Βαθμιδωτές και Παλμικές Διεγέρσεις

3. Απόκριση σε Παλμικές Διεγέρσεις

Αν η διάρκεια του παλμού είναι t_d είναι μεγαλύτερη από $T_n/2$ το ολικό μέγιστο της μετατόπισης εμφανίζεται κατά την διάρκεια του παλμού (εξαναγκασμένη ταλάντωση), αλλιώς κατά την φάση της ελεύθερης ταλάντωσης και επηρεάζεται από το ολοκλήρωμα του παλμού.

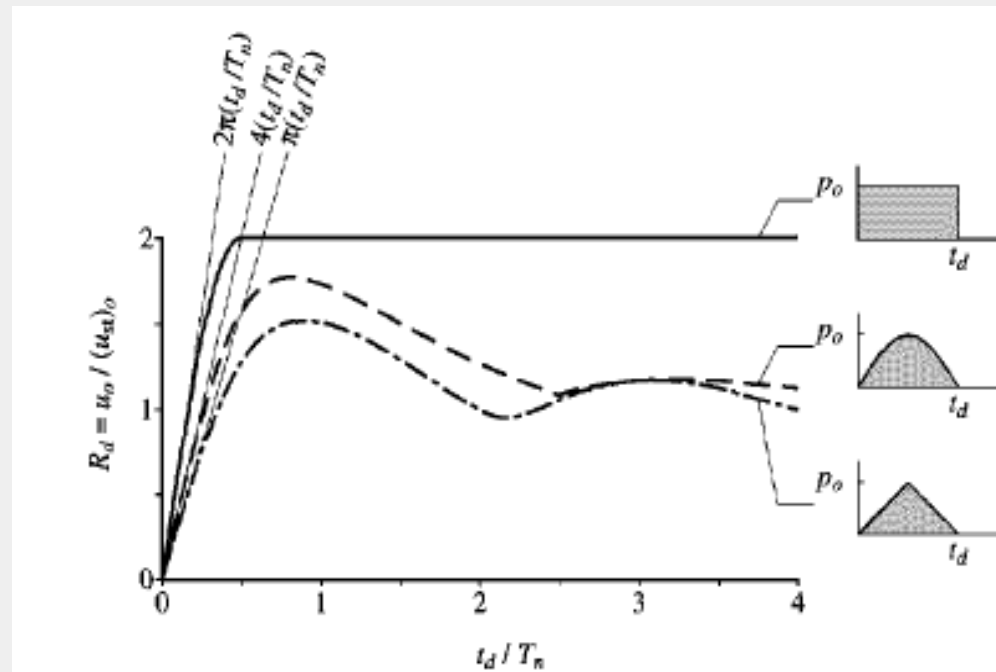
$$I = \int_0^{t_d} p(t) dt$$

Εάν t_d/T_n τείνει στο 0 δημιουργείται ωστική δύναμη και η απόκριση είναι:

$$u(t) = I \left(\frac{1}{m\omega_n} \sin \omega_n t \right)$$

Μέγιστο της απόκρισης:

$$u_0 = \frac{I}{k} \frac{2\pi}{T_n}$$



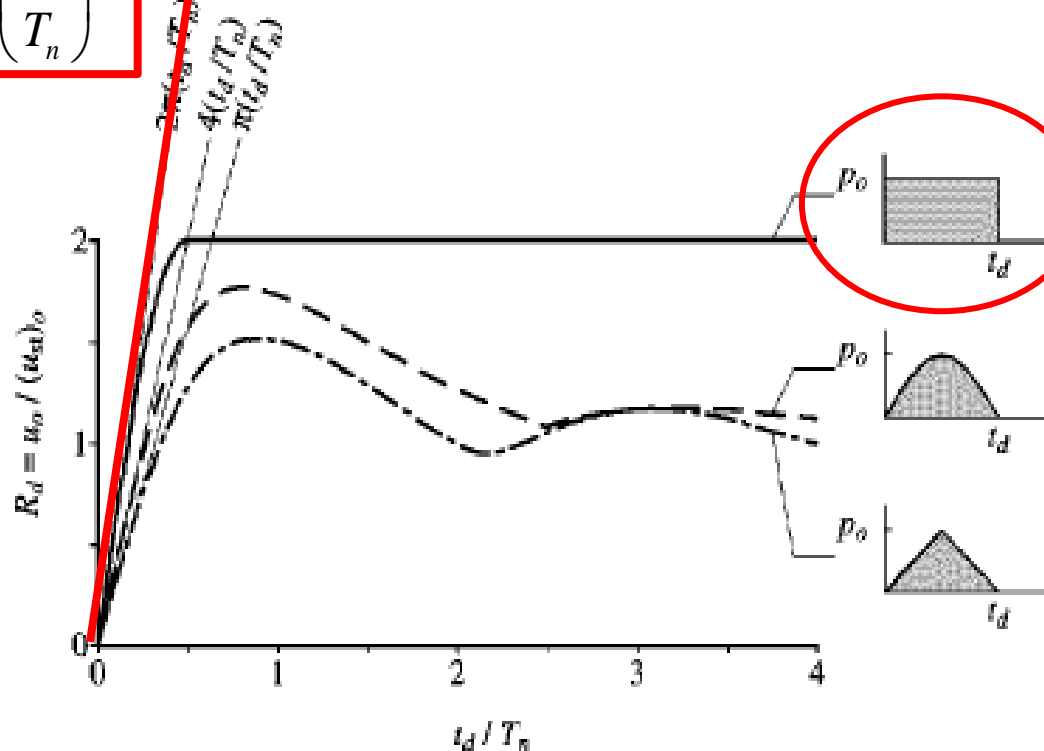
Απόκριση σε Αυθαίρετες, Βαθμιδωτές και Παλμικές Διεγέρσεις

3. Απόκριση σε Παλμικές Διεγέρσεις

1. Ορθογωνικός παλμός

$$I = p_0 t_d \rightarrow \frac{u_0}{(u_{st})_0} = 2\pi \left(\frac{t_d}{T_n} \right)$$

$$2\pi \left(\frac{t_d}{T_n} \right)$$



Απόκριση σε Αυθαίρετες, Βαθμιδωτές και Παλμικές Διεγέρσεις

3. Απόκριση σε Παλμικές Διεγέρσεις

ι. Ορθογωνικός παλμός

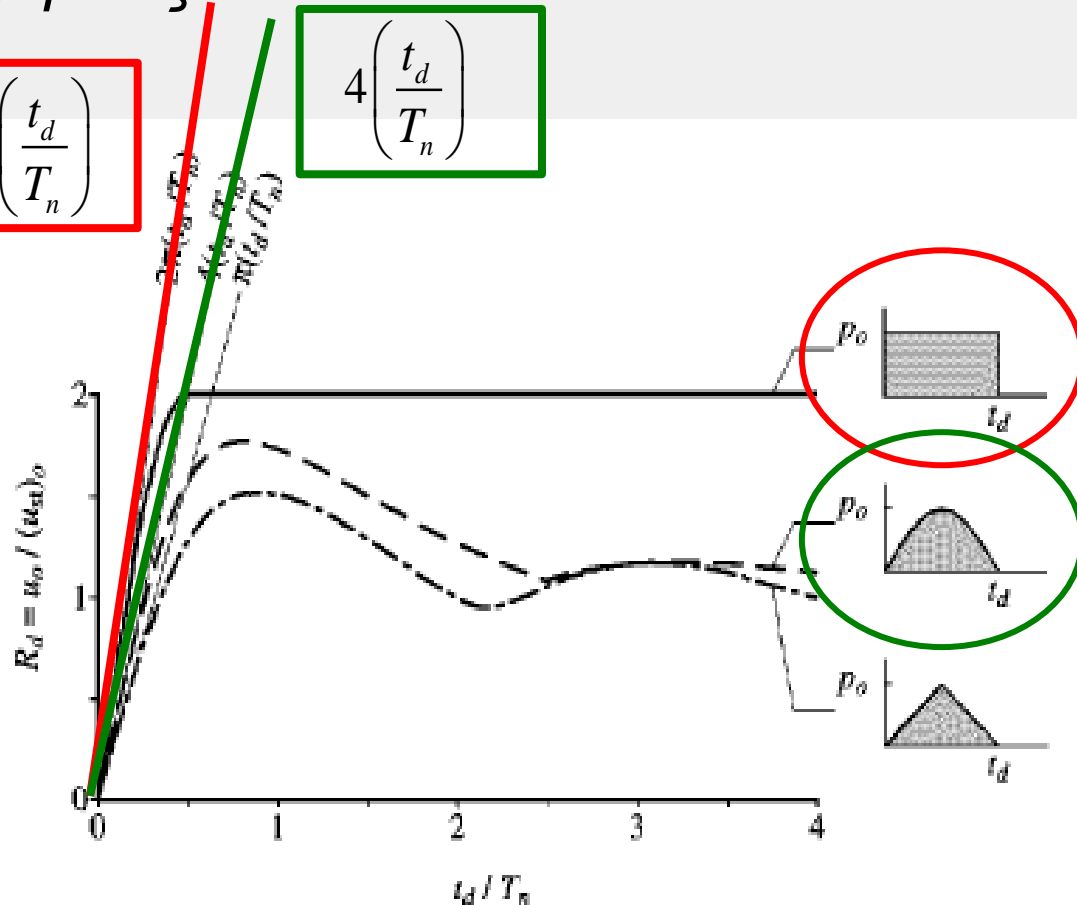
$$I = p_0 t_d \rightarrow \frac{u_0}{(u_{st})_0} = 2\pi \left(\frac{t_d}{T_n} \right)$$

$$2\pi \left(\frac{t_d}{T_n} \right)$$

$$4 \left(\frac{t_d}{T_n} \right)$$

ii. Παλμός μισού κύκλου ημιτόνου

$$I = (2/\pi) p_0 t_d \rightarrow \frac{u_0}{(u_{st})_0} = 4 \left(\frac{t_d}{T_n} \right)$$



Απόκριση σε Αυθαίρετες, Βαθμιδωτές και Παλμικές Διεγέρσεις

3. Απόκριση σε Παλμικές Διεγέρσεις

i. Ορθογωνικός παλμός

$$I = p_0 t_d \rightarrow \frac{u_0}{(u_{st})_0} = 2\pi \left(\frac{t_d}{T_n} \right)$$

$$2\pi \left(\frac{t_d}{T_n} \right)$$

ii. Παλμός μισού κύκλου ημιτόνου

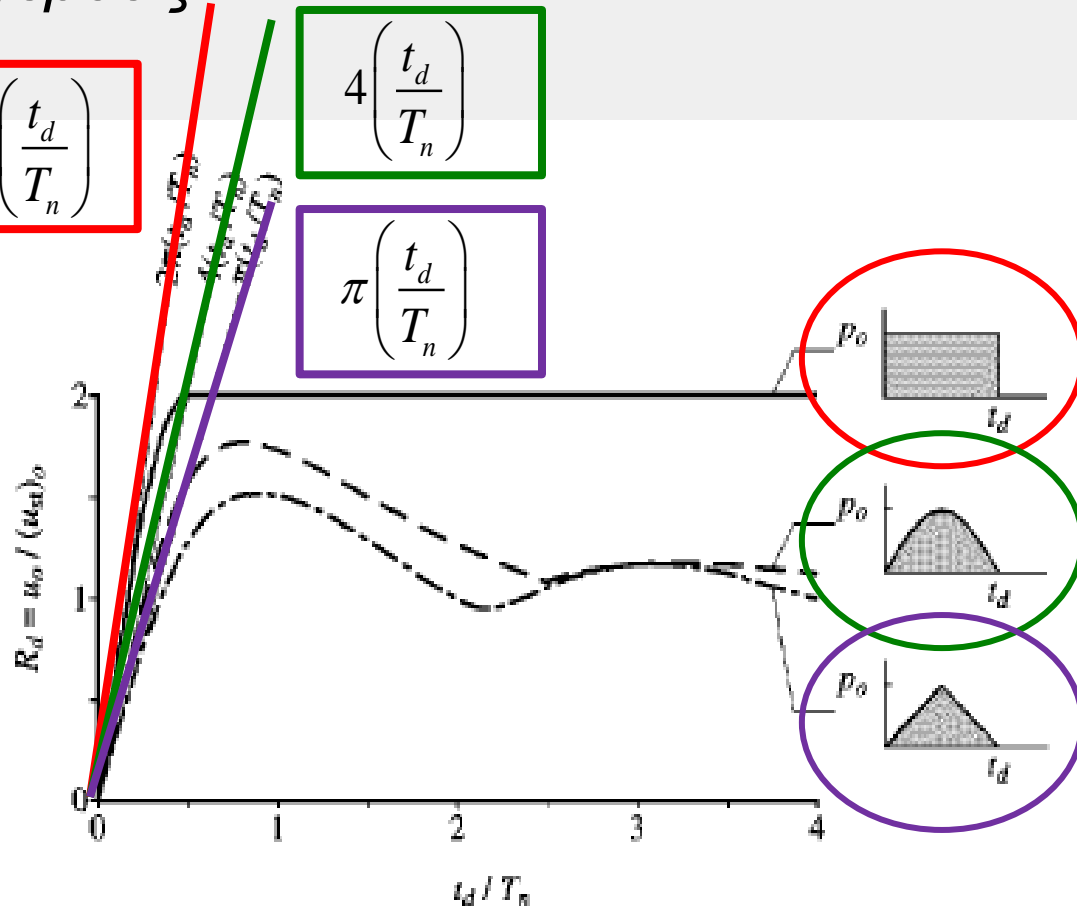
$$I = (2/\pi) p_0 t_d \rightarrow \frac{u_0}{(u_{st})_0} = 4 \left(\frac{t_d}{T_n} \right)$$

$$4 \left(\frac{t_d}{T_n} \right)$$

$$\pi \left(\frac{t_d}{T_n} \right)$$

iii. Συμμετρικός τριγωνικός παλμός

$$I = p_0 t_d / 2 \rightarrow \frac{u_0}{(u_{st})_0} = \pi \left(\frac{t_d}{T_n} \right)$$

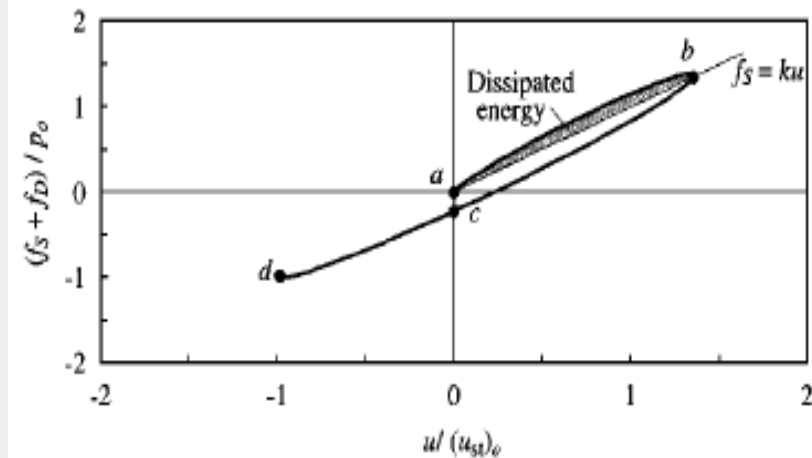
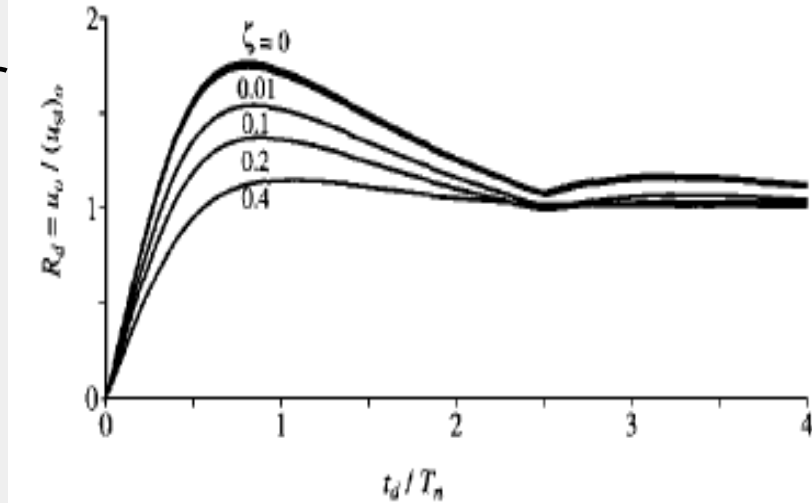


Απόκριση σε Αυθαίρετες, Βαθμιδωτές και Παλμικές Διεγέρσεις

4. Επίδραση της Ιξώδους Απόσβεσης

Αν η διέγερση είναι μοναδικός παλμός, η επίδραση της απόσβεσης στη μέγιστη απόκριση δεν είναι συνήθως σημαντική, εκτός αν το σύστημα έχει εξαιρετικά μεγάλη απόσβεση.

Ομοίως η ενέργεια που καταναλώνεται λόγω της απόσβεσης σε σύστημα που υποβάλλεται σε διεγέρσεις παλμικού τύπου είναι μικρή.



Απόκριση σε Αυθαίρετες, Βαθμιδωτές και Παλμικές Διεγέρσεις

5. Απόκριση σε Εδαφική Κίνηση

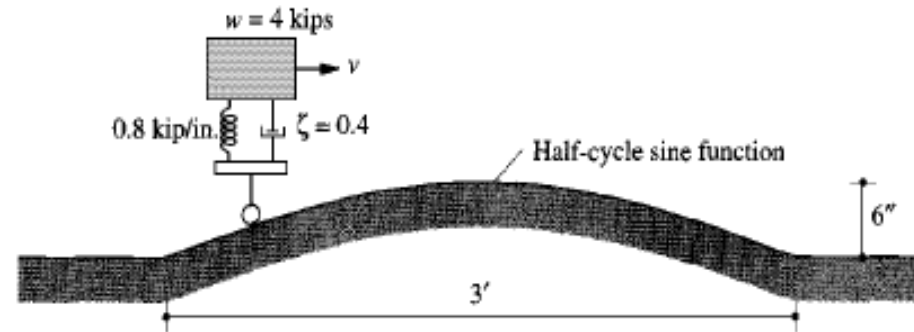
Η επιτάχυνση του εδάφους μπορεί αν αντικατασταθεί από την ενεργό δύναμη: $p_{eff}(t) = -m\ddot{u}_g(t)$

Το φάσμα απόκρισης για επιβαλλόμενη δύναμη $p(t)$ είναι ένα γράφημα του R_d ως προς τις κατάλληλες παραμέτρους (ω/ω_n ή t_d/T_n).

$$(u_{st})_0 = \frac{(p_{eff})_0}{k} = \frac{\ddot{u}_{g0}}{\omega_n^2} \quad \text{Όπου } \ddot{u}_{g0} \text{ είναι η μέγιστη τιμή του } \ddot{u}_g(t)$$

Για σύστημα χωρίς απόσβεση, η ολική επιτάχυνση της μάζας σχετίζεται με την μετατόπιση μέσω $\ddot{u}_0^t = (\omega_n)^2 u_0$ έτσι παίρνουμε:

$$R_d = \frac{u_0}{(u_{st})_0} = \frac{\omega_n^2 u_0}{\ddot{u}_{g0}} \quad \Rightarrow \quad R_d = \frac{\ddot{u}_0^t}{\ddot{u}_{g0}}$$



Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

1. Μέθοδοι Χρονικών Βημάτων
2. Μέθοδοι Βασισμένες σε Παρεμβολή της Διέγερσης
3. Μέθοδος Κεντρικής Διαφοράς
4. Μέθοδος Newmark
5. Ευστάθεια και Υπολογιστικά Σφάλματα
6. Ανάλυση Μη Γραμμικής Απόκρισης- Μέθοδος Newmark

Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

1. Μέθοδοι Χρονικών Βημάτων

Για ένα ανελαστικό σύστημα η εξίσωση κίνησης που πρέπει να επιλυθεί είναι:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + f_s(u, \dot{u}) = p(t) \quad \text{ή} \quad -m\ddot{u}_g(t)$$

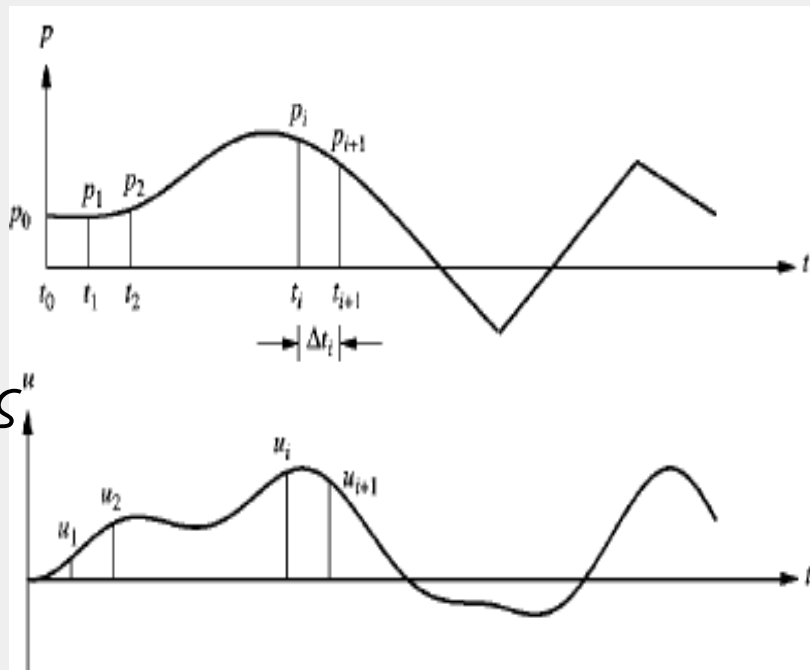
με αρχικές συνθήκες: $u(0) = u_0$ $\dot{u}(0) = \dot{u}_0$

Η εφαρμοζόμενη δύναμη δίνεται με ένα πλήθος διακριτών τιμών (N) $p_i = p(t_i)$

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i \quad i = 0, \dots, N$$

Η απόκριση προσδιορίζεται για τις χρονικές στιγμές (t_i)

$$m\ddot{u}_i + c\dot{u}_i + (f_s)_i = p_i$$



Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

1. Μέθοδοι Χρονικών Βημάτων

Το βήμα από το χρόνο i στο χρόνο $i+1$ δεν είναι μια ακριβής διαδικασία.

Οι τρεις σημαντικές προϋποθέσεις για μια αριθμητική διαδικασία είναι:

- i) Σύγκλιση
- ii) Ευστάθεια
- iii) Ακρίβεια

Είδη χρονικών βηματικών μεθόδων:

- i) Μέθοδοι βασισμένες σε παρεμβολή της εξίσωσης διέγερσης
- ii) Μέθοδοι βασισμένες σε εκφράσεις πεπερασμένων διαφορών της ταχύτητας και επιτάχυνσης
- iii) Μέθοδοι βασισμένες στην υποτιθέμενη μεταβολή της επιτάχυνσης

Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

2. Μέθοδοι Βασισμένες σε Παρεμβολή της Διέγερσης

Παρεμβάλλοντας τη διέγερση σε κάθε χρονικό βήμα και αναπτύσσοντας τη ακριβή λύση με χρήση γνωστών μεθόδων, μπορεί να αναπτυχθεί μια πολύ αποτελεσματική αριθμητική διαδικασία.

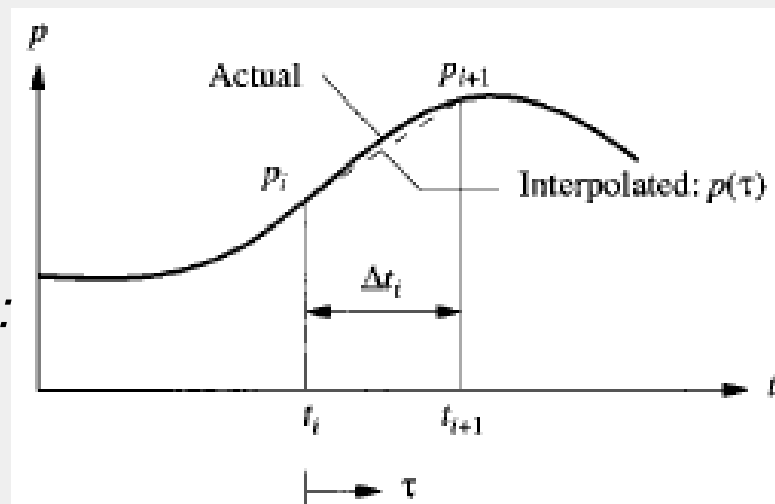
Για μικρά χρονικά διαστήματα, η γραμμική παρεμβολή είναι ικανοποιητική:

$$p(\tau) = p_i + \frac{\Delta p_i}{\Delta t_i} \tau \quad \text{με} \quad \Delta p_i = p_{i+1} - p_i$$

και η εξίσωση χωρίς απόσβεση γράφεται:

$$m\ddot{u} + ku = p_i + \frac{\Delta p_i}{\Delta t_i} \tau \quad \begin{aligned} u(0) &= u_0 \\ \dot{u}(0) &= \dot{u}_0 \end{aligned}$$

Η απόκριση είναι άθροισμα τριών τμημάτων:



Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

2. Μέθοδοι Βασισμένες σε Παρεμβολή της Διέγερσης

Παρεμβάλλοντας τη διέγερση σε κάθε χρονικό βήμα και αναπτύσσοντας τη ακριβή λύση με χρήση γνωστών μεθόδων, μπορεί να αναπτυχθεί μια πολύ αποτελεσματική αριθμητική διαδικασία.

Για μικρά χρονικά διαστήματα, η γραμμική παρεμβολή είναι ικανοποιητική:

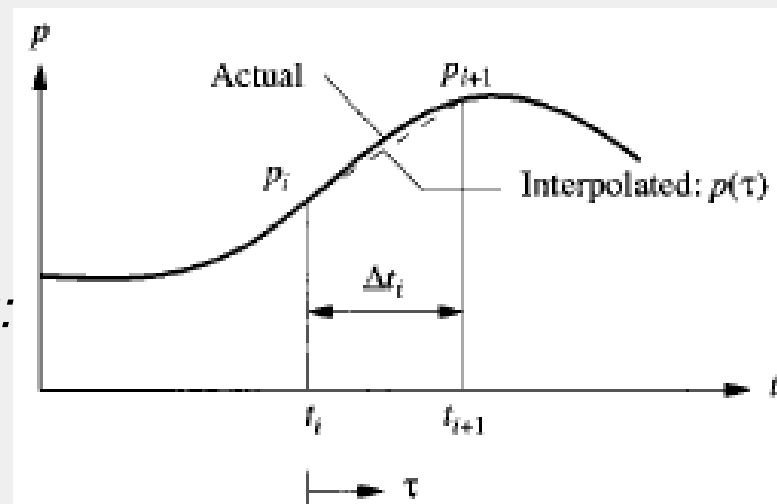
$$p(\tau) = p_i + \frac{\Delta p_i}{\Delta t_i} \tau \quad \text{με} \quad \Delta p_i = p_{i+1} - p_i$$

και η εξίσωση χωρίς απόσβεση γράφεται:

$$m\ddot{u} + ku = p_i + \frac{\Delta p_i}{\Delta t_i} \tau \quad \begin{matrix} u(0) = u_0 \\ \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \end{matrix}$$

Η απόκριση είναι άθροισμα τριών τμημάτων:

α. ελεύθερη ταλάντωση λόγω αρχικών συνθηκών για $\tau=0$



Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

2. Μέθοδοι Βασισμένες σε Παρεμβολή της Διέγερσης

Παρεμβάλλοντας τη διέγερση σε κάθε χρονικό βήμα και αναπτύσσοντας τη ακριβή λύση με χρήση γνωστών μεθόδων, μπορεί να αναπτυχθεί μια πολύ αποτελεσματική αριθμητική διαδικασία.

Για μικρά χρονικά διαστήματα, η γραμμική παρεμβολή είναι ικανοποιητική:

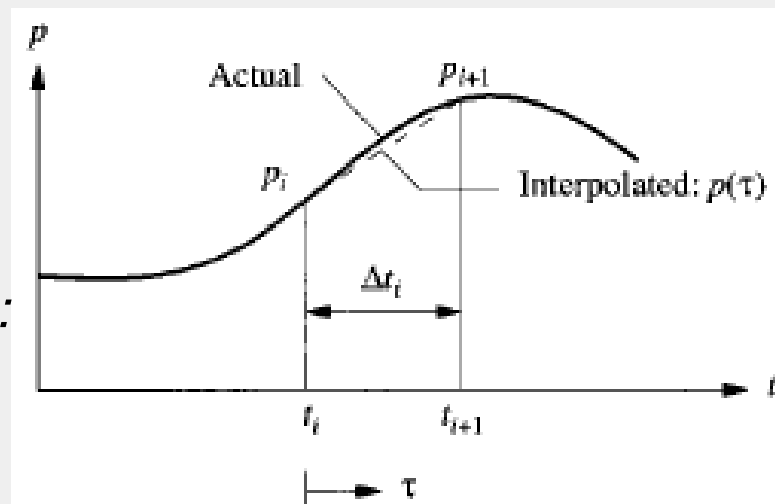
$$p(\tau) = p_i + \frac{\Delta p_i}{\Delta t_i} \tau \quad \text{με} \quad \Delta p_i = p_{i+1} - p_i$$

και η εξίσωση χωρίς απόσβεση γράφεται:

$$m\ddot{u} + ku = \left(p_i + \frac{\Delta p_i}{\Delta t_i} \tau \right) \quad \begin{aligned} u(0) &= u_0 \\ \dot{u}(0) &= \dot{u}_0 \end{aligned}$$

Η απόκριση είναι άθροισμα τριών τμημάτων:

β. σταθερή αιφνιδίως επιβαλλόμενη δύναμη
με μηδενικές αρχικές συνθήκες



Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

2. Μέθοδοι Βασισμένες σε Παρεμβολή της Διέγερσης

Παρεμβάλλοντας τη διέγερση σε κάθε χρονικό βήμα και αναπτύσσοντας τη ακριβή λύση με χρήση γνωστών μεθόδων, μπορεί να αναπτυχθεί μια πολύ αποτελεσματική αριθμητική διαδικασία.

Για μικρά χρονικά διαστήματα, η γραμμική παρεμβολή είναι ικανοποιητική:

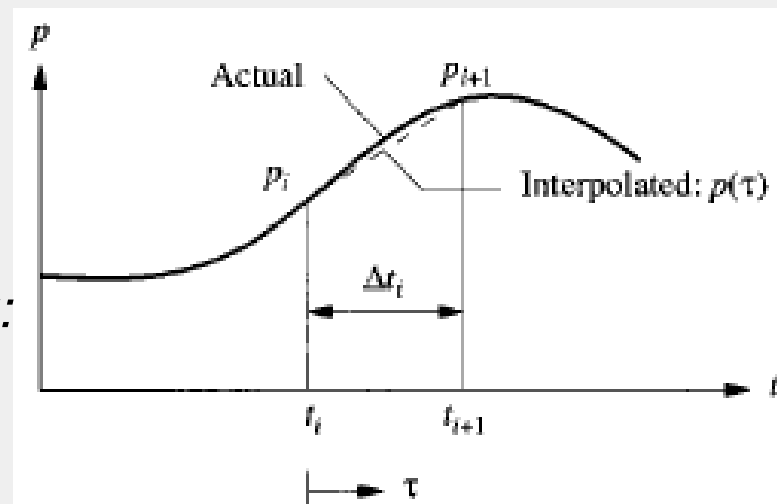
$$p(\tau) = p_i + \frac{\Delta p_i}{\Delta t_i} \tau \quad \text{με} \quad \Delta p_i = p_{i+1} - p_i$$

και η εξίσωση χωρίς απόσβεση γράφεται:

$$m\ddot{u} + ku = p_i + \frac{\Delta p_i}{\Delta t_i} \tau \quad \begin{aligned} u(0) &= u_0 \\ \dot{u}(0) &= \dot{u}_0 \end{aligned}$$

Η απόκριση είναι άθροισμα τριών τμημάτων:

γ. ομαλώς αυξανόμενη δύναμη με μηδενικές αρχικές συνθήκες



Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

2. Μέθοδοι Βασισμένες σε Παρεμβολή της Διέγερσης

Προσαρμόζοντας τις κατάλληλες λύσεις για τις τρεις περιπτώσεις, προκύπτει:

$$u(\tau) = u_i \cos \omega_n \tau + \frac{\dot{u}_i}{\omega_n} \sin \omega_n \tau + \frac{p_i}{k} (1 - \cos \omega_n \tau) + \frac{\Delta p_i}{k} \left(\frac{\tau}{\Delta t_i} - \frac{\sin \omega_n \tau}{\omega_n \Delta t_i} \right)$$

$$\frac{\dot{u}(\tau)}{\omega_n} = -u_i \sin \omega_n \tau + \frac{\dot{u}_i}{\omega_n} \cos \omega_n \tau + \frac{p_i}{k} (\sin \omega_n \tau) + \frac{\Delta p_i}{k} \frac{1}{\omega_n \Delta t_i} (1 - \cos \omega_n \tau)$$

Η τιμή αυτών των εξισώσεων για $\tau = \Delta t_i$ δίνει την μετατόπιση και ταχύτητα την χρονική στιγμή $i+1$

Οι εξισώσεις μπορούν να γραφτούν ως κλειστοί τύποι:

$$u_{i+1} = Au_i + B\dot{u}_i + Cp_i + D\Delta p_i$$

$$\dot{u}_{i+1} = A'u_i + B'\dot{u}_i + C'p_i + D'\Delta p_i$$

Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

2. Μέθοδοι Βασισμένες σε Παρεμβολή της Διέγερσης

Για σύστημα με απόσβεση μικρότερη της κρίσιμης ($\zeta < 1$) οι συντελεστές A, B, C, \dots, D' υπολογίζονται και παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.2.1 του βιβλίου.

Για σταθερό χρονικό διάστημα Δt οι συντελεστές A, B, C, \dots, D' χρειάζεται αν υπολογιστούν μόνο μία φορά.

Αφού οι περιοδικοί τύποι προέκυψαν από την ακριβή λύση της εξίσωσης κίνησης, ο μόνος περιορισμός στο μέγεθος του Δt είναι να επιτρέπει μια καλή προσέγγιση της εξίσωσης διέγερσης και να παρέχει αποτελέσματα για την απόκριση σε χρονικά διαστήματα μικρού εύρους (να μην χάνονται κορυφές)

Χρήσιμη διαδικασία για διέγερση ορισμένη σε χρονικά διαστήματα μικρού εύρους – σεισμική εδαφική επιτάχυνση.

Η ακριβής λύση της εξίσωσης κίνησης που απαιτείται για αυτήν την αριθμητική διαδικασία είναι εφικτή μόνο για γραμμικά συστήματα.

Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

3. Μέθοδος Κεντρικής Διαφοράς

Η μέθοδος αυτή βασίζεται σε μια προσέγγιση πεπερασμένων διαφορών των παραγώγων ως προς το χρόνο της μετατόπισης. Για σταθερά $\Delta t_i = \Delta t$ οι εκφράσεις πεπερασμένων διαφορών ταχύτητας και επιτάχυνσης είναι:

$$\dot{u}_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta t} \qquad \ddot{u}_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta t)^2}$$

Οπότε και η εξίσωση κίνησης γράφεται:

$$m \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta t)^2} + c \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta t} + ku_i = p_i$$

Όπου τα u_i και u_{i-1} είναι γνωστά από την εφαρμογή της διαδικασίας τα προηγούμενα χρονικά βήματα.

Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

3. Μέθοδος Κεντρικής Διαφοράς

Μεταφέροντας τις γνωστές ποσότητες στο δεξιά μέλος:

$$\left[\frac{m}{(\Delta t)^2} + \frac{c}{2\Delta t} \right] u_{i+1} = p_i - \left[\frac{m}{(\Delta t)^2} - \frac{c}{2\Delta t} \right] u_{i-1} - \left[k - \frac{2m}{(\Delta t)^2} \right] u_i$$

ή αλλιώς: $\hat{k}u_{i+1} = \hat{p}_i$ και άρα ο άγνωστος u_{i+1} δίνεται από: $u_{i+1} = \frac{\hat{p}_i}{\hat{k}}$

Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

3. Μέθοδος Κεντρικής Διαφοράς

Μεταφέροντας τις γνωστές ποσότητες στο δεξιά μέλος:

$$\left[\frac{m}{(\Delta t)^2} + \frac{c}{2\Delta t} \right] u_{i+1} = p_i - \left[\frac{m}{(\Delta t)^2} - \frac{c}{2\Delta t} \right] u_{i-1} - \left[k - \frac{2m}{(\Delta t)^2} \right] u_i$$

ή αλλιώς: $\hat{k}u_{i+1} = \hat{p}_i$ και άρα ο άγνωστος u_{i+1} δίνεται από: $u_{i+1} = \frac{\hat{p}_i}{\hat{k}}$

Η λύση την χρονική στιγμή $i+1$ προσδιορίζεται από τη κατάσταση ισορροπίας τη χρονική i στιγμή χωρίς χρήση της κατάστασης ισορροπίας τη χρονική στιγμή $i+1$. Τέτοιες μέθοδοι ονομάζονται ρητές μέθοδοι.

Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

3. Μέθοδος Κεντρικής Διαφοράς

Μεταφέροντας τις γνωστές ποσότητες στο δεξιά μέλος:

$$\left[\frac{m}{(\Delta t)^2} + \frac{c}{2\Delta t} \right] u_{i+1} = p_i - \left[\frac{m}{(\Delta t)^2} - \frac{c}{2\Delta t} \right] u_{i-1} - \left[k - \frac{2m}{(\Delta t)^2} \right] u_i$$

ή αλλιώς: $\hat{k}u_{i+1} = \hat{p}_i$ και άρα ο άγνωστος u_{i+1} δίνεται από: $u_{i+1} = \frac{\hat{p}_i}{\hat{k}}$

Η λύση την χρονική στιγμή $i+1$ προσδιορίζεται από τη κατάσταση ισορροπίας τη χρονική i στιγμή χωρίς χρήση της κατάστασης ισορροπίας τη χρονική στιγμή $i+1$. Τέτοιες μέθοδοι ονομάζονται ρητές μέθοδοι.

Το χρονικό διάστημα Δt πρέπει να είναι αρκετά μικρό. Απαιτήση ευστάθειας:

$$\frac{\Delta t}{T_n} < \frac{1}{\pi}$$

Σε μονοβάθμια συστήματα τυπικά: $\Delta t / T_n < 0.1$

Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

3. Μέθοδος Κεντρικής Διαφοράς

Για τον προσδιορισμό της μετατόπισης την πρώτη χρονική στιγμή u_1 απαιτούνται οι u_0 και u_{-1} . Οπότε για $i=0$:

$$\dot{u}_0 = \frac{u_1 - u_{-1}}{2\Delta t} \qquad \ddot{u}_0 = \frac{u_1 - 2u_0 + u_{-1}}{(\Delta t)^2}$$

Επιλύοντας ως προς u_{-1} την πρώτη και αντικαθιστώντας στην δεύτερη:

$$u_{-1} = u_0 - \Delta t (\dot{u}_0) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{u}_0$$

Όπου η αρχική ταχύτητα και μετατόπιση είναι γνώστες, ενώ η επιτάχυνση την χρονική στιγμή 0 δίνεται από τη εξίσωση κίνησης:

$$\ddot{u}_0 = \frac{p_0 - c\dot{u}_0 - ku_0}{m}$$

Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

4. Μέθοδος Newmark

Το 1959 ο N.M. Newmark ανέπτυξε μια οικογένεια μεθόδων χρονικών βημάτων που βασίζονται στις εξισώσεις:

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + [(1-\gamma)\Delta t]\ddot{u}_i + (\gamma\Delta t)\ddot{u}_{i+1}$$

$$u_{i+1} = u_i + (\Delta t)\dot{u}_i + [(0.5-\beta)\Delta t^2]\ddot{u}_i + (\beta\Delta t^2)\ddot{u}_{i+1}$$

οι παράμετροι β και γ ορίζουν την μεταβολή της επιτάχυνσης σε ένα χρονικό βήμα και προσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά της ευστάθειας και της ακρίβειας της μεθόδου.

Τυπικές τιμές των παραμέτρων β και γ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{6} \leq \beta \leq \frac{1}{4} \\ \gamma = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

4. Μέθοδος Newmark

Το 1959 ο N.M. Newmark ανέπτυξε μια οικογένεια μεθόδων χρονικών βημάτων που βασίζονται στις εξισώσεις:

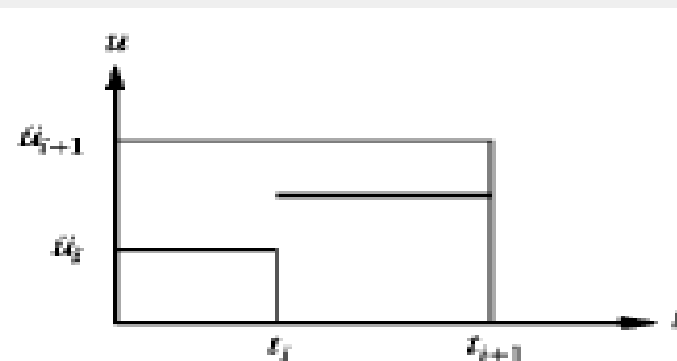
$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \left[(1-\gamma) \Delta t \right] \ddot{u}_i + (\gamma \Delta t) \ddot{u}_{i+1}$$

$$u_{i+1} = u_i + (\Delta t) \dot{u}_i + \left[(0.5 - \beta) \Delta t^2 \right] \ddot{u}_i + (\beta \Delta t^2) \ddot{u}_{i+1}$$

οι παράμετροι β και γ ορίζουν την μεταβολή της επιτάχυνσης σε ένα χρονικό βήμα και προσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά της ευστάθειας και της ακρίβειας της μεθόδου.

Ειδικές Περιπτώσεις: Για $\gamma = 1/2$ και $\beta = 1/4$

Σταθερή Μέση Επιτάχυνση



Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

4. Μέθοδος Newmark

Το 1959 ο N.M. Newmark ανέπτυξε μια οικογένεια μεθόδων χρονικών βημάτων που βασίζονται στις εξισώσεις:

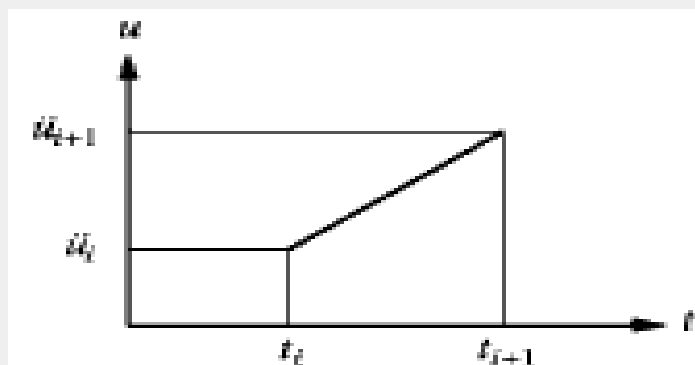
$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + [(1-\gamma)\Delta t]\ddot{u}_i + (\gamma\Delta t)\ddot{u}_{i+1}$$

$$u_{i+1} = u_i + (\Delta t)\dot{u}_i + [(0.5-\beta)\Delta t^2]\ddot{u}_i + (\beta\Delta t^2)\ddot{u}_{i+1}$$

οι παράμετροι β και γ ορίζουν την μεταβολή της επιτάχυνσης σε ένα χρονικό βήμα και προσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά της ευστάθειας και της ακρίβειας της μεθόδου.

Ειδικές Περιπτώσεις: Για $\gamma = 1/2$ και $\beta = 1/6$

Γραμμική Μεταβολή Επιτάχυνση



Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

4. Μέθοδος Newmark

Μη επαναληπτική διατύπωση

Αυξητικές ποσότητες: $\Delta u_i = u_{i+1} - u_i$ $\Delta \dot{u}_i = \dot{u}_{i+1} - \dot{u}_i$ $\Delta \ddot{u}_i = \ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i$ $\Delta p_i = p_{i+1} - p_i$

Οι εξισώσεις μπορούν να γραφτούν:

$$\begin{aligned}\Delta \dot{u}_i &= (\Delta t) \ddot{u}_i + (\gamma \Delta t) \ddot{u}_i \\ \Delta u_i &= (\Delta t) \dot{u}_i + \left(\frac{\Delta t^2}{2} \right) \ddot{u}_i + \beta (\Delta t)^2 \Delta \ddot{u}_i\end{aligned}$$

Λύνοντας την δεύτερη ως προς την αυξητική επιτάχυνση και αντικαθιστώντας στην αυξητική εξίσωση κίνησης $m \Delta \ddot{u}_i + c \Delta \dot{u}_i + k \Delta u_i = \Delta p_i$ προκύπτει:

$$\hat{k} \Delta u_i = \Delta \hat{p}_i$$

όπου:

$$\hat{k} = k + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} c + \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} m \quad \Delta \hat{p}_i = \Delta p_i + \left(\frac{1}{\beta \Delta t} m + \frac{\gamma}{\beta} c \right) \dot{u}_i + \left[\frac{1}{2\beta} m + \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) c \right] \ddot{u}_i$$

Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

4. Μέθοδος Newmark

Μη επαναληπτική διατύπωση

Οπότε και η αυξητική μετατόπιση υπολογίζεται $\Delta u_i = \frac{\Delta \hat{p}_i}{\hat{k}}$

Από την Δu_i υπολογίζονται η αυξητική ταχύτητα και επιτάχυνση και έπειτα:

$$u_{i+1} = \Delta u_i + u_i \quad \dot{u}_{i+1} = \Delta \dot{u}_i + \dot{u}_i \quad \ddot{u}_{i+1} = \Delta \ddot{u}_i + \ddot{u}_i$$

Στη μέθοδο Newmark, η λύση την χρονική στιγμή $i+1$ προσδιορίζεται από τη κατάσταση ισορροπίας τη χρονική στιγμή $i+1$. Τέτοιες μέθοδοι καλούνται πεπλεγμένες μέθοδοι.

Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

4. Μέθοδος Newmark

Μη επαναληπτική διατύπωση

Οπότε και η αυξητική μετατόπιση υπολογίζεται $\Delta u_i = \frac{\Delta \hat{p}_i}{\hat{k}}$

Από την Δu_i υπολογίζονται η αυξητική ταχύτητα και επιτάχυνση και έπειτα:

$$u_{i+1} = \Delta u_i + u_i \quad \dot{u}_{i+1} = \Delta \dot{u}_i + \dot{u}_i \quad \ddot{u}_{i+1} = \Delta \ddot{u}_i + \ddot{u}_i$$

Στη μέθοδο Newmark, η λύση την χρονική στιγμή $i+1$ προσδιορίζεται από τη κατάσταση ισορροπίας τη χρονική στιγμή $i+1$. Τέτοιες μέθοδοι καλούνται πεπλεγμένες μέθοδοι.

Η μέθοδος Newmark για να είναι ευσταθής: $\frac{\Delta t}{T_n} \leq \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\gamma - 2\beta}}$

Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

4. Μέθοδος Newmark

Μη επαναληπτική διατύπωση

Οπότε και η αυξητική μετατόπιση υπολογίζεται $\Delta u_i = \frac{\Delta \hat{p}_i}{\hat{k}}$

Από την Δu_i υπολογίζονται η αυξητική ταχύτητα και επιτάχυνση και έπειτα:

$$u_{i+1} = \Delta u_i + u_i \quad \dot{u}_{i+1} = \Delta \dot{u}_i + \dot{u}_i \quad \ddot{u}_{i+1} = \Delta \ddot{u}_i + \ddot{u}_i$$

Στη μέθοδο Newmark, η λύση την χρονική στιγμή $i+1$ προσδιορίζεται από τη κατάσταση ισορροπίας τη χρονική στιγμή $i+1$. Τέτοιες μέθοδοι καλούνται πεπλεγμένες μέθοδοι.

Για Σταθερή Μέση Επιτάχυνση $\gamma = 1/2$ $\beta = 1/4$ $\Rightarrow \Delta t / T_n \leq \infty$

Οπότε η μέθοδος Μέση Επιτάχυνση είναι ευσταθής για κάθε Δt αλλά είναι ακριβής μόνο για μικρά Δt .

Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

4. Μέθοδος Newmark

Μη επαναληπτική διατύπωση

Οπότε και η αυξητική μετατόπιση υπολογίζεται $\Delta u_i = \frac{\Delta \hat{p}_i}{\hat{k}}$

Από την Δu_i υπολογίζονται η αυξητική ταχύτητα και επιτάχυνση και έπειτα:

$$u_{i+1} = \Delta u_i + u_i \quad \dot{u}_{i+1} = \Delta \dot{u}_i + \dot{u}_i \quad \ddot{u}_{i+1} = \Delta \ddot{u}_i + \ddot{u}_i$$

Στη μέθοδο Newmark, η λύση την χρονική στιγμή $i+1$ προσδιορίζεται από τη κατάσταση ισορροπίας τη χρονική στιγμή $i+1$. Τέτοιες μέθοδοι καλούνται πεπλεγμένες μέθοδοι.

Για Γραμμική Μεταβολή Επιτάχυνση $\gamma = 1/2$ $\beta = 1/6$ $\Rightarrow \Delta t / T_n \leq 0.551$

Ωστόσο και εδώ για να είναι η μέθοδος ακριβής το Δt πρέπει να είναι πολύ μικρότερο από όριο ευστάθειας.

Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

4. Μέθοδος Newmark

Σύνοψη της μεθόδου:

Ειδικές περιπτώσεις:

A) Για $\gamma=1/2$, $\beta=1/4$ η μέθοδος ταυτίζεται με τη Μέθοδο Μέσης Επιτάχυνσης

B) Για $\gamma=1/2$, $\beta=1/6$ η μέθοδος ταυτίζεται με τη Μέθοδο Γραμμικής Επιτάχυνσης

Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

4. Μέθοδος Newmark

Σύνοψη της μεθόδου:

Ειδικές περιπτώσεις:

A) Για $\gamma=1/2$, $\beta=1/4$ η μέθοδος ταυτίζεται με τη Μέθοδο Μέσης Επιτάχυνσης

B) Για $\gamma=1/2$, $\beta=1/6$ η μέθοδος ταυτίζεται με τη Μέθοδο Γραμμικής Επιτάχυνσης

1) Αρχικοί υπολογισμοί:

- $$\ddot{u}_0 = \frac{p_0 - c\dot{u}_0 - ku_0}{m}$$

- Επιλογή Δt

- $$\hat{k} = k + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}c + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}m$$

- $$a = \frac{1}{\beta\Delta t}m + \frac{\gamma}{\beta}c \quad b = \frac{1}{2\beta}m + \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) c$$

Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

4. Μέθοδος Newmark

2) Υπολογισμοί σε κάθε χρονικό βήμα i :

- $\Delta \hat{p}_i = \Delta p_i + a\dot{u}_i + b\ddot{u}_i$

- $\Delta u_i = \frac{\Delta \hat{p}_i}{\hat{k}}$

- $\Delta \ddot{u}_i = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \Delta u_i - \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{u}_i - \frac{1}{2\beta} \ddot{u}_i$ $\Delta \dot{u}_i = \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \Delta u_i - \frac{\gamma}{\beta} \dot{u}_i + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \ddot{u}_i$

- $u_{i+1} = u_i + \Delta u_i$ $\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \Delta \dot{u}_i$ $\ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + \Delta \ddot{u}_i$

3) Αντικατάσταση του i με $i+1$ και επανάληψη του 2)

Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

5. Ευστάθεια και Υπολογιστικά Σφάλματα

Οι αριθμητικές διαδικασίες που οδηγούν σε φραγμένες λύσεις αν το χρονικό βήμα είναι μικρότερο από κάποιο όριο ευστάθειας ονομάζονται υπό συνθήκες ευσταθής.

Οι αριθμητικές διαδικασίες που οδηγούν σε φραγμένες λύσεις ανεξαρτήτως του μεγέθους του χρονικού βήματος ονομάζονται άνευ συνθηκών ευσταθής.

Η μέθοδος της μέσης επιτάχυνσης είναι άνευ συνθηκών ευσταθής.

Η μέθοδος της γραμμικής επιτάχυνσης είναι υπό συνθήκες ευσταθής.

$$\Delta t / T_n \leq 0.551$$

Η μέθοδος της κεντρικών διαφορών είναι υπό συνθήκες ευσταθής.

$$\Delta t / T_n < 1 / \pi$$

Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

5. Ευστάθεια και Υπολογιστικά Σφάλματα

Οι αριθμητικές διαδικασίες που οδηγούν σε φραγμένες λύσεις αν το χρονικό βήμα είναι μικρότερο από κάποιο όριο ευστάθειας ονομάζονται υπό συνθήκες ευσταθής.

Οι αριθμητικές διαδικασίες που οδηγούν σε φραγμένες λύσεις ανεξαρτήτως του μεγέθους του χρονικού βήματος ονομάζονται άνευ συνθηκών ευσταθής.

Η μέθοδος της μέσης επιτάχυνσης είναι άνευ συνθηκών ευσταθής.

Η μέθοδος της γραμμικής επιτάχυνσης είναι υπό συνθήκες ευσταθής.

$$\Delta t / T_n \leq 0.551$$

Η μέθοδος της κεντρικών διαφορών είναι υπό συνθήκες ευσταθής.

$$\Delta t / T_n < 1 / \pi$$

Τα κριτήρια ευστάθειας δεν είναι περιοριστικά στην ανάλυση μονοβαθμίων συστημάτων αφού το $\Delta t / T_n$ επιλέγεται πολύ μικρότερο για να είναι ακριβή τα αριθμητικά αποτελέσματα.

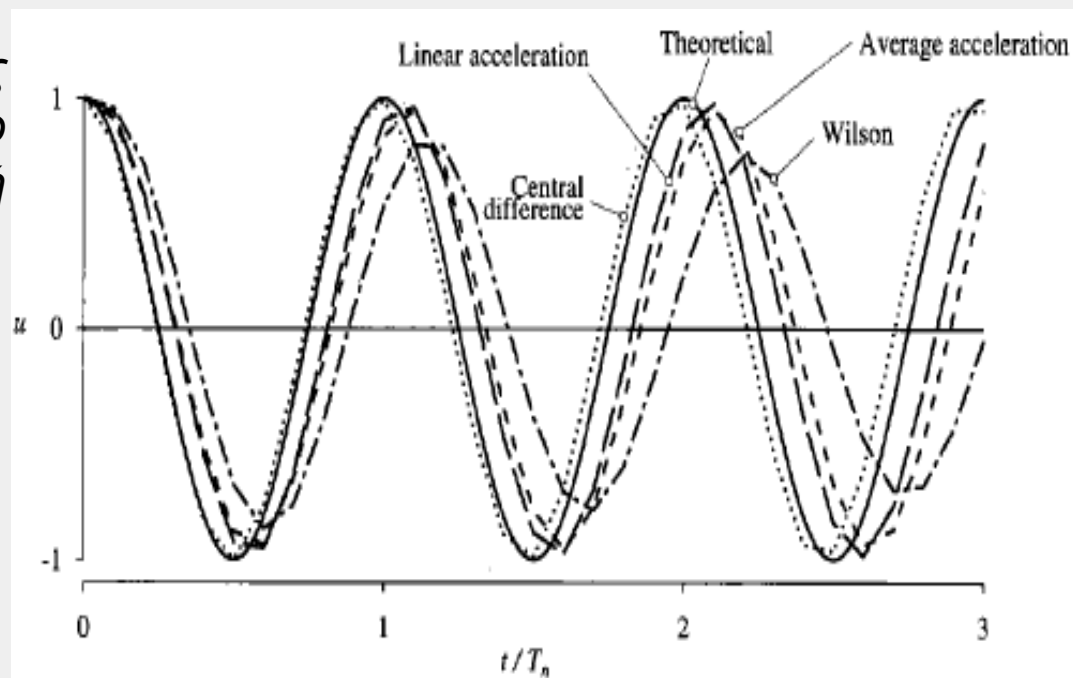
Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

5. Ευστάθεια και Υπολογιστικά Σφάλματα

Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα $m\ddot{u} + ku = 0$ με $u(0) = 1$ $\dot{u}(0) = 0$

Το πρόβλημα επιλύεται με διάφορες αριθμητικές μεθόδους συγκρίνοντας τα αποτελέσματα στο παρακάτω διάγραμμα.

Η επιλογή του χρονικού βήματος εξαρτάται εκτός από την ιδιοπερίοδο ταλάντωσης και από την χρονική μεταβολή της δυναμικής διέγερσης.



Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

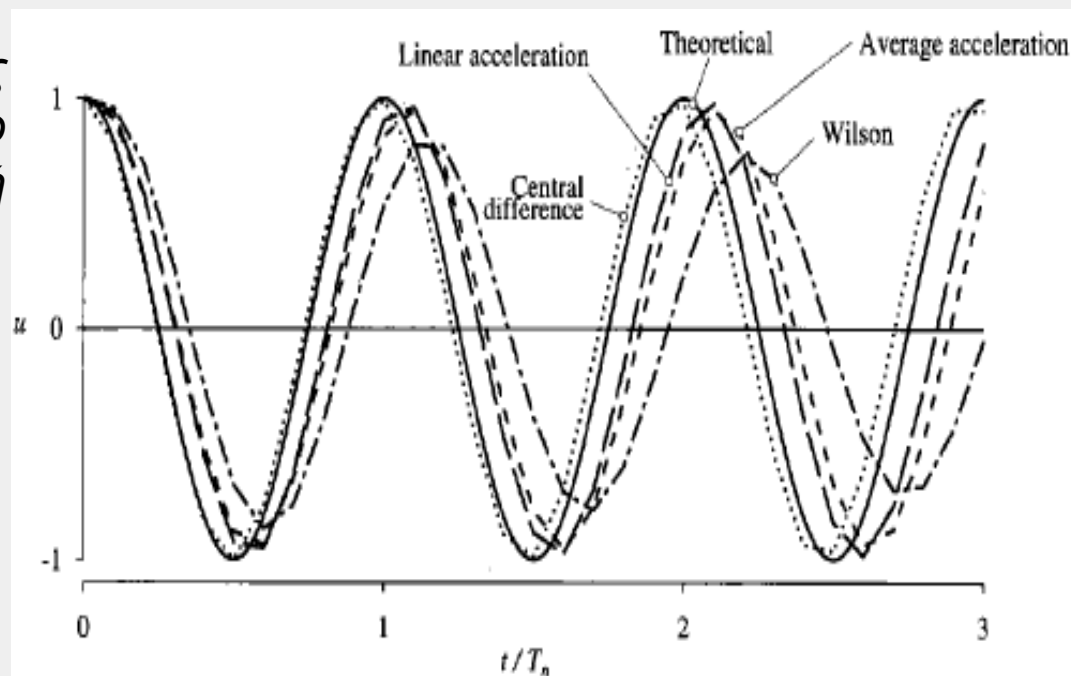
5. Ευστάθεια και Υπολογιστικά Σφάλματα

Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα $m\ddot{u} + ku = 0$ με $u(0) = 1$ $\dot{u}(0) = 0$

Το πρόβλημα επιλύεται με διάφορες αριθμητικές μεθόδους συγκρίνοντας τα αποτελέσματα στο παρακάτω διάγραμμα.

Η επιλογή του χρονικού βήματος εξαρτάται εκτός από την ιδιοπερίοδο ταλάντωσης και από την χρονική μεταβολή της δυναμικής διέγερσης.

Για την επιλογή του χρονικού βήματος λύνουμε το πρόβλημα με ένα Δt , στη συνέχεια για ένα μικρότερο Δt και συνεχίζουμε την διαδικασία μέχρι οι δύο διαδοχικές λύσεις σχεδόν να συμπίπτουν.

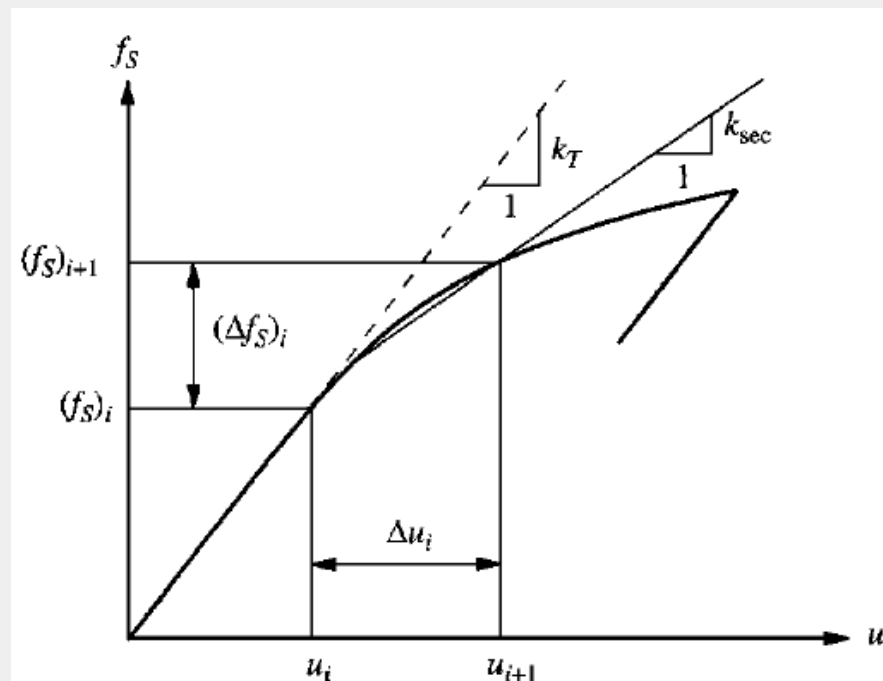


Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

6. Μη γραμμική ανάλυση: Μέθοδος Newmark

Η Μέθοδος Newmark επεκτείνεται προκειμένου να εφαρμοστεί σε μη γραμμικά συστήματα

Είναι πιο πολύπλοκη σε σχέση με τη μέθοδο κεντρικών διαφορών, αλλά παρουσιάζει αυξημένη ακρίβεια



Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

6. Μη γραμμική ανάλυση: Μέθοδος Newmark

Η Μέθοδος Newmark επεκτείνεται προκειμένου να εφαρμοστεί σε μη γραμμικά συστήματα

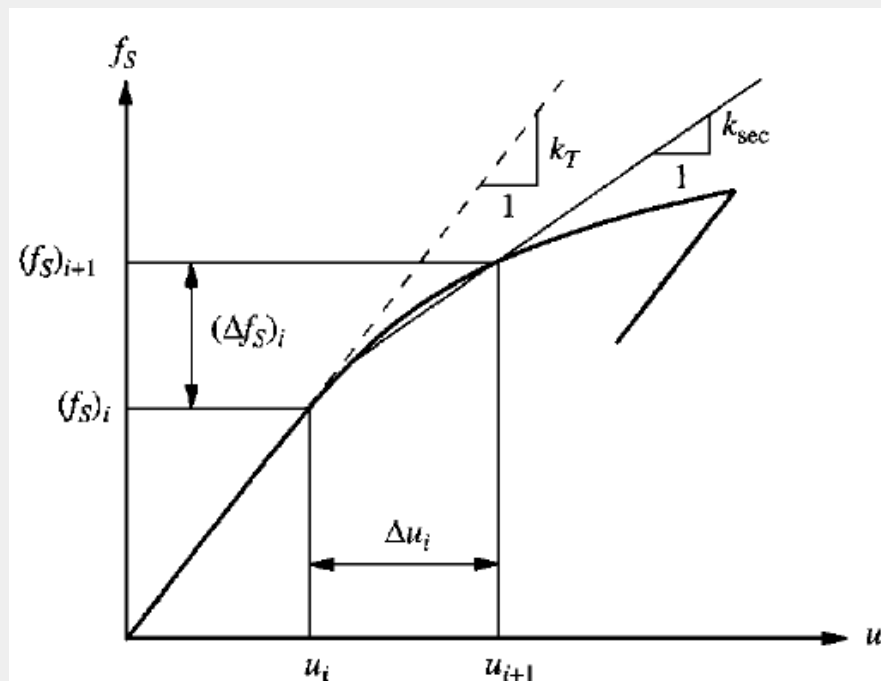
Είναι πιο πολύπλοκη σε σχέση με τη μέθοδο κεντρικών διαφορών, αλλά παρουσιάζει αυξημένη ακρίβεια

Έχουμε την προσαυξητική μορφή της εξίσωσης κίνησης:

$$m\Delta\ddot{u}_i + c\Delta\dot{u}_i + (\Delta f_s)_i = \Delta p_i$$

Η προσαυξητική ελαστική δύναμη δίνεται ως:

$$(\Delta f_s)_i = (k_i)_{sec} \Delta u_i$$



Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

6. Μη γραμμική ανάλυση: Μέθοδος Newmark

Η Μέθοδος Newmark επεκτείνεται προκειμένου να εφαρμοστεί σε μη γραμμικά συστήματα

Είναι πιο πολύπλοκη σε σχέση με τη μέθοδο κεντρικών διαφορών, αλλά παρουσιάζει αυξημένη ακρίβεια

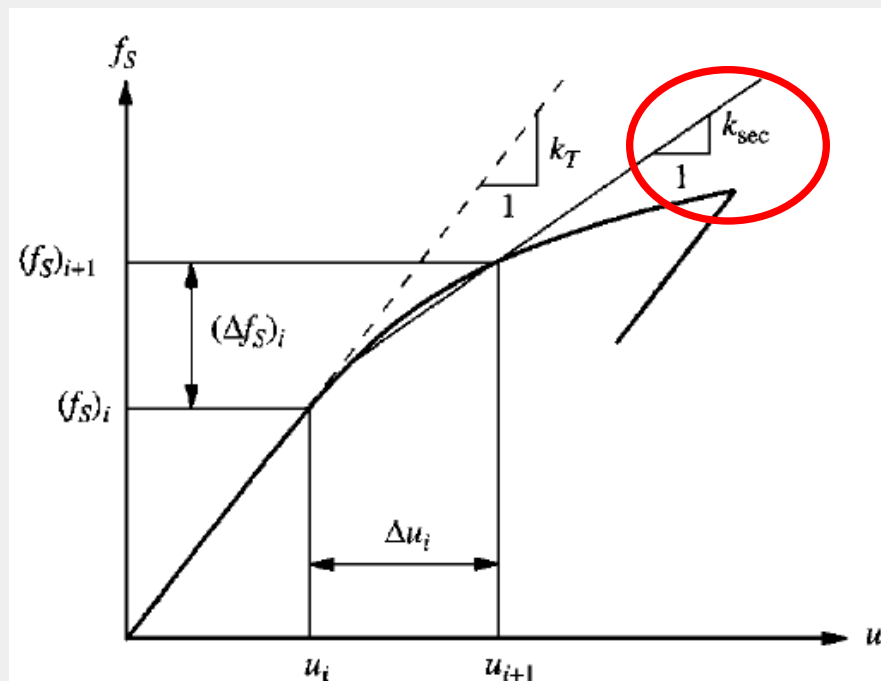
Έχουμε την προσαυξητική μορφή της εξίσωσης κίνησης:

$$m\Delta\ddot{u}_i + c\Delta\dot{u}_i + (\Delta f_s)_i = \Delta p_i$$

Η προσαυξητική ελαστική δύναμη δίνεται ως:

$$(\Delta f_s)_i = (k_i)_{sec} \Delta u_i$$

Τέμνουσα δυσκαμψία

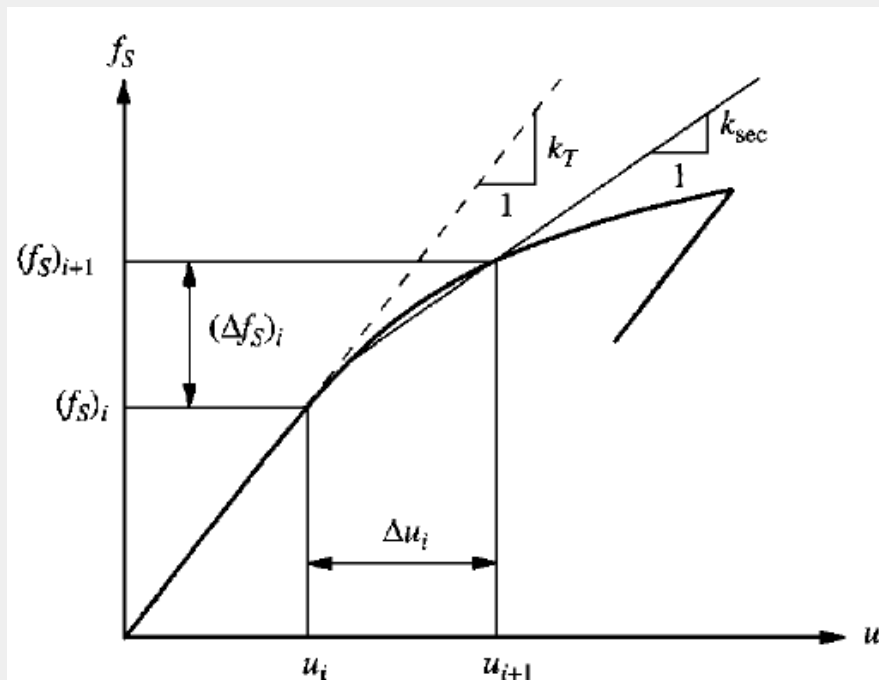


Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

6. Μη γραμμική ανάλυση: Μέθοδος Newmark

Η τέμνουσα δυσκαμψία δεν είναι γνωστή, οπότε θεωρούμε ότι για μικρό Δt μπορεί να αντικατασταθεί από την εφαπτομενική δυσκαμψία

Οι προσεγγιστικές εκφράσεις των ελαστικών δυνάμεων και της εξίσωσης κίνησης τροποποιούνται ως εξής:



Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

6. Μη γραμμική ανάλυση: Μέθοδος Newmark

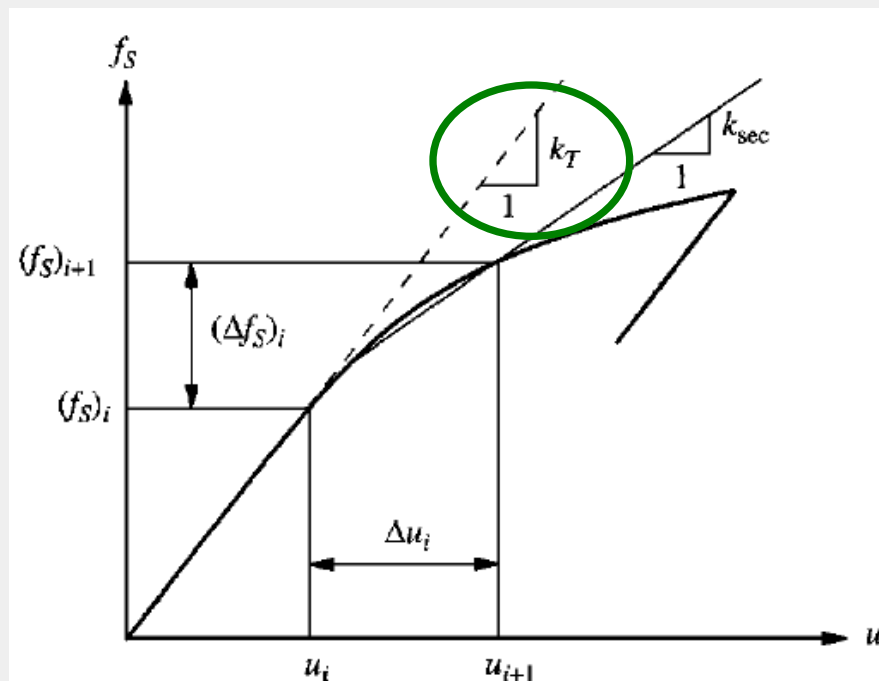
Η τέμνουσα δυσκαμψία δεν είναι γνωστή, οπότε θεωρούμε ότι για μικρό Δt μπορεί να αντικατασταθεί από την εφαπτομενική δυσκαμψία

Οι προσαυξητικές εκφράσεις των ελαστικών δυνάμεων και της εξίσωσης κίνησης τροποποιούνται ως εξής:

$$(\Delta f_s)_i \approx (k_i)_T \Delta u_i$$

Εφαπτομενική δυσκαμψία

$$m\Delta\ddot{u}_i + c\Delta\dot{u}_i + (k_i)_T \Delta u_i = \Delta p_i$$



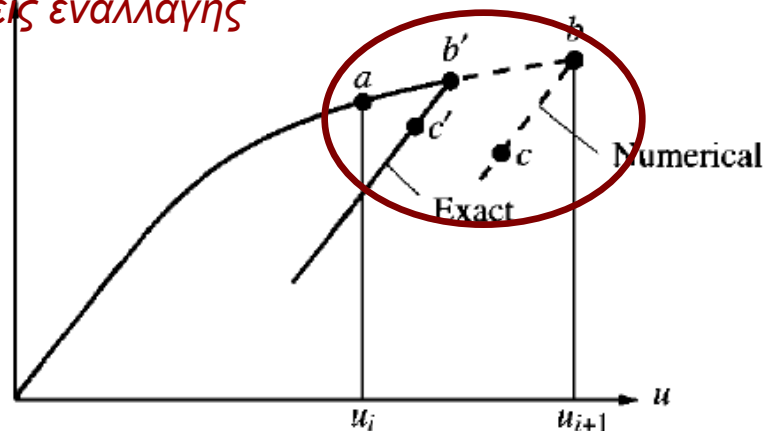
Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

6. Μη γραμμική ανάλυση: Μέθοδος Newmark

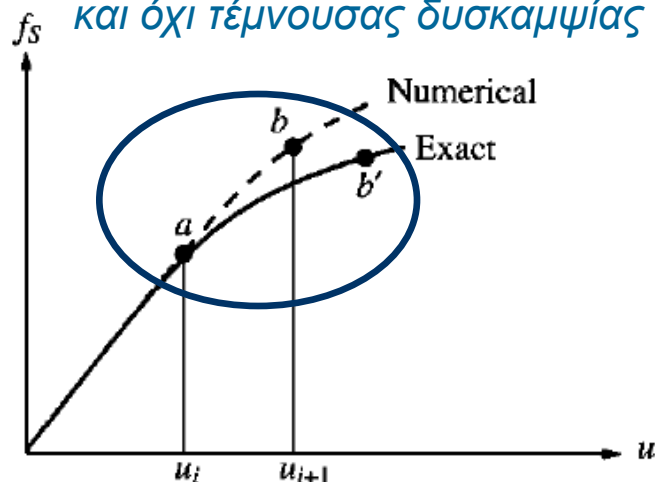
Σύμφωνα με τα παραπάνω η μη επαναληπτική εκδοχή της μεθόδου Newmark που παρουσιάστηκε για τη γραμμική ανάλυση μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τη μη γραμμική ανάλυση

Η διαδικασία αυτή εφαρμοζόμενη με σταθερό χρονικό βήμα Δt μπορεί να οδηγήσει σε σημαντικά σφάλματα

Το σταθερό χρονικό βήμα καθυστερεί τον εντοπισμό των σημείων ισορροπίας στις θέσεις εναλλαγής



Σφάλμα λόγω χρήσης εφαπτομενικής και όχι τέμνουσας δυσκαμψίας



Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

6. Μη γραμμική ανάλυση: Μέθοδος Newmark

Τα σφάλματα μπορούν να περιοριστούν χρησιμοποιώντας μικρότερα και μεταβαλλόμενα χρονικά βήματα Δt

Το σφάλμα λόγω της εφαπτομενικής δυσκαμψίας μπορεί να περιοριστεί μέσω επαναληπτικής διαδικασίας

Σε αναλογία με τη γραμμική ανάλυση έχουμε:

Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

6. Μη γραμμική ανάλυση: Μέθοδος Newmark

Τα σφάλματα μπορούν να περιοριστούν χρησιμοποιώντας μικρότερα και μεταβαλλόμενα χρονικά βήματα Δt

Το σφάλμα λόγω της εφαπτομενικής δυσκαμψίας μπορεί να περιοριστεί μέσω επαναληπτικής διαδικασίας

Σε αναλογία με τη γραμμική ανάλυση έχουμε:

$$\hat{k}_i \Delta u_i = \Delta \hat{p}_i$$

όπου:

$$\Delta \hat{p}_i = \Delta p_i + \left(\frac{1}{\beta \Delta t} m + \frac{\gamma}{\beta} c \right) \dot{u}_i + \left[\frac{1}{2\beta} m + \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) c \right] \ddot{u}_i$$

$$\hat{k}_i = k_i + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} c + \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} m$$

Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

6. Μη γραμμική ανάλυση: Μέθοδος Newmark

Η παραπάνω εξίσωση είναι μη γραμμική καθώς το k_i εξαρτάται από τη μετακίνηση u . Η επαναληπτική διαδικασία που εφαρμόζεται σε κάθε βήμα είναι γνωστή ως τροποποιημένη Μέθοδος Newton-Raphson και διατυπώνεται ως:

Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

6. Μη γραμμική ανάλυση: Μέθοδος Newmark

Η παραπάνω εξίσωση είναι μη γραμμική καθώς το k_i εξαρτάται από τη μετακίνηση u . Η επαναληπτική διαδικασία που εφαρμόζεται σε κάθε βήμα είναι γνωστή ως τροποποιημένη Μέθοδος Newton-Raphson και διατυπώνεται ως:

1) Αρχικοποίηση:

$$u_{i+1}^{(0)} = u_i \quad f_s^{(0)} = (f_s)_i \quad \Delta R^{(1)} = \Delta \hat{p}_i \quad \hat{k}_T = \hat{k}_i$$

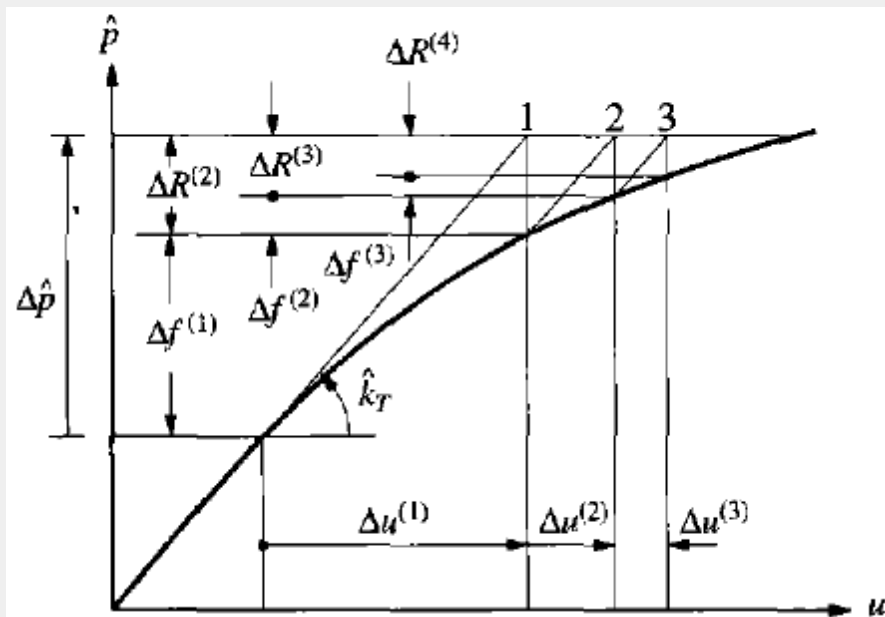
2) Σε κάθε επανάληψη ($j=1,2,3,\dots$):

$$\text{Επίλυση: } \hat{k}_T \Delta u^{(j)} = \Delta R^{(j)} \rightarrow \Delta u^{(j)}$$

$$u_{i+1}^{(j)} = u_{i+1}^{(j-1)} + \Delta u^{(j)}$$

$$\Delta f^{(j)} = f_s^{(j)} - f_s^{(j-1)} + (\hat{k}_T - k_T) \Delta u^{(j)}$$

$$\Delta R^{(j+1)} = \Delta R^{(j)} - \Delta f^{(j)}$$



Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

6. Μη γραμμική ανάλυση: Μέθοδος Newmark

Η επαναληπτική διαδικασία σταματάει μετά από l επαναλήψεις όταν η προσαυξητική μετατόπιση $\Delta u^{(l)}$ γίνει αρκετά μικρή. Δηλαδή θα είναι:

$$\frac{\Delta u^{(l)}}{\Delta u} < \varepsilon$$

Η συνολική μετατόπιση από το βήμα i στο βήμα $i+1$ δίνεται ως:

$$\Delta u_i = \sum_{j=1}^l \Delta u^{(j)}$$

Η συνολική ταχύτητα και επιτάχυνση δίνονται ως:

$$\Delta \ddot{u}_i = \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} \Delta u_i - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{u}_i - \frac{1}{2\beta} \ddot{u}_i \quad \Delta \dot{u}_i = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta u_i - \frac{\gamma}{\beta} \dot{u}_i + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \ddot{u}_i$$

Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

6. Μη γραμμική ανάλυση: Μέθοδος Newmark

Σύνοψη της μεθόδου:

Ειδικές περιπτώσεις:

A) Για $\gamma=1/2$, $\beta=1/4$ η μέθοδος ταυτίζεται με τη Μέθοδο Μέσης Επιτάχυνσης

B) Για $\gamma=1/2$, $\beta=1/6$ η μέθοδος ταυτίζεται με τη Μέθοδο Γραμμικής Επιτάχυνσης

Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

6. Μη γραμμική ανάλυση: Μέθοδος Newmark

Σύνοψη της μεθόδου:

Ειδικές περιπτώσεις:

A) Για $\gamma=1/2$, $\beta=1/4$ η μέθοδος ταυτίζεται με τη Μέθοδο Μέσης Επιτάχυνσης

B) Για $\gamma=1/2$, $\beta=1/6$ η μέθοδος ταυτίζεται με τη Μέθοδο Γραμμικής Επιτάχυνσης

1) Αρχικοί υπολογισμοί:

- $$\ddot{u}_0 = \frac{p_0 - c\dot{u}_0 - (f_s)_0}{m}$$
- Επιλογή Δt
- $$a = \frac{1}{\beta\Delta t}m + \frac{\gamma}{\beta}c \quad b = \frac{1}{2\beta}m + \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) c$$

Αριθμητικός Υπολογισμός Δυναμικής Απόκρισης

6. Μη γραμμική ανάλυση: Μέθοδος Newmark

2) Υπολογισμοί σε κάθε χρονικό βήμα i :

- $\Delta \hat{p}_i = \Delta p_i + a \dot{u}_i + b \ddot{u}_i$
- Προσδιορισμός εφαπτ. δυσκαμψίας k_i
- $\hat{k}_i = k_i + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} c + \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} m$
- Επίλυση ως προς Δu_i
- $\Delta \ddot{u}_i = \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} \Delta u_i - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{u}_i - \frac{1}{2\beta} \ddot{u}_i$ $\Delta \dot{u}_i = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta u_i - \frac{\gamma}{\beta} \dot{u}_i + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \ddot{u}_i$
- $u_{i+1} = u_i + \Delta u_i$ $\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \Delta \dot{u}_i$ $\ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + \Delta \ddot{u}_i$

3) Αντικατάσταση του i με $i+1$ και επανάληψη του 2)