



ΜΕΘΟΔΟΣ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ

Ε.Ι. Σαπουντζάκης
Καθηγητής ΕΜΠ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΡΑΒΔΩΤΩΝ ΦΟΡΕΩΝ ΜΕ
ΜΗΤΡΩΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή
2. Διατύπωση της μεθόδου των υποφορέων σε επίπεδο πλαίσιο
3. Διατύπωση της μεθόδου των υποφορέων με τη θεώρηση παγιωμένου και ισοδύναμου φορέα
4. Εφαρμογή – Επίλυση επίπεδου δικτυώματος με τη μέθοδο των υποφορέων
5. Εφαρμογή – Ανάλυση επίπεδου μικτού φορέα με τη μέθοδο των υποφορέων

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

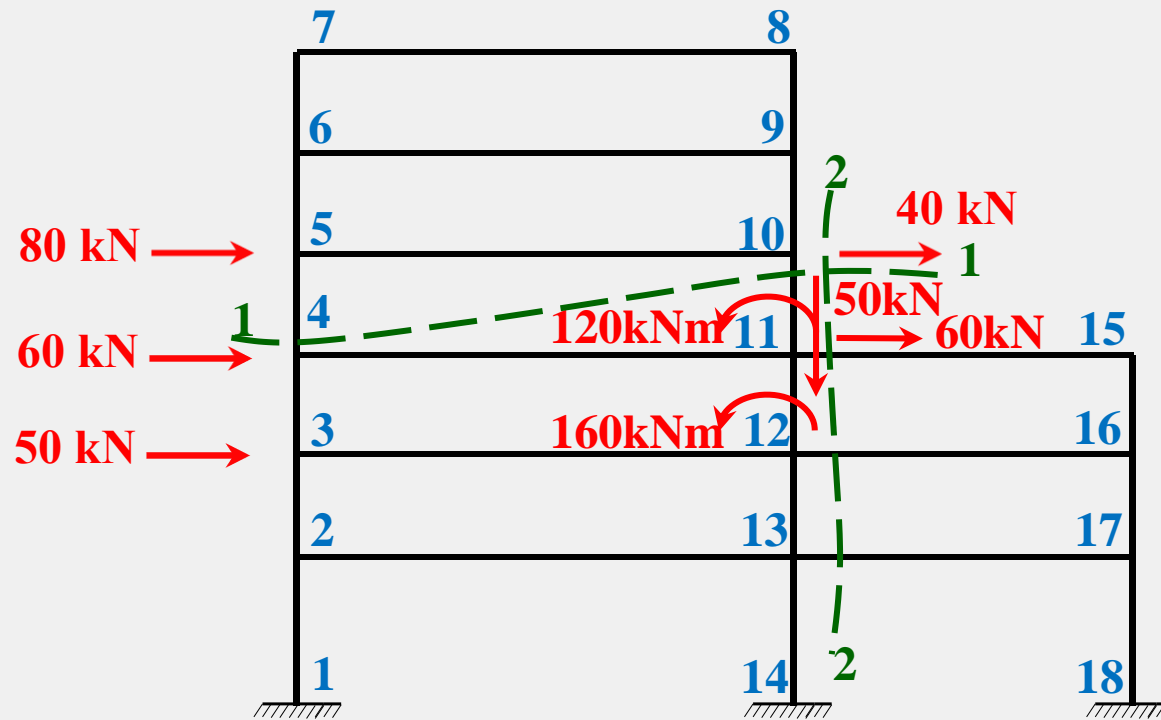
Κατά την ανάλυση πολύπλοκων φορέων του μηχανικού, όπως πολυόροφα κτίρια ή χωροδικτυώματα ευρέων, πολύπλοκων κατόψεων είναι προφανές ότι ο αριθμός των κόμβων του εξεταζόμενου φορέα και επομένως τόσο ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας κίνησης του όσο και η διάσταση της τελικής εξίσωσης στιβαρότητας προς επίλυση (για τον υπολογισμό των άγνωστων επικόμβιων μετακινήσεων και αντιδράσεων στήριξης) αυξάνεται σημαντικά. Στις περιπτώσεις κατά τις οποίες είτε η προαναφερθείσα αύξηση προκαλεί πιθανή υπολογιστική δυσχέρεια χειρισμού των μεγάλων διαστάσεων μητρώων με ταυτόχρονη σημαντική αύξηση του υπολογιστικού χρόνου ανάλυσης είτε προτιμάται ο υπολογισμός κατ' αρχήν χαρακτηριστικών άγνωστων επικόμβιων μετακινήσεων του φορέα και σε δεύτερο στάδιο των υπολοίπων, η ανάλυση του εν λόγω φορέα μπορεί να πραγματοποιηθεί με τη βοήθεια της **Μεθόδου των Υποφορέων**.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στη **Μέθοδο των Υποφορέων** ο αρχικός φορέας χωρίζεται σε **μικρότερα τμήματα** που ονομάζονται **υποφορείς ή υπερστοιχεία**. Στην περίπτωση κατά την οποία η Μέθοδος των Υποφορέων επιλέγεται για την αντιμετώπιση της υπολογιστικής δυσχέρειας χειρισμού των μεγάλων διαστάσεων μητρώων, κατά τον χωρισμό του αρχικού φορέα σε υποφορείς **καταβάλλεται προσπάθεια έτσι ώστε οι υποφορείς να έχουν παρόμοιο πλήθος βαθμών ελευθερίας**. **Στη συνέχεια οι υποφορείς αναλύονται ως ανεξάρτητοι φορείς και ακολούθως θεωρούνται ως υπερστοιχεία του αρχικού φορέα**. Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται η επίλυση φορέων με πολύ μεγάλο πλήθος βαθμών ελευθερίας, λόγω της δυνατότητας διαχείρισης μικρότερων μητρώων και της μείωσης του υπολογιστικού χρόνου ανάλυσης.

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

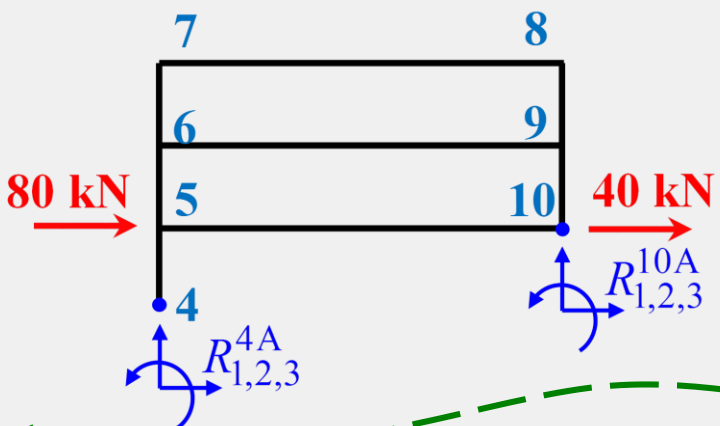


Θεωρείται το επίπεδο πλαίσιο το οποίο χωρίζεται σε τρεις υποφορείς (A, B, C) με τη βοήθεια των τομών 1-1 και 2-2. Η τομή 1-1 τέμνει το φορέα στα άκρα j των στοιχείων (4-5) και (10-11), ενώ η τομή 2-2 τον τέμνει στα άκρα j των στοιχείων (11-15), (12-16) και (13-17). Οι κόμβοι κάθε υποφορέα που πρόσκεινται στις τομές ονομάζονται ενδοσυνοριακοί κόμβοι ενώ οι υπόλοιποι κόμβοι κάθε υποφορέα ονομάζονται εσωτερικοί.

Ο κάθε ένας από τους τρεις υποφορείς ισορροπεί με τις εξωτερικές δράσεις που φορτίζουν τους κόμβους του και τις άγνωστες εσωτερικές αντιδράσεις των άλλων υποφορέων, οι οποίες προκύπτουν από τις τομές 1-1 και 2-2.

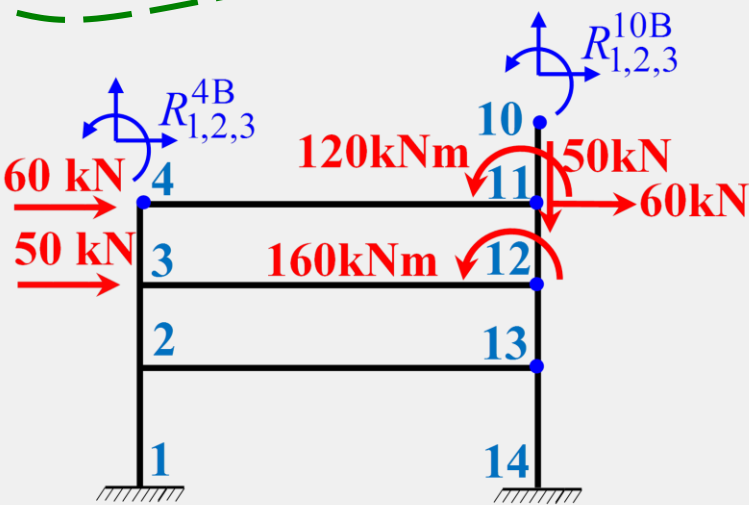
ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Μητρικές εξισώσεις ισοροπίας των υποφορέων



υποφορέας Α

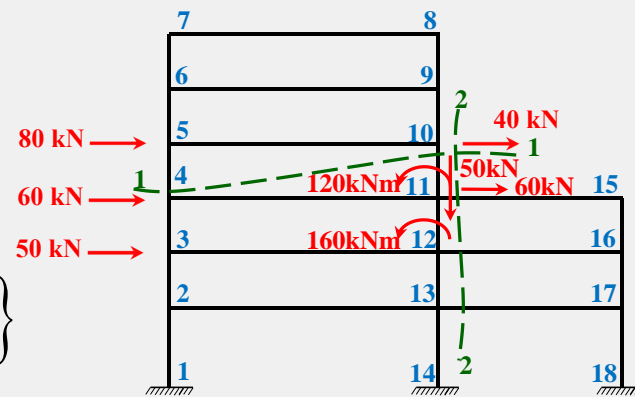
$$\{P^A\} = [K^A] \{\Delta^A\}$$



υποφορέας Β

$$\{P^B\} = [K^B] \{\Delta^B\}$$

$$\{P^C\} = [K^C] \{\Delta^C\}$$

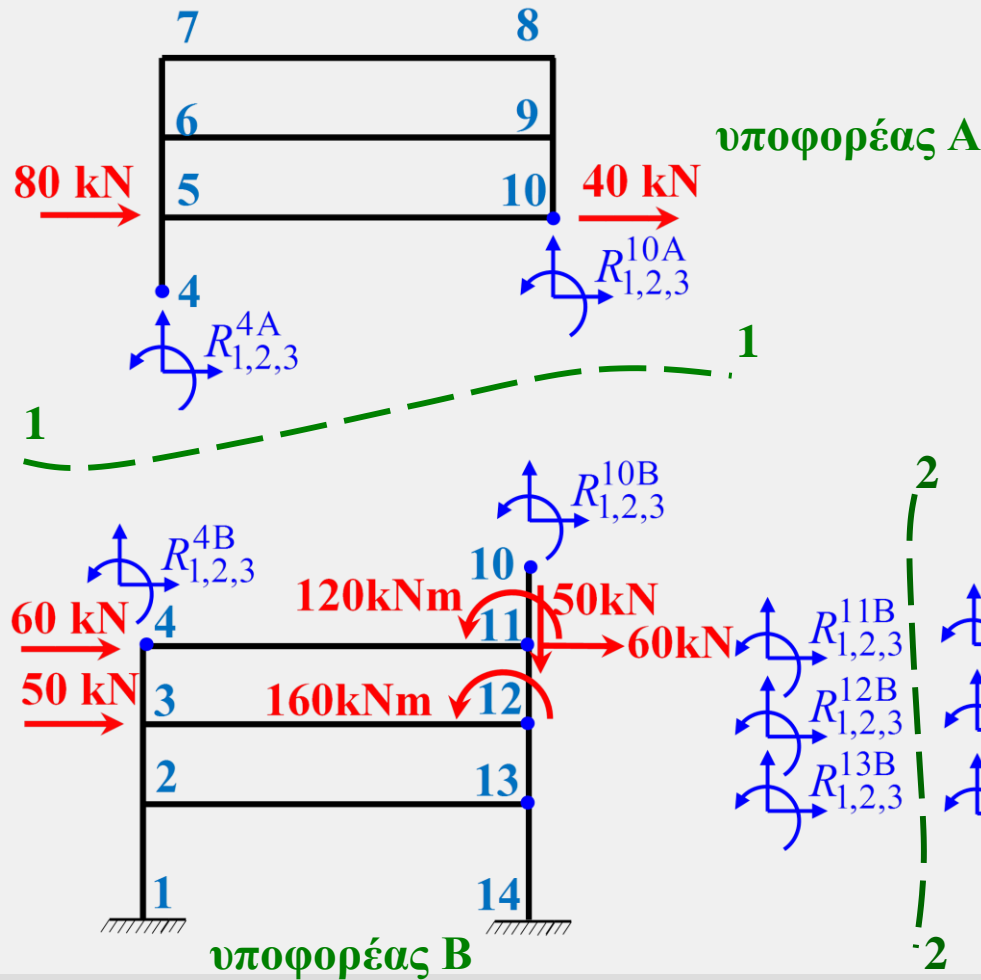


όπου

$[K^A] [K^B] [K^C]$
τα μητρώα
στιβαρότητας
των υποφο-
ρέων Α, Β, C,
τα οποία αντι-
στοιχούν στους
μη δεσμευμέ-
νους (ελεύθε-
ρους) β.ε.

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Χωρισμός των ενεργών β.ε. των υποφορέων σε **εσωτερικούς** $\{\Delta_e\}$ και **ενδοσυνοριακού** $\{\Delta_c\}$



$$\begin{bmatrix} \{P_e^A\} \\ \{R^A + P_{cc}^A\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ee}^A] & [K_{ec}^A] \\ [K_{ce}^A] & [K_{cc}^A] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Delta_e^A\} \\ \{\Delta_c^A\} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \{P_e^B\} \\ \{R^B + P_{cc}^B\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ee}^B] & [K_{ec}^B] \\ [K_{ce}^B] & [K_{cc}^B] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Delta_e^B\} \\ \{\Delta_c^B\} \end{bmatrix}$$

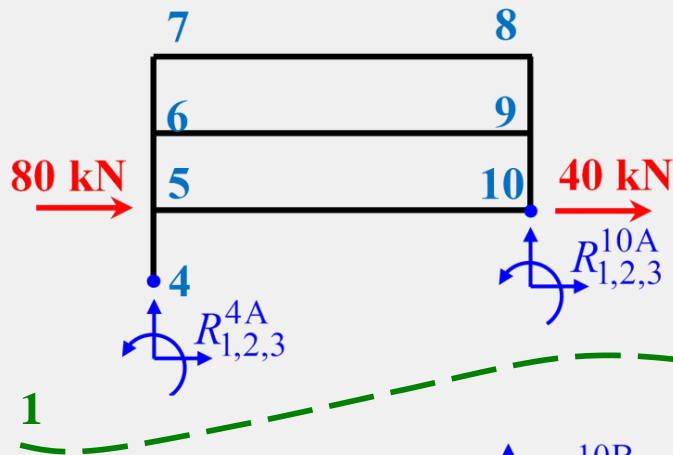
$$\begin{bmatrix} \{P_e^C\} \\ \{R^C + P_{cc}^C\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ee}^C] & [K_{ec}^C] \\ [K_{ce}^C] & [K_{cc}^C] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Delta_e^C\} \\ \{\Delta_c^C\} \end{bmatrix}$$

Αναδιατεταγμένες
μητρικές σχέσεις
στιβαρότητας

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

όπου τα επιμέρους μητρώα της αναδιατεταγμένης
μητρικής σχέσης του υποφορέα A γράφονται ως

$$\begin{bmatrix} \{P_e^A\} \\ \{R^A + P_{cc}^A\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ee}^A] & [K_{ec}^A] \\ [K_{ce}^A] & [K_{cc}^A] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Delta_e^A\} \\ \{\Delta_c^A\} \end{bmatrix}$$



υποφορέας A

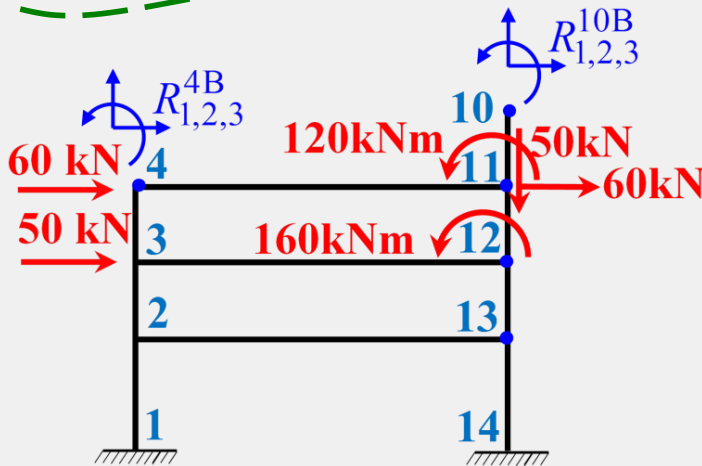
$$\{P_e^A\} = \{80 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T$$

$$\{P_{cc}^A\} = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 40 \quad 0 \quad 0\}^T$$

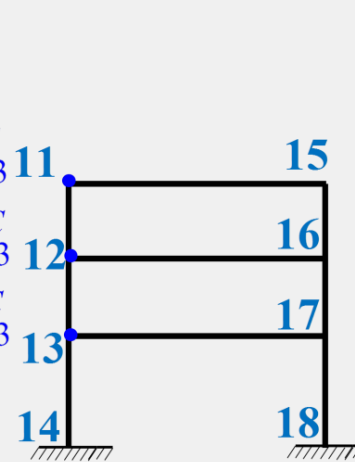
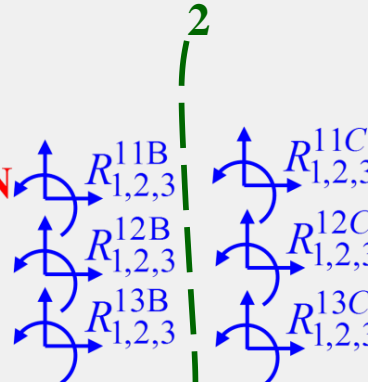
$$\{\Delta_e^A\} = \{\Delta_{1,2,3}^{(5)} \quad | \quad \Delta_{1,2,3}^{(6)} \quad | \quad \Delta_{1,2,3}^{(7)} \quad | \quad \Delta_{1,2,3}^{(8)} \quad | \quad \Delta_{1,2,3}^{(9)}\}^T$$

$$\{R^A\} = \{R_{1,2,3}^{(4A)} \quad | \quad R_{1,2,3}^{(10A)}\}^T$$

$$\{\Delta_c^A\} = \{\Delta_{1,2,3}^{(4)} \quad | \quad \Delta_{1,2,3}^{(10)}\}^T$$



υποφορέας B

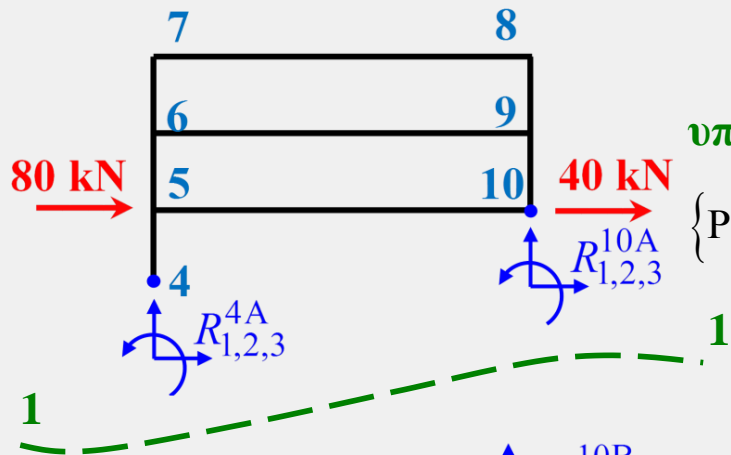


υποφορέας C

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

όπου τα επιμέρους μητρώα της αναδιατεταγμένης
μητρικής σχέσης του υποφορέα B γράφονται ως

$$\begin{bmatrix} \{P_e^B\} \\ \{R^B + P_{cc}^B\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ee}^B] & [K_{ec}^B] \\ [K_{ce}^B] & [K_{cc}^B] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Delta_e^B\} \\ \{\Delta_c^B\} \end{bmatrix}$$



υποφορέας A

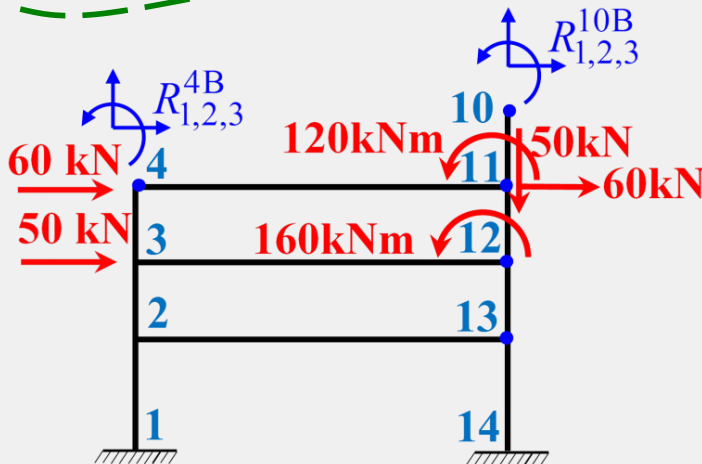
$$\{P_{cc}^B\} = \{60 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 60 \quad -50 \quad 120 \quad | \quad 0 \quad 0 \quad 160 \quad | \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T$$

$$\{P_e^B\} = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 50 \quad 0 \quad 0\}^T$$

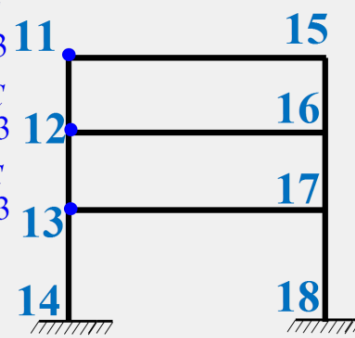
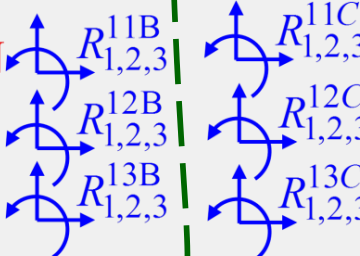
$$\{\Delta_c^B\} = \{\Delta_{1,2,3}^{(4)} \quad | \quad \Delta_{1,2,3}^{(10)} \quad | \quad \Delta_{1,2,3}^{(11)} \quad | \quad \Delta_{1,2,3}^{(12)} \quad | \quad \Delta_{1,2,3}^{(13)}\}^T$$

$$\{R^B\} = \{R_{1,2,3}^{(4B)} \quad | \quad R_{1,2,3}^{(10B)} \quad | \quad R_{1,2,3}^{(11B)} \quad | \quad R_{1,2,3}^{(12B)} \quad | \quad R_{1,2,3}^{(13B)}\}^T$$

$$\{\Delta_e^B\} = \{\Delta_{1,2,3}^{(2)} \quad | \quad \Delta_{1,2,3}^{(3)}\}^T$$



υποφορέας B



υποφορέας C

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

όπου τα επιμέρους μητρώα της αναδιατεταγμένης
μητρικής σχέσης του υποφορέα C γράφονται ως

$$\begin{bmatrix} \{P_e^C\} \\ \{R^C + P_{cc}^C\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ee}^C] & [K_{ec}^C] \\ [K_{ce}^C] & [K_{cc}^C] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Delta_e^C\} \\ \{\Delta_c^C\} \end{bmatrix}$$

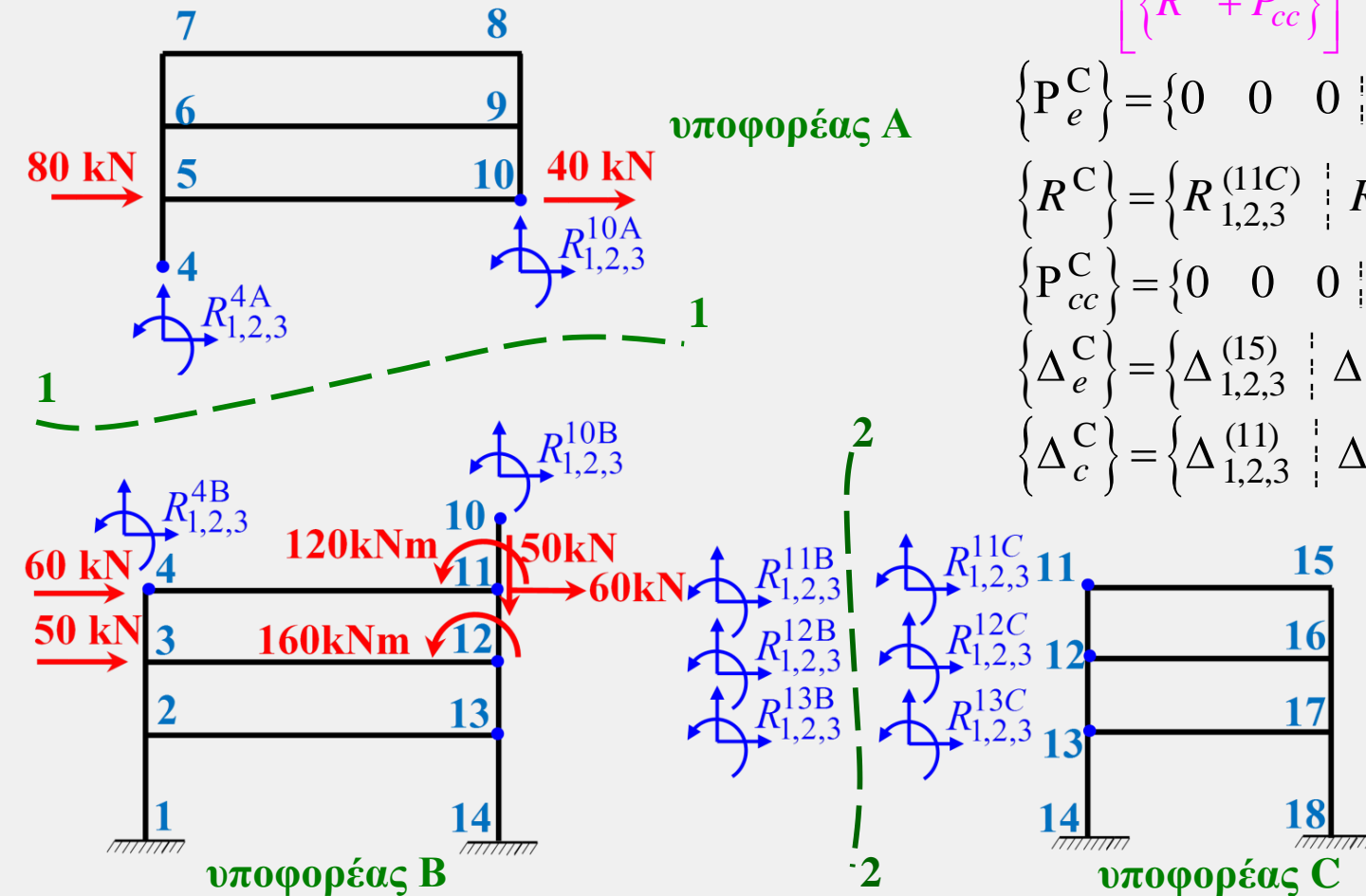
$$\{P_e^C\} = \{0 \ 0 \ 0 \ | \ 0 \ 0 \ 0 \ | \ 0 \ 0 \ 0\}^T$$

$$\{R^C\} = \{R_{1,2,3}^{(11C)} \ | \ R_{1,2,3}^{(12C)} \ | \ R_{1,2,3}^{(13C)}\}^T$$

$$\{P_{cc}^C\} = \{0 \ 0 \ 0 \ | \ 0 \ 0 \ 0 \ | \ 0 \ 0 \ 0\}^T$$

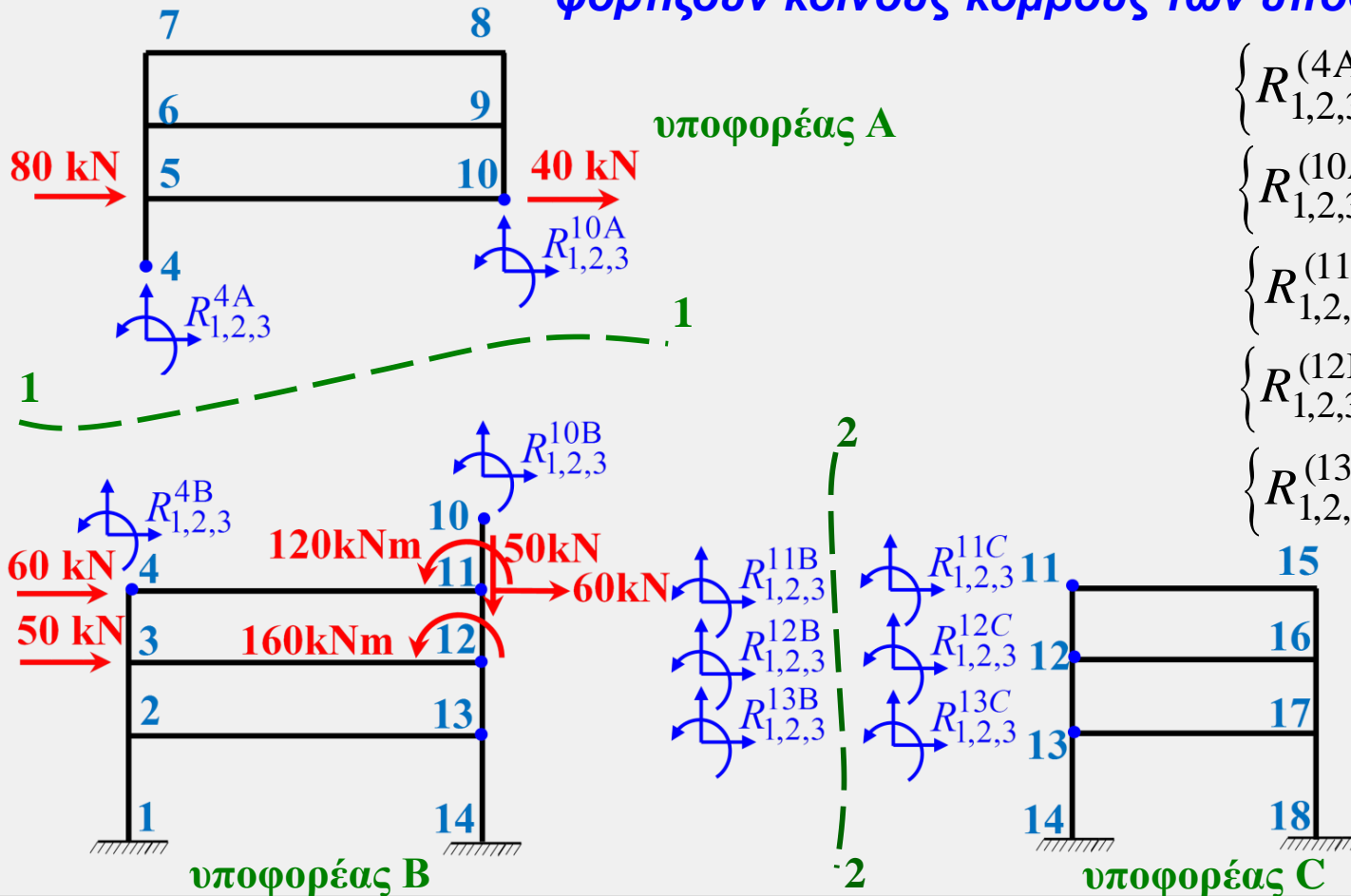
$$\{\Delta_e^C\} = \{\Delta_{1,2,3}^{(15)} \ | \ \Delta_{1,2,3}^{(16)} \ | \ \Delta_{1,2,3}^{(17)}\}^T$$

$$\{\Delta_c^C\} = \{\Delta_{1,2,3}^{(11)} \ | \ \Delta_{1,2,3}^{(12)} \ | \ \Delta_{1,2,3}^{(13)}\}^T$$



ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Λαμβάνοντας υπόψη την Αρχή Δράσης – Αντίδρασης είναι προφανές ότι το άθροισμα των αντιδράσεων που φορτίζουν κοινούς κόμβους των υποφορέων μηδενίζεται



$$\begin{aligned} \{R_{1,2,3}^{(4A)}\} + \{R_{1,2,3}^{(4B)}\} &= \{0\} \\ \{R_{1,2,3}^{(10A)}\} + \{R_{1,2,3}^{(10B)}\} &= \{0\} \\ \{R_{1,2,3}^{(11A)}\} + \{R_{1,2,3}^{(11C)}\} &= \{0\} \\ \{R_{1,2,3}^{(12B)}\} + \{R_{1,2,3}^{(12C)}\} &= \{0\} \\ \{R_{1,2,3}^{(13B)}\} + \{R_{1,2,3}^{(13C)}\} &= \{0\} \end{aligned}$$

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Στατική συμπύκνωση των εσωτερικών β.ε. $\{\Delta_e\}$ κάθε υποφορέα

$$\begin{bmatrix} \{P_e^A\} \\ \{R^A + P_{cc}^A\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ee}^A] & [K_{ec}^A] \\ [K_{ce}^A] & [K_{cc}^A] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Delta_e^A\} \\ \{\Delta_c^A\} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \{P_e^B\} \\ \{R^B + P_{cc}^B\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ee}^B] & [K_{ec}^B] \\ [K_{ce}^B] & [K_{cc}^B] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Delta_e^B\} \\ \{\Delta_c^B\} \end{bmatrix}$$

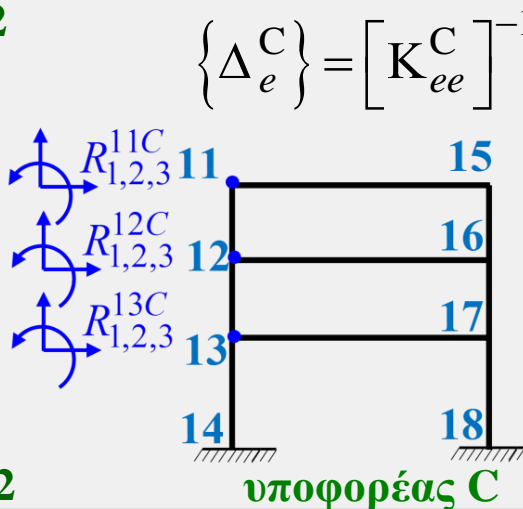
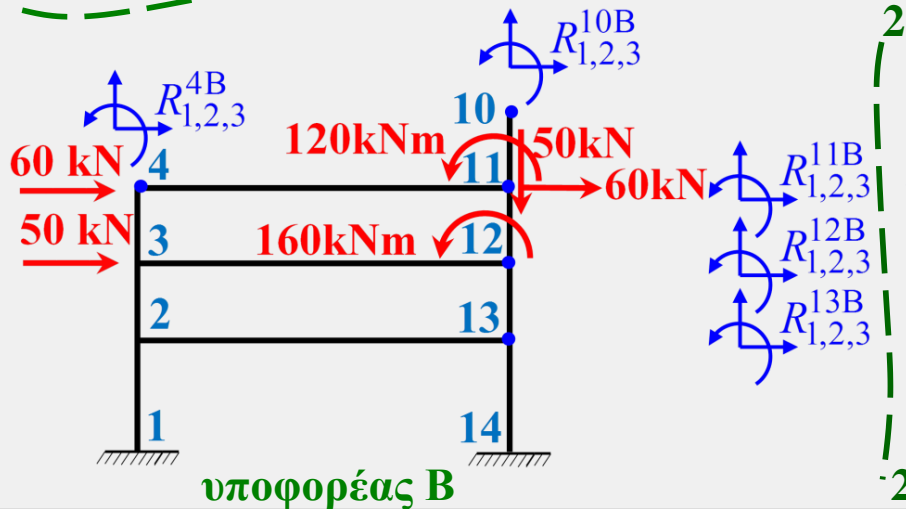
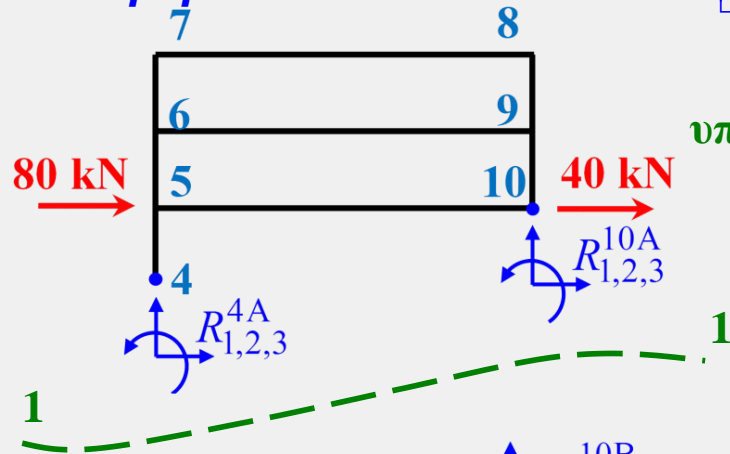
υποφορέας Α

$$\begin{bmatrix} \{P_e^C\} \\ \{R^C + P_{cc}^C\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ee}^C] & [K_{ec}^C] \\ [K_{ce}^C] & [K_{cc}^C] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Delta_e^C\} \\ \{\Delta_c^C\} \end{bmatrix}$$

$$\{\Delta_e^A\} = [K_{ee}^A]^{-1} \left[\{P_e^A\} - [K_{ec}^A] \{\Delta_c^A\} \right]$$

$$\{\Delta_e^B\} = [K_{ee}^B]^{-1} \left[\{P_e^B\} - [K_{ec}^B] \{\Delta_c^B\} \right]$$

$$\{\Delta_e^C\} = [K_{ee}^C]^{-1} \left[\{P_e^C\} - [K_{ec}^C] \{\Delta_c^C\} \right]$$



ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Συμπυκνωμένες μητρικές εξισώσεις ισοροπίας υποφορέων

$$\begin{bmatrix} \{P_e^A\} \\ \{R^A + P_{cc}^A\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ee}^A] & [K_{ec}^A] \\ [K_{ce}^A] & [K_{cc}^A] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Delta_e^A\} \\ \{\Delta_c^A\} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \{P_e^B\} \\ \{R^B + P_{cc}^B\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ee}^B] & [K_{ec}^B] \\ [K_{ce}^B] & [K_{cc}^B] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Delta_e^B\} \\ \{\Delta_c^B\} \end{bmatrix}$$

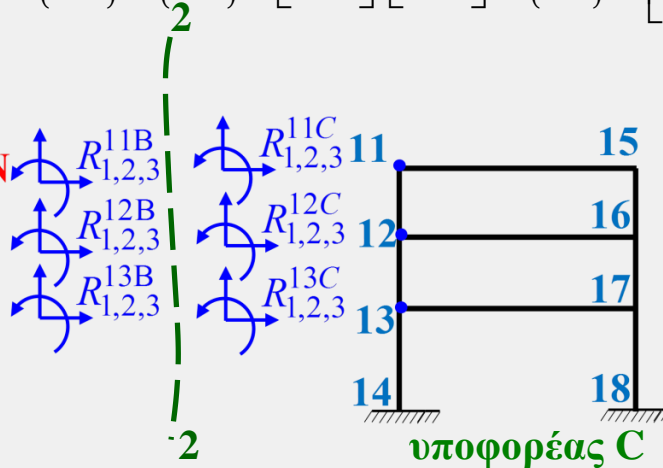
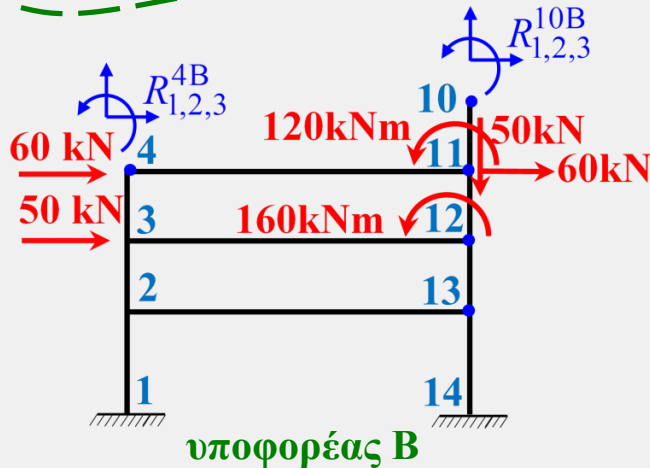
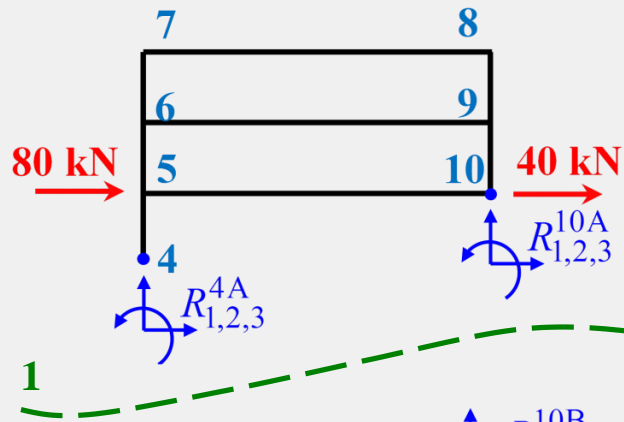
$$\begin{bmatrix} \{P_e^C\} \\ \{R^C + P_{cc}^C\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ee}^C] & [K_{ec}^C] \\ [K_{ce}^C] & [K_{cc}^C] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Delta_e^C\} \\ \{\Delta_c^C\} \end{bmatrix}$$

υποφορέας A

$$\{R^A\} + \{P_{cc}^A\} - [K_{ce}^A] [K_{ee}^A]^{-1} \{P_e^A\} = \left[[K_{cc}^A] - [K_{ce}^A] [K_{ee}^A]^{-1} [K_{ec}^A] \right] \{\Delta_c^A\}$$

$$\{R^B\} + \{P_{cc}^B\} - [K_{ce}^B] [K_{ee}^B]^{-1} \{P_e^B\} = \left[[K_{cc}^B] - [K_{ce}^B] [K_{ee}^B]^{-1} [K_{ec}^B] \right] \{\Delta_c^B\}$$

$$\{R^C\} + \{P_{cc}^C\} - [K_{ce}^C] [K_{ee}^C]^{-1} \{P_e^C\} = \left[[K_{cc}^C] - [K_{ce}^C] [K_{ee}^C]^{-1} [K_{ec}^C] \right] \{\Delta_c^C\}$$



ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

**Συμπυκνωμένες μητρικές
εξισώσεις ισορροπίας υποφορέων
= εξισώσεις ισορροπίας
υπερστοιχείων**

$$\begin{bmatrix} \{P_e^A\} \\ \{R^A + P_{cc}^A\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ee}^A] & [K_{ec}^A] \\ [K_{ce}^A] & [K_{cc}^A] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Delta_e^A\} \\ \{\Delta_c^A\} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \{P_e^B\} \\ \{R^B + P_{cc}^B\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ee}^B] & [K_{ec}^B] \\ [K_{ce}^B] & [K_{cc}^B] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Delta_e^B\} \\ \{\Delta_c^B\} \end{bmatrix}$$

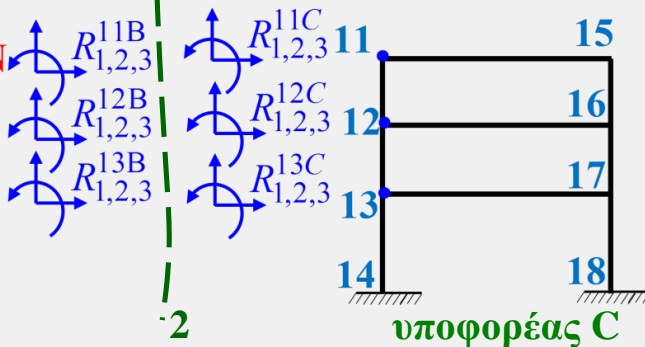
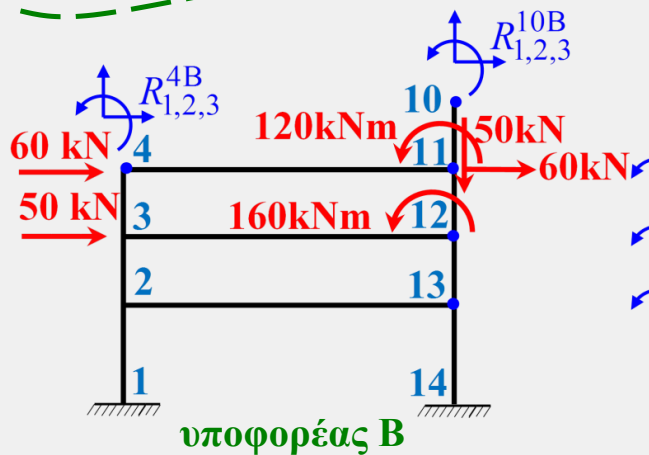
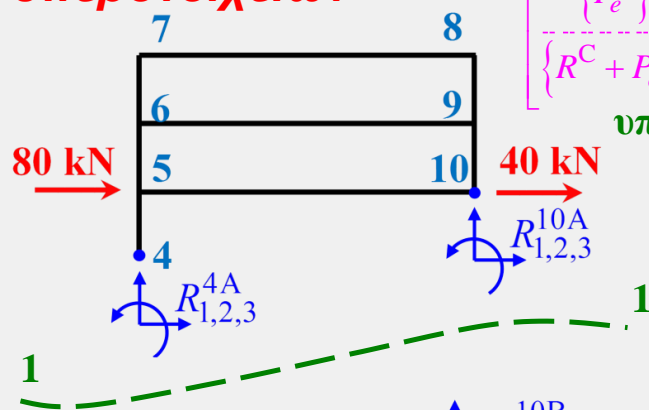
$$\begin{bmatrix} \{P_e^C\} \\ \{R^C + P_{cc}^C\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ee}^C] & [K_{ec}^C] \\ [K_{ce}^C] & [K_{cc}^C] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Delta_e^C\} \\ \{\Delta_c^C\} \end{bmatrix}$$

υποφορέας A

ή ΠΙΟ
ΣΥΝΟΠΤΙΚΑ

$$\begin{cases} \{P_c^A\} = \{R^A\} + \{P_{cc}^A\} - \{S_c^A\} = [K_c^A] \{\Delta_c^A\} \\ \{P_c^B\} = \{R^B\} + \{P_{cc}^B\} - \{S_c^B\} = [K_c^B] \{\Delta_c^B\} \\ \{P_c^C\} = \{R^C\} + \{P_{cc}^C\} - \{S_c^C\} = [K_c^C] \{\Delta_c^C\} \end{cases}$$

όπου $[K_c^I], \{S_c^I\}$ τα συμπυκνωμένα μητρώα
στιβαρότητας και εξωτερικών δράσεων των
υποφορέων A, B, C



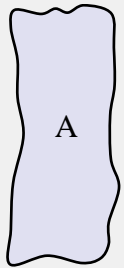
$$[K_c^A] = [K_{cc}^A] - [K_{ce}^A] [K_{ee}^A]^{-1} [K_{ec}^A]$$

$$[K_c^B] = [K_{cc}^B] - [K_{ce}^B] [K_{ee}^B]^{-1} [K_{ec}^B]$$

$$[K_c^C] = [K_{cc}^C] - [K_{ce}^C] [K_{ee}^C]^{-1} [K_{ec}^C]$$

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Σχηματική παράσταση του φορέα αποτελούμενου από τρία υπερστοιχεία (A, B, C) και δύο υπερκόμβους (1, 2)

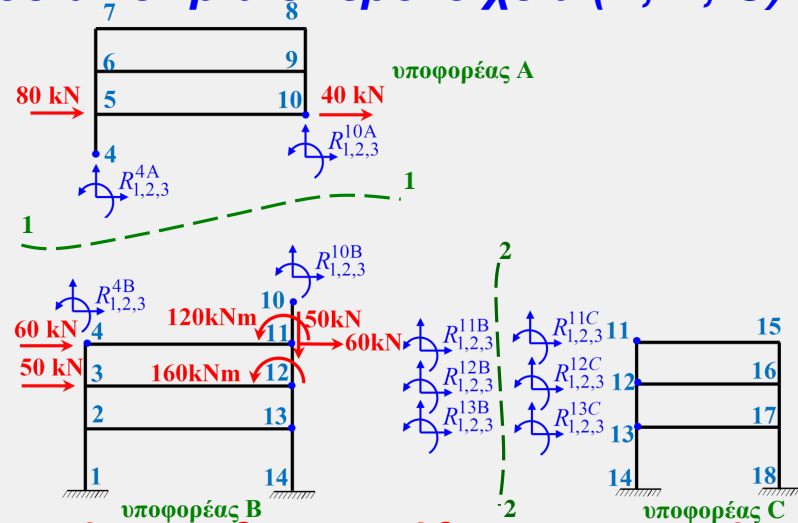


Βαθμοί ελευθερίας υπερκόμβων

$$\begin{aligned} \{\Delta_c^1\} &= \left\{ \Delta_{1,2,3}^{(4)} \quad \Delta_{1,2,3}^{(10)} \right\}^T \\ \{\Delta_c^2\} &= \left\{ \Delta_{1,2,3}^{(11)} \quad \Delta_{1,2,3}^{(12)} \quad \Delta_{1,2,3}^{(13)} \right\}^T \end{aligned}$$

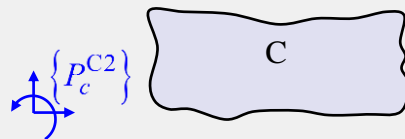
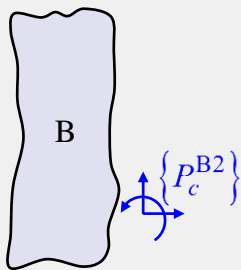
Σχέσεις συμβιβαστού των μετακινήσεων

$$\begin{aligned} \{\Delta_c^A\} &= \{\Delta_c^{A1}\} = \{\Delta_c^1\} \\ \{\Delta_c^B\} &= \begin{bmatrix} \{\Delta_c^{B1}\} \\ \{\Delta_c^{B2}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\Delta_c^1\} \\ \{\Delta_c^2\} \end{bmatrix} \\ \{\Delta_c^C\} &= \{\Delta_c^{C2}\} = \{\Delta_c^2\} \end{aligned}$$



Ο διαχωρισμός των β.ε. σε κάθε υπερστοιχείο οδηγεί σε αντίστοιχο διαχωρισμό των μητρώων στιβαρότητας των υπερστοιχείων

$$\begin{aligned} \{P_c^{A1}\} &= [K_c^{A11}] \{\Delta_c^{A1}\} \\ \begin{bmatrix} \{P_c^{B1}\} \\ \{P_c^{B2}\} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} [K_c^{B11}] & [K_c^{B12}] \\ [K_c^{B21}] & [K_c^{B22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Delta_c^{B1}\} \\ \{\Delta_c^{B2}\} \end{bmatrix} \\ \{P_c^{C2}\} &= [K_c^{C22}] \{\Delta_c^{C2}\} \end{aligned}$$



ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Μόρφωση ολικού μητρώου στιβαρότητας φορέα αποτελούμενου από τρία υπερστοιχεία (A, B, C) και δύο υπερκόμβους (1, 2)

Εξίσωση ισορροπίας φορέα

$$\begin{Bmatrix} \{P_c^1\} \\ \{P_c^2\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_c^{11}] & [K_c^{12}] \\ [K_c^{21}] & [K_c^{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta_c^1\} \\ \{\Delta_c^2\} \end{Bmatrix}$$

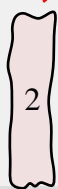
όπου από τη σύνθεση των μητρώων στιβαρότητας

$$[K_c^{11}] = [K_c^{A11}] + [K_c^{B11}]$$

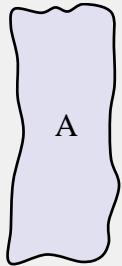
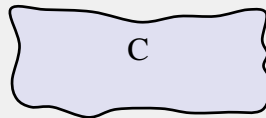
$$[K_c^{12}] = [K_c^{B12}] \quad [K_c^{21}] = [K_c^{B21}]$$

$$[K_c^{22}] = [K_c^{B22}] + [K_c^{C22}]$$

$$\{P_c^2\}$$



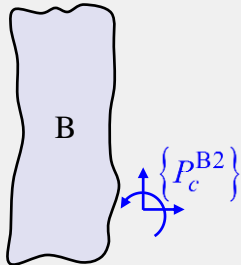
$$\{P_c^{C2}\}$$



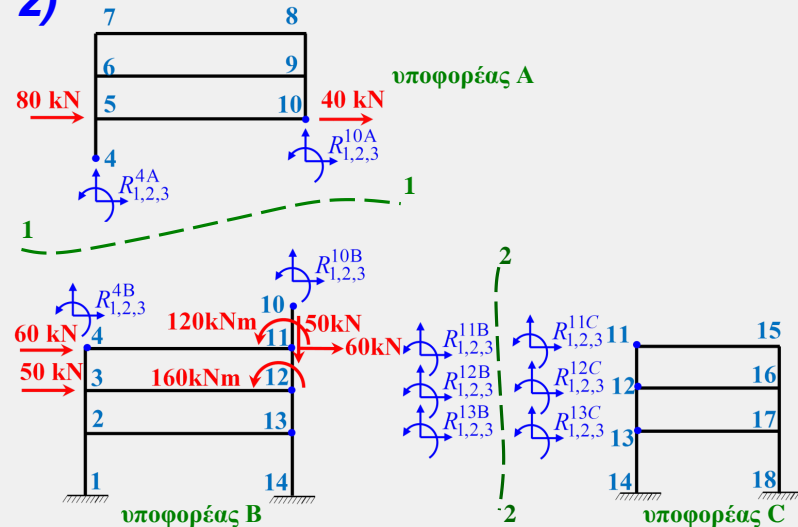
$$\{P_c^{A1}\}$$



$$\{P_c^{B1}\}$$



$$\{P_c^{B2}\}$$



ενώ τα μητρώα επικόμβιας φόρτισης θα δίνονται από τις σχέσεις

$$\{P_c^1\} = \{P_c^{A1}\} + \{P_c^{B1}\}$$

$$\{P_c^2\} = \{P_c^{B2}\} + \{P_c^{C2}\}$$

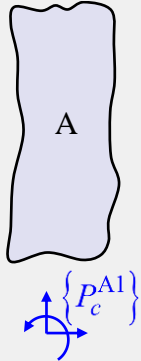
ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Εκφράσεις δράσεων του φορέα στους δύο υπερκόμβους (1, 2)

Τα μητρώα επικόμβιας φόρτισης όπως αναφέρθηκε δίνονται από τις σχέσεις

$$\{P_c^1\} = \{P_c^{A1}\} + \{P_c^{B1}\}$$

$$\{P_c^2\} = \{P_c^{B2}\} + \{P_c^{C2}\}$$

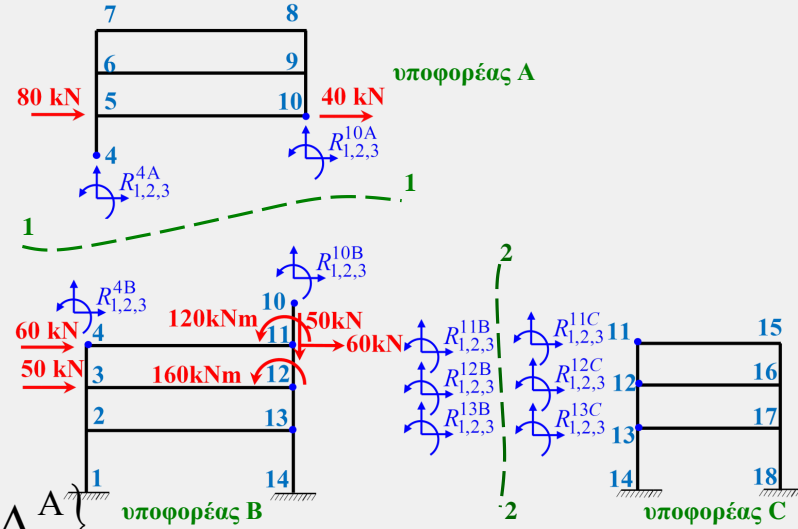
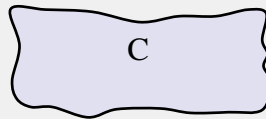
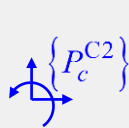
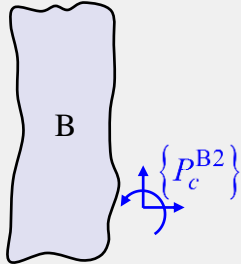
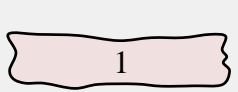


Γνωρίζοντας ότι

$$\{P_c^A\} = \{R^A\} + \{P_{cc}^A\} - \{S_c^A\} = [K_c^A] \{\Delta_c^A\}$$

$$\{P_c^B\} = \{R^B\} + \{P_{cc}^B\} - \{S_c^B\} = [K_c^B] \{\Delta_c^B\}$$

$$\{P_c^C\} = \{R^C\} + \{P_{cc}^C\} - \{S_c^C\} = [K_c^C] \{\Delta_c^C\}$$



και ότι

$$\{R^{A1}\} + \{R^{B1}\} = \{0\}$$

$$\{R^{B2}\} + \{R^{C2}\} = \{0\}$$

Εκφράσεις
δράσεων
στους δύο
υπερκόμβους
(1, 2)

$$\{P_c^1\} = \{P_{cc}^{A1}\} - \{S_c^{A1}\} + \{P_{cc}^{B1}\} - \{S_c^{B1}\}$$

$$\{P_c^2\} = \{P_{cc}^{B2}\} - \{S_c^{B2}\} + \{P_{cc}^{C2}\} - \{S_c^{C2}\}$$

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Επίλυση μητρικής εξίσωσης ισορροπίας φορέα ως προς

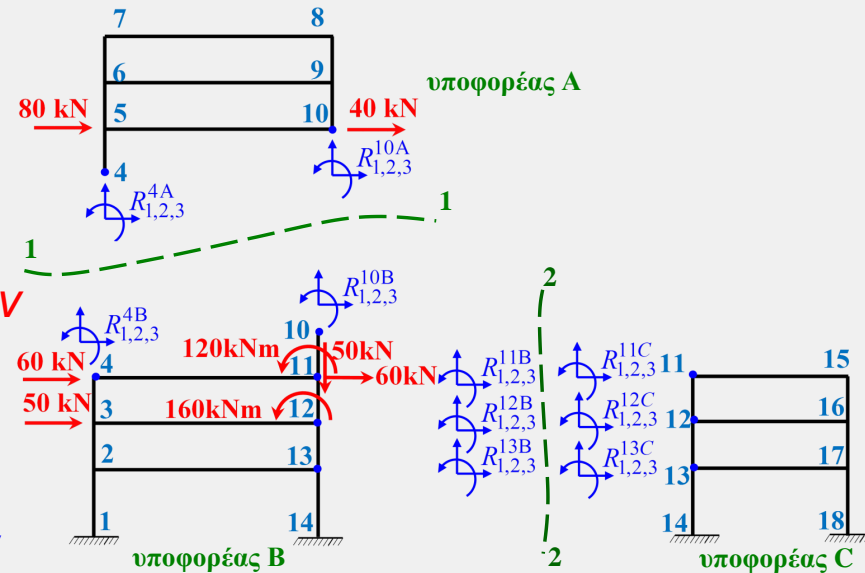
Βαθμούς ελευθερίας υπερκόμβων

$$\left\{ \Delta_c^1 \right\} = \left\{ \Delta_{1,2,3}^{(4)} \quad \Delta_{1,2,3}^{(10)} \right\}^T$$

$$\left\{ \Delta_c^2 \right\} = \left\{ \Delta_{1,2,3}^{(11)} \quad \Delta_{1,2,3}^{(12)} \quad \Delta_{1,2,3}^{(13)} \right\}^T$$

Οι μετακινήσεις αυτές δίνουν τις μετακινήσεις των ενδοσυνοριακών κόμβων των υπερστοιχείων-υποφορέων

Στη συνέχεια υπολογίζονται οι μετακινήσεις των εσωτερικών βαθμών ελευθερίας κάθε υποφορέα με τη βοήθεια των σχέσεων αποσυμπύκνωσης



$$\left\{ \Delta_e^A \right\} = \left[\mathbf{K}_{ee}^A \right]^{-1} \left[\left\{ \mathbf{P}_e^A \right\} - \left[\mathbf{K}_{ec}^A \right] \left\{ \Delta_c^A \right\} \right]$$

$$\left\{ \Delta_e^B \right\} = \left[\mathbf{K}_{ee}^B \right]^{-1} \left[\left\{ \mathbf{P}_e^B \right\} - \left[\mathbf{K}_{ec}^B \right] \left\{ \Delta_c^B \right\} \right]$$

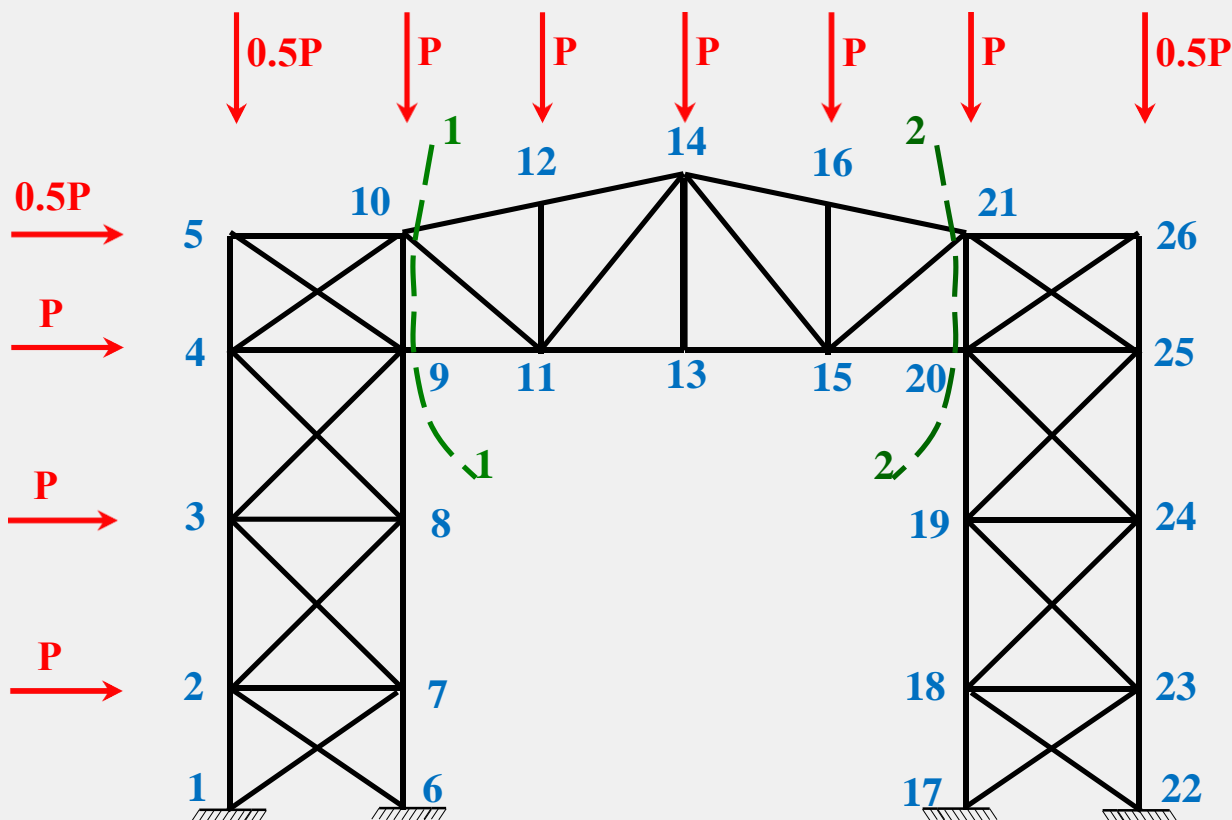
$$\left\{ \Delta_e^C \right\} = \left[\mathbf{K}_{ee}^C \right]^{-1} \left[\left\{ \mathbf{P}_e^C \right\} - \left[\mathbf{K}_{ec}^C \right] \left\{ \Delta_c^C \right\} \right]$$

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Ένα εμφανές **πλεονέκτημα** της **Μεθόδου των Υποφορέων** είναι η αποθήκευση και διαχείριση από τον υπολογιστή μητρώων μικρότερης τάξης. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η απαιτούμενη μνήμη του υπολογιστή να είναι περιορισμένη, αλλά και ο υπολογιστικός χρόνος εκτέλεσης της επίλυσης των εξισώσεων να είναι μικρότερος. Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή και τα δύο αυτά πλεονεκτήματα αποκτούν ιδιαίτερη σημασία κατά την ανάλυση κατασκευών με πολλούς βαθμούς ελευθερίας. Στο παράδειγμα, οι ενεργοί βαθμοί ελευθερίας του φορέα είναι $n = 45$, ενώ των υποφορέων είναι $n_A = 21$, $n_B = 21$, $n_C = 18$ και του συμπυκνωμένου φορέα $n_c = 15$. Με δεδομένο το γεγονός ότι κατά την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων των υποφορέων δεν είναι απαραίτητη η ταυτόχρονη αποθήκευση των μητρώων στιβαρότητας όλων των υποφορέων, αλλά ενός εκάστου διαδοχικά, γίνεται αντιληπτή η σημαντική μείωση των απαιτούμενων θέσεων αποθήκευσης των δεικτών στιβαρότητας.

*ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ
ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ ΜΕ ΤΗ ΘΕΩΡΗΣΗ
ΠΑΓΙΩΜΕΝΟΥ ΚΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ ΦΟΡΕΑ*

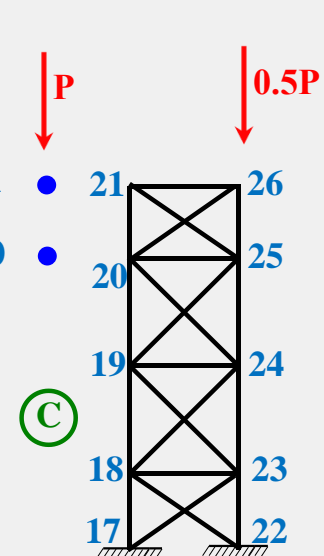
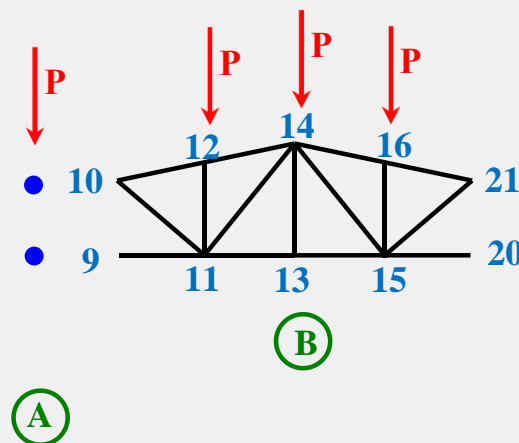
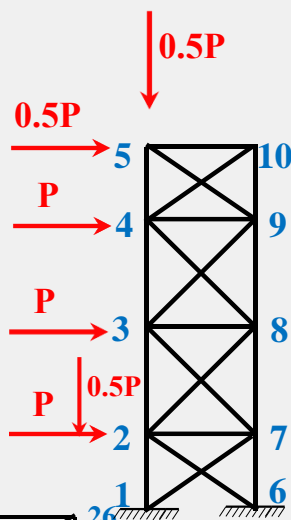
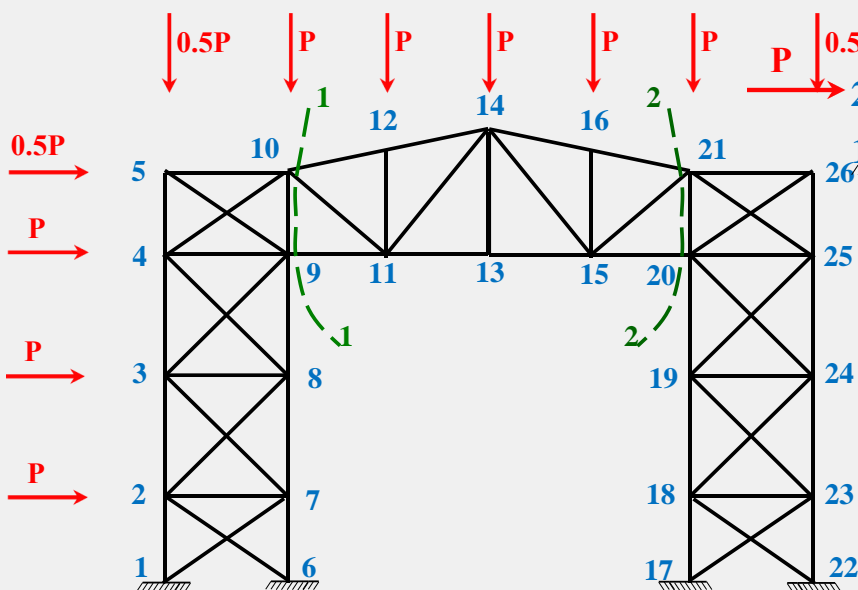
ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ ΜΕ ΤΗ ΘΕΩΡΗΣΗ ΠΑΓΙΩΜΕΝΟΥ ΚΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ ΦΟΡΕΑ



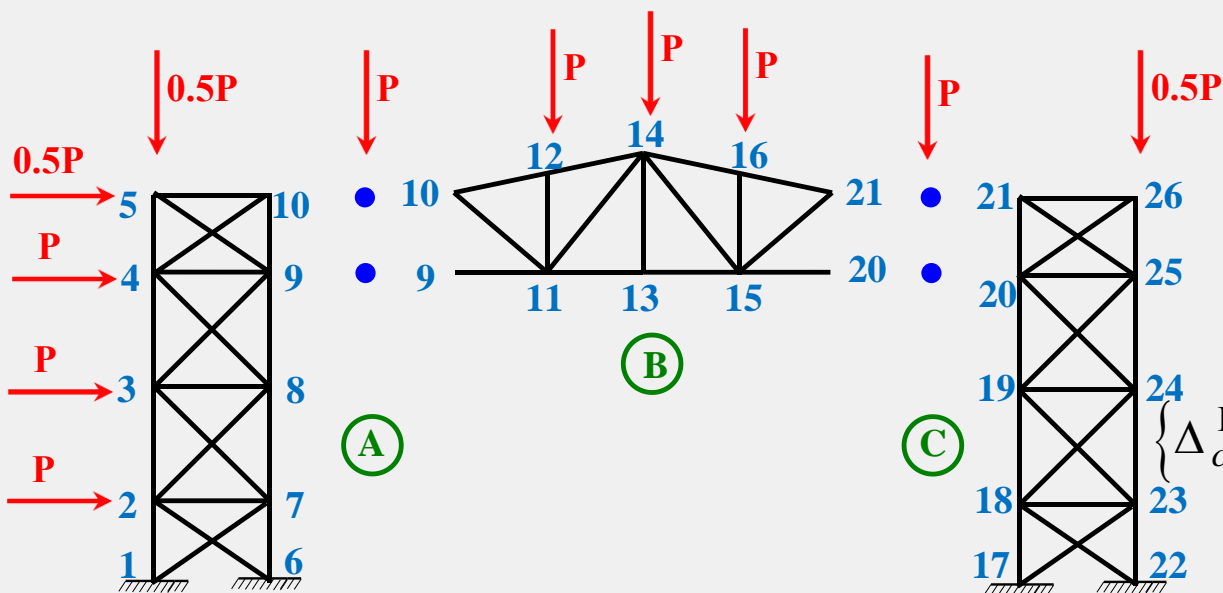
Θεωρείται το δικτύωμα του σχήματος. Ο φορέας χωρίζεται σε **τρεις υποφορείς** με τις **τομές 1-1 και 2-2**.

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ ΜΕ ΤΗ ΘΕΩΡΗΣΗ ΠΑΓΙΩΜΕΝΟΥ ΚΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ ΦΟΡΕΑ

Υπερστοιχεία και **υπερκόμβοι** του επίπεδου δικτυώματος, που προκύπτουν από τις τομές 1-1 και 2-2.



ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ ΜΕ ΤΗ ΘΕΩΡΗΣΗ ΠΑΓΙΩΜΕΝΟΥ ΚΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ ΦΟΡΕΑ



και οι ενδοσυνοριακοί βαθμοί ελευθερίας ορίζονται ως

$$\{\Delta_c^A\} = \left\{ \Delta_{1,2}^{(9)} \quad \Delta_{1,2}^{(10)} \right\}^T$$

$$\{\Delta_c^B\} = \left\{ \Delta_{1,2}^{(9)} \quad \Delta_{1,2}^{(10)} \quad \Delta_{1,2}^{(20)} \quad \Delta_{1,2}^{(21)} \right\}^T$$

$$\{\Delta_c^C\} = \left\{ \Delta_{1,2}^{(20)} \quad \Delta_{1,2}^{(21)} \right\}^T$$

Έτσι, οι εσωτερικοί βαθμοί ελευθερίας των υπερστοιχείων ορίζονται ως

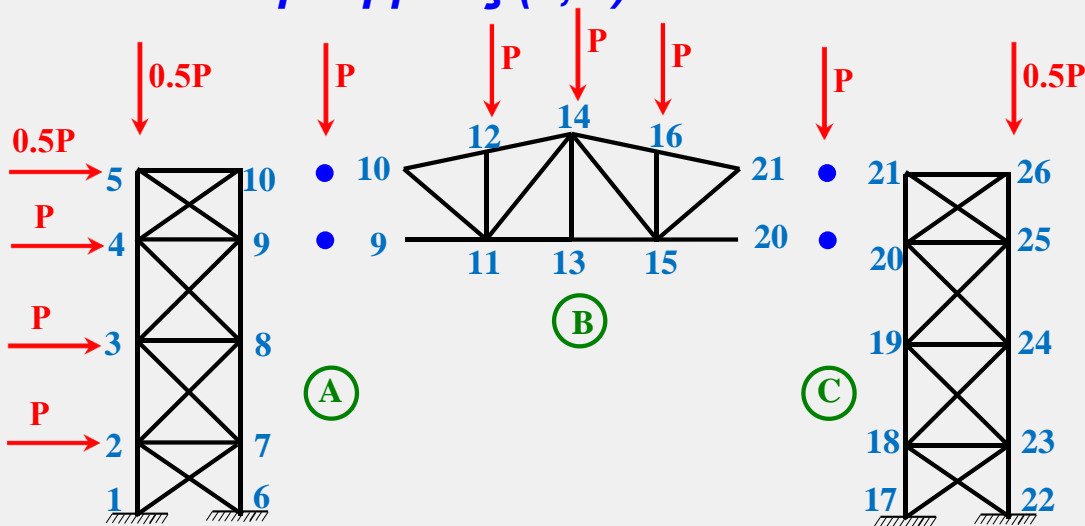
$$\{\Delta_e^A\} = \left\{ \Delta_{1,2}^{(1)} \quad \Delta_{1,2}^{(2)} \quad \Delta_{1,2}^{(3)} \quad \Delta_{1,2}^{(4)} \quad \Delta_{1,2}^{(5)} \quad \Delta_{1,2}^{(6)} \quad \Delta_{1,2}^{(7)} \quad \Delta_{1,2}^{(8)} \right\}^T$$

$$\{\Delta_e^B\} = \left\{ \Delta_{1,2}^{(11)} \quad \Delta_{1,2}^{(12)} \quad \Delta_{1,2}^{(13)} \quad \Delta_{1,2}^{(14)} \quad \Delta_{1,2}^{(15)} \quad \Delta_{1,2}^{(16)} \right\}^T$$

$$\{\Delta_e^C\} = \left\{ \Delta_{1,2}^{(17)} \quad \Delta_{1,2}^{(18)} \quad \Delta_{1,2}^{(19)} \quad \Delta_{1,2}^{(22)} \quad \Delta_{1,2}^{(23)} \quad \Delta_{1,2}^{(24)} \quad \Delta_{1,2}^{(25)} \quad \Delta_{1,2}^{(26)} \right\}^T$$

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ ΜΕ ΤΗ ΘΕΩΡΗΣΗ ΠΑΓΙΩΜΕΝΟΥ ΚΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ ΦΟΡΕΑ

Σχηματική παράσταση του φορέα αποτελούμενου από τρία υπερστοιχεία (A, B, C) και δύο υπερκόμβους (1, 2)



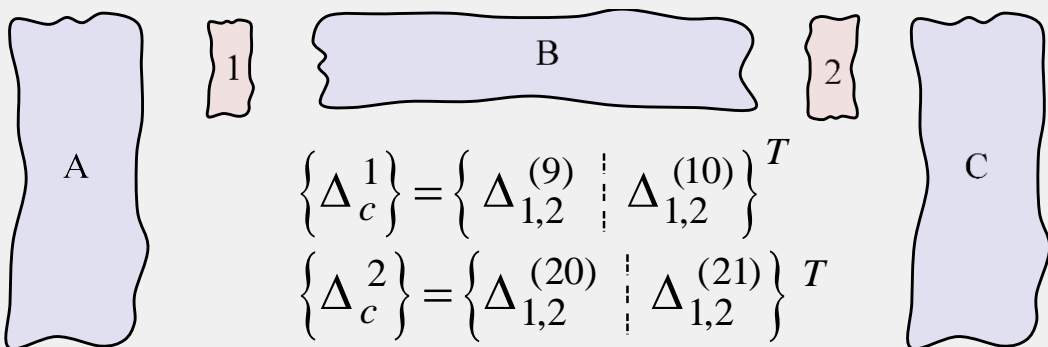
Οι ενδοσυνοριακοί βαθμοί ελευθερίας των υπερστοιχείων χωρίζονται στους αντίστοιχους βαθμούς ελευθερίας των υπερκόμβων ως

$$\{\Delta_c^A\} = \{\Delta_c^{A1}\} = \{\Delta_c^1\}$$

$$\{\Delta_c^B\} = \begin{bmatrix} \{\Delta_c^{B1}\} \\ \{\Delta_c^{B2}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\Delta_c^1\} \\ \{\Delta_c^2\} \end{bmatrix}$$

$$\{\Delta_c^C\} = \{\Delta_c^{C2}\} = \{\Delta_c^2\}$$

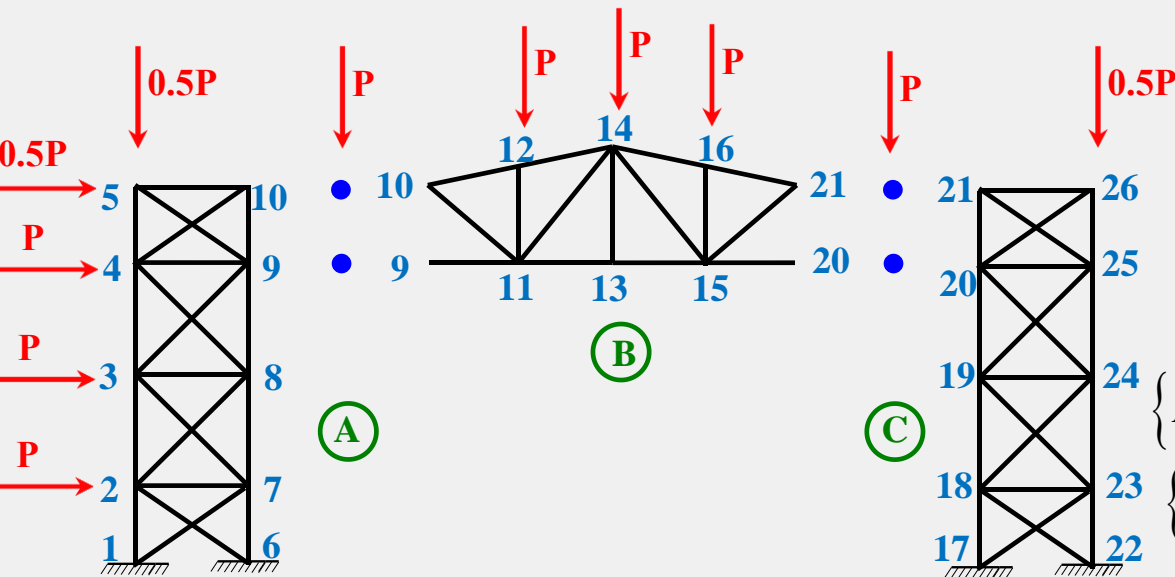
← ΟΠΟΥ



$$\{\Delta_c^1\} = \left\{ \Delta_{1,2}^{(9)} \quad \Delta_{1,2}^{(10)} \right\}^T$$

$$\{\Delta_c^2\} = \left\{ \Delta_{1,2}^{(20)} \quad \Delta_{1,2}^{(21)} \right\}^T$$

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ ΜΕ ΤΗ ΘΕΩΡΗΣΗ ΠΑΓΙΩΜΕΝΟΥ ΚΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ ΦΟΡΕΑ



και σε δράσεις που ασκούνται στους ενδοσυνοριακούς βαθμούς ελευθερίας, τις οποίες αντιστοιχούμε στους υπερκόμβους 1 και 2 ως

$$\{P^1\} = \{P_{1,2}^{(9)} \quad P_{1,2}^{(10)}\}^T = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad -P\}^T$$

$$\{P^2\} = \{P_{1,2}^{(20)} \quad P_{1,2}^{(21)}\}^T = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad -P\}^T$$

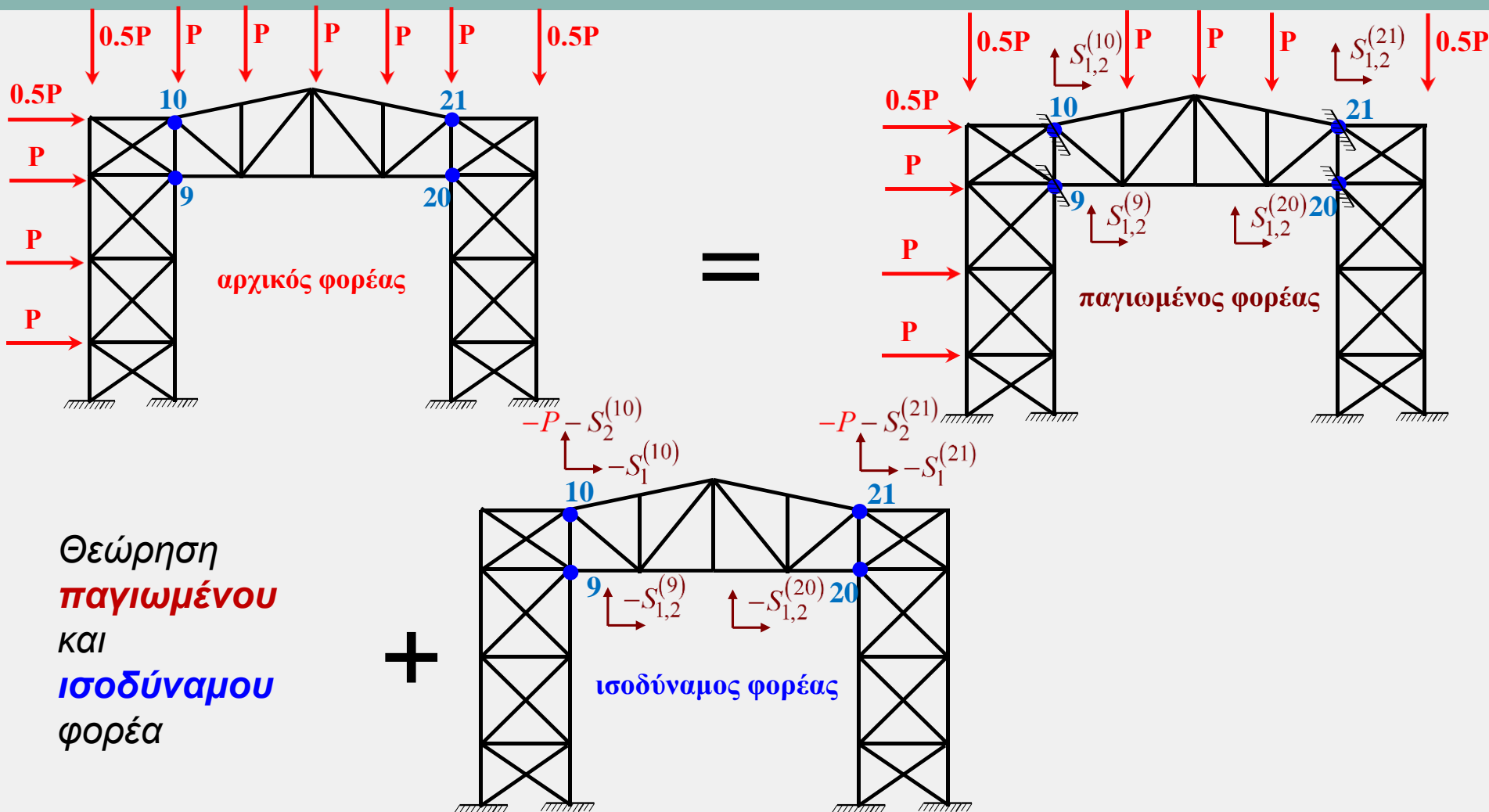
Οι εξωτερικές δράσεις που φορτίζουν τον φορέα χωρίζονται και αυτές σε **δράσεις που ασκούνται στους εσωτερικούς βαθμούς ελευθερίας**

$$\{P_e^A\} = \{0 \quad 0 \quad P \quad 0 \quad P \quad 0 \quad P \quad 0 \quad 0.5P \quad -0.5P \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T$$

$$\{P_e^B\} = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad -P \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -P \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -P\}^T$$

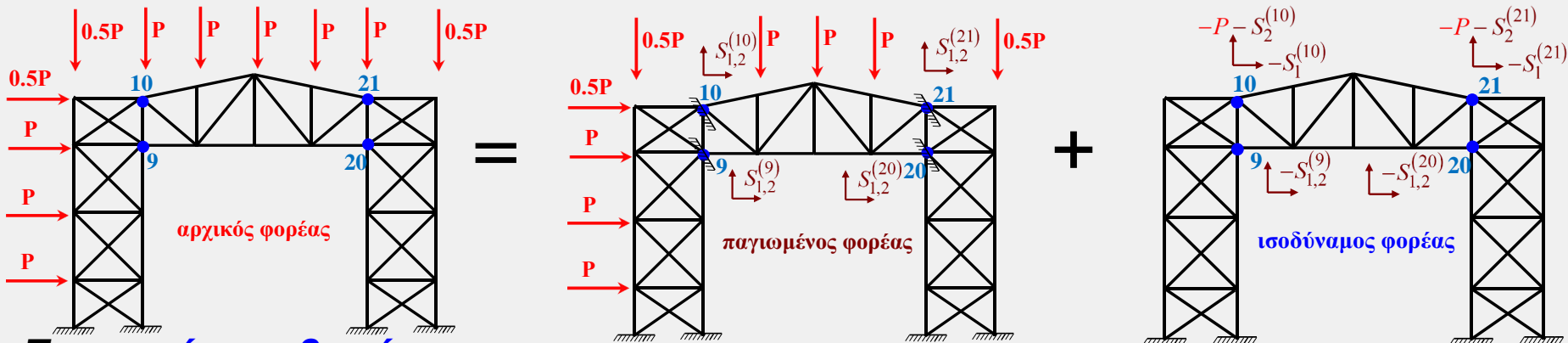
$$\{P_e^C\} = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -0.5P\}^T$$

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ ΜΕ ΤΗ ΘΕΩΡΗΣΗ ΠΑΓΙΩΜΕΝΟΥ ΚΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ ΦΟΡΕΑ



Θεώρηση
παγιωμένου
 και
ισοδύναμου
 φορέα

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ ΜΕ ΤΗ ΘΕΩΡΗΣΗ ΠΑΓΙΩΜΕΝΟΥ ΚΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ ΦΟΡΕΑ



Τα **μητρώα στιβαρότητας των υπερστοιχείων** προκύπτουν από τη στατική συμπίκνωση των εσωτερικών βαθμών ελευθερίας

$$\begin{bmatrix} \{P_e^I\} \\ \{P_{cc}^I\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ee}^I] & [K_{ec}^I] \\ [K_{ce}^I] & [K_{cc}^I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Delta_e^I\} \\ \{\Delta_c^I\} \end{bmatrix}$$

(I=A, B, C)

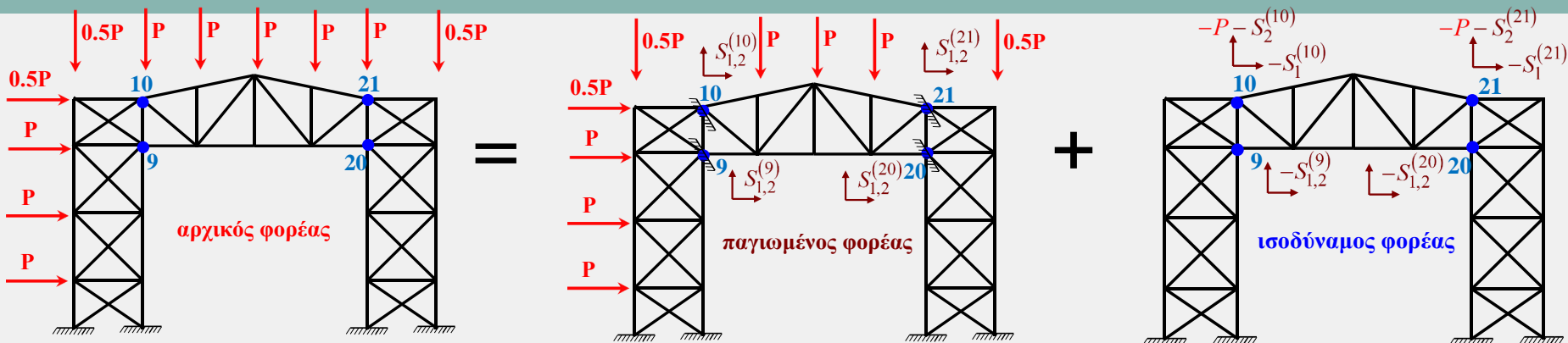
$$[K_c^I] = [K_{cc}^I] - [K_{ce}^I][K_{ee}^I]^{-1}[K_{ec}^I]$$

Τα **συμπυκνωμένα μητρώα στιβαρότητας των υπερστοιχείων** χωρίζονται σε **υπομητρώα ανάλογα με το πλήθος των υπερκόμβων με τα οποία συνδέονται μεταξύ τους**. Έτσι ακολουθώντας τον **χωρισμό των ενδοσυνοριακών βαθμών ελευθερίας**

$$[K_c^A] = [K_c^{A11}] \quad [K_c^C] = [K_c^{C22}]$$

$$[K_c^B] = \begin{bmatrix} [K_c^{B11}] & [K_c^{B12}] \\ [K_c^{B21}] & [K_c^{B22}] \end{bmatrix}$$

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ ΜΕ ΤΗ ΘΕΩΡΗΣΗ ΠΑΓΙΩΜΕΝΟΥ ΚΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ ΦΟΡΕΑ



Τα συμπτυκνωμένα μητρώα στιβαρότητας των υπερστοιχείων χωρίζονται σε υπομητρώα ανάλογα με το πλήθος των υπερκόμβων με τα οποία συνδέονται μεταξύ τους. Έτσι ακολουθώντας τον χωρισμό των ενδοσυνοριακών βαθμών ελευθερίας

$$\left[K_c^A \right] = \left[K_c^{A11} \right] \quad \left[K_c^C \right] = \left[K_c^{C22} \right]$$

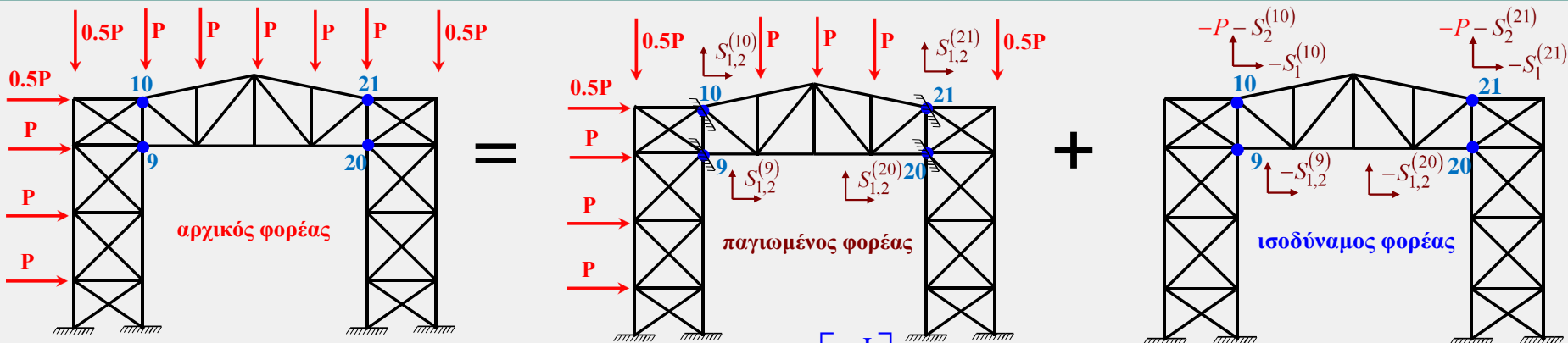
$$\left[K_c^B \right] = \begin{bmatrix} \left[K_c^{B11} \right] & \left[K_c^{B12} \right] \\ \left[K_c^{B21} \right] & \left[K_c^{B22} \right] \end{bmatrix}$$

όπου

$$\left[K_c^{IIm} \right] \quad (I=A, B, C) \\ m=1,2$$

είναι οι δράσεις που αναπτύσσονται από το υπερστοιχείο I και ασκούνται στους βαθμούς ελευθερίας του υπερκόμβου 1 λόγω μοναδιαίων και μοναδικών μετακινήσεων στους βαθμούς ελευθερίας του υπερκόμβου $m=1,2$

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ ΜΕ ΤΗ ΘΕΩΡΗΣΗ ΠΑΓΙΩΜΕΝΟΥ ΚΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ ΦΟΡΕΑ



Ο υπολογισμός των δράσεων παγίωσης $[S^J]$ ($J=1,2$) του **παγιωμένου φορέα** λόγω των εσωτερικών δράσεων $\{P_e^I\}$ επιτυγχάνεται από τη δεύτερη εξίσωση της σχέσης

$$\begin{bmatrix} \{P_e^I\} \\ \{P_{cc}^I\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ee}^I] & [K_{ec}^I] \\ [K_{ce}^I] & [K_{cc}^I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Delta_e^I\} \\ \{\Delta_c^I\} \end{bmatrix} \quad \text{για } \{\Delta_c^I\} = 0 \quad \{\Delta_e^I\} = [K_{ee}^I]^{-1} \{P_e^I\} \quad (I=A, B, C)$$

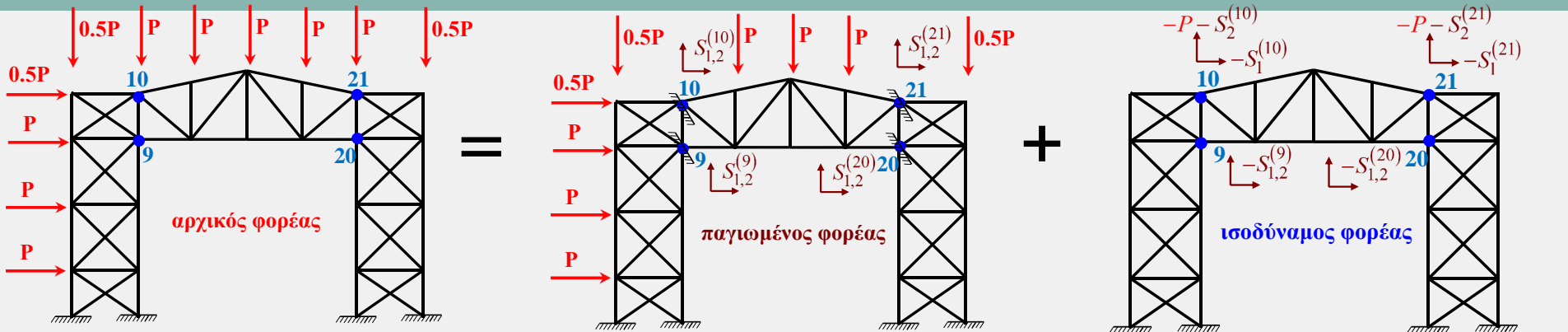
δηλαδή

$$\{S_c^I\} = [K_{ce}^I] [K_{ee}^I]^{-1} \{P_e^I\}$$

Οι υπολογισθείσες **δράσεις παγίωσης υπερστοιχείων** χωρίζονται σε **υπομητρώα ανάλογα με το πλήθος των υπερκόμβων με τα οποία συνδέονται μεταξύ τους**. Έτσι ακολουθώντας τον χωρισμό των ενδοσυνοριακών β.ε.

$$\begin{aligned} \{S_c^A\} &= \{S_c^{A1}\} & \{S_c^C\} &= \{S_c^{C2}\} \\ \{S_c^B\} &= \{S_c^{B1} \mid S_c^{B2}\}^T \end{aligned}$$

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ ΜΕ ΤΗ ΘΕΩΡΗΣΗ ΠΑΓΙΩΜΕΝΟΥ ΚΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ ΦΟΡΕΑ



$$\{S_c^A\} = \{S_c^{A1}\} \quad \{S_c^B\} = \{S_c^{B1} \quad S_c^{B2}\}^T \quad \{S_c^C\} = \{S_c^{C2}\}$$

$$\{S^1\} = \{S_c^{A1}\} + \{S_c^{B1}\}$$

$$\{S^2\} = \{S_c^{B2}\} + \{S_c^{C2}\}$$

$$\{P_c^J\} = \{P^J\} - \{S^J\}, \quad (J=1,2)$$

$$\{P^1\} = \{P_{1,2}^{(9)} \quad P_{1,2}^{(10)}\}^T = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad -P\}^T$$

$$\{P^2\} = \{P_{1,2}^{(20)} \quad P_{1,2}^{(21)}\}^T = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad -P\}^T$$

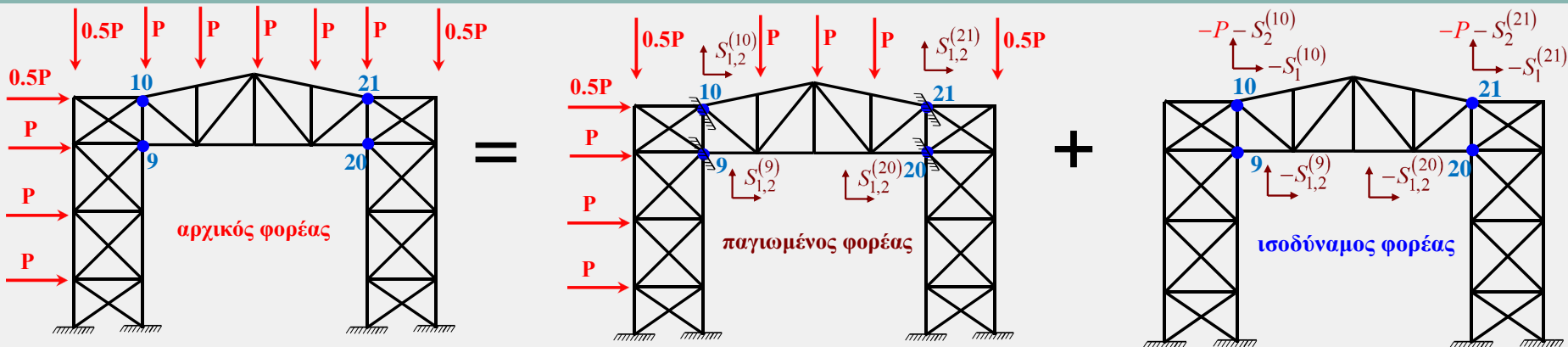
Οι υπολογισθείσες **δράσεις παγίωσης υπερστοιχείων** χωρίζονται σε **υπομητρώα ανάλογα με το πλήθος των υπερκόμβων με τα οποία συνδέονται μεταξύ τους**. Έτσι ακολουθώντας τον χωρισμό των ενδοσυνοριακών β.ε.

Οι **δράσεις παγίωσης των υπερκόμβων** του παγιωμένου φορέα προκύπτουν από την ισορροπία των **δράσεων παγίωσης των υπερστοιχείων** και δίνονται από τις σχέσεις

Οι **δράσεις του ισοδύναμου φορέα** που αντιστοιχούν στους υπερκόμβους ορίζονται από τις σχέσεις

όπου $\{P^J\}$ είναι οι **εξωτερικές δράσεις που ασκούνται στους ενδοσυνοριακούς κόμβους**, δηλαδή

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ ΜΕ ΤΗ ΘΕΩΡΗΣΗ ΠΑΓΙΩΜΕΝΟΥ ΚΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ ΦΟΡΕΑ



Σύμφωνα με τα προηγούμενα, η **εξίσωση ισορροπίας του ισοδύναμου φορέα ως προς τους υπερκόμβους $J=1,2$** γράφεται ως

$$\{P_c\} = [K_c] \{\Delta_c\} \quad \text{όπου} \quad \{P_c\} = \left\{ P_c^1 \mid P_c^2 \right\}^T \quad \{\Delta_c\} = \left\{ \Delta_c^1 \mid \Delta_c^2 \right\}$$

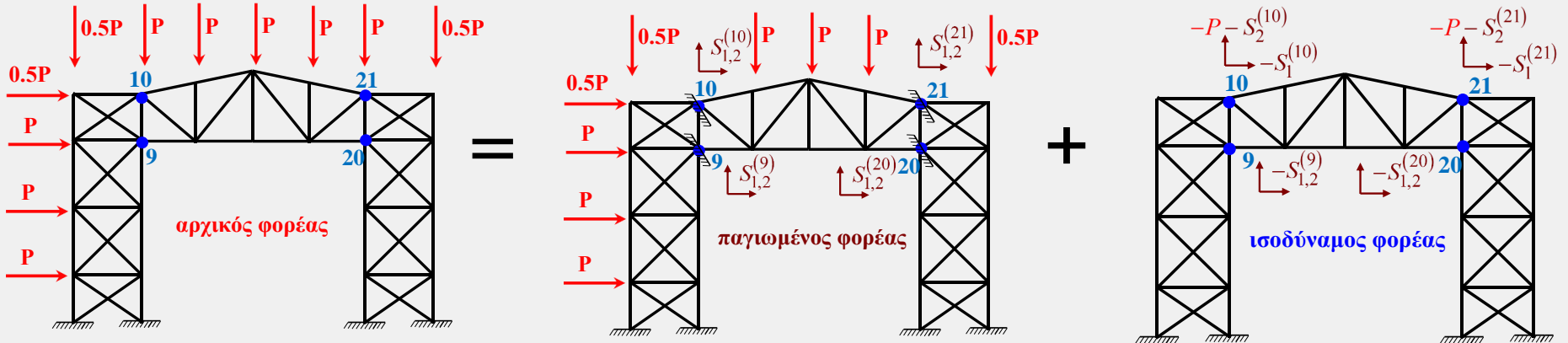
μητρώο στιβαρότητας που προκύπτει από τη σύνθεση των αντίστοιχων μ.σ. των υπερστοιχείων, ακολουθώντας την κλασική διαδικασία μόρφωσης του μ.σ. φορέα

$$[K_c] = \begin{bmatrix} [K_c^{A11}] + [K_c^{B11}] & [K_c^{B12}] \\ [K_c^{B21}] & [K_c^{B22}] + [K_c^{C22}] \end{bmatrix}$$

εξωτερικές δράσεις των υπερκόμβων

$$\{P_c^J\} = \{P^J\} - \{S^J\}, \quad (J=1,2)$$

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ ΜΕ ΤΗ ΘΕΩΡΗΣΗ ΠΑΓΙΩΜΕΝΟΥ ΚΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ ΦΟΡΕΑ



Σύμφωνα με τα προηγούμενα, η **εξίσωση ισορροπίας του ισοδύναμου φορέα ως προς τους υπερκόμβους $J=1,2$** γράφεται ως

$$\{P_c\} = [K_c] \{\Delta_c\} \quad \text{όπου} \quad \{P_c\} = \left\{ P_c^1 \parallel P_c^2 \right\}^T \quad \{\Delta_c\} = \left\{ \Delta_c^1 \parallel \Delta_c^2 \right\}$$

Επίλυση εξίσωσης σιβαρότητας \longrightarrow $\{\Delta_c\}$ **μετακινήσεις υπερκόμβων** \longrightarrow

\longrightarrow **μετακινήσεις ενδοσυνοριακών β.ε.**

$$\begin{aligned} \{\Delta_c^A\} = \{\Delta_c^{A1}\} = \{\Delta_c^1\} & \quad \{\Delta_c^B\} = \begin{bmatrix} \{\Delta_c^{B1}\} \\ \{\Delta_c^{B2}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\Delta_c^1\} \\ \{\Delta_c^2\} \end{bmatrix} \\ \{\Delta_c^C\} = \{\Delta_c^{C2}\} = \{\Delta_c^2\} & \end{aligned}$$

\longrightarrow $\{\Delta_e^I\} = [K_{ee}^I]^{-1} \left[\{P_e^I\} - [K_{ec}^I] \{\Delta_c^I\} \right]$ **μετακινήσεις εσωτερικών β.ε.**

όπου $\{P_e^I\}$ εξωτερικές δράσεις στους εσωτερικούς β.ε. του υπερστοιχείου I

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ ΜΕ ΤΗ ΘΕΩΡΗΣΗ ΠΑΓΙΩΜΕΝΟΥ ΚΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ ΦΟΡΕΑ

Βήματα Μεθόδου Υποφορέων

Βήμα 1. Χωρίζεται ο φορέας σε υποφορείς ή υπερστοιχεία (I) έτσι ώστε το πλήθος των εσωτερικών β.ε. του κάθε υπερστοιχείου να είναι της ίδιας τάξης με το σύνολο των ενδοσυνοριακών β.ε.

Βήμα 2. Μορφώνονται τα μητρώα στιβαρότητας των υπερστοιχείων I και αναδιατάσσονται έτσι ώστε να προηγούνται οι εσωτερικοί και να έπονται οι ενδοσυνοριακοί β.ε. Στη συνέχεια υπολογίζονται τα συμπυκνωμένα μ.σ. των υπερστοιχείων από τη σχέση

$$[K_c^I] = [K_{cc}^I] - [K_{ce}^I][K_{ee}^I]^{-1}[K_{ec}^I]$$

Βήμα 3. Υπολογίζονται οι δράσεις παγίωσης των υπερστοιχείων του παγιωμένου φορέα από τις σχέσεις $\{S_c^I\} = [K_{ce}^I][K_{ee}^I]^{-1}\{P_e^I\}$

Βήμα 4. Υπολογίζονται οι δράσεις του ισοδύναμου φορέα που αντιστοιχούν στους υπερκόμβους από τις σχέσεις $\{P_c^J\} = \{P^J\} - \{S^J\}$

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ ΜΕ ΤΗ ΘΕΩΡΗΣΗ ΠΑΓΙΩΜΕΝΟΥ ΚΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ ΦΟΡΕΑ

Βήματα Μεθόδου Υποφορέων

Βήμα 5. Μορφώνεται το μητρώο στιβαρότητας ως προς τους υπερκόμβους του φορέα ακολουθώντας την κλασική διαδικασία μόρφωσης του μ.σ. φορέα

$$[\mathbf{K}_c] = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_c^{A11}] + [\mathbf{K}_c^{B11}] & [\mathbf{K}_c^{B12}] \\ [\mathbf{K}_c^{B21}] & [\mathbf{K}_c^{B22}] + [\mathbf{K}_c^{C22}] \end{bmatrix}$$

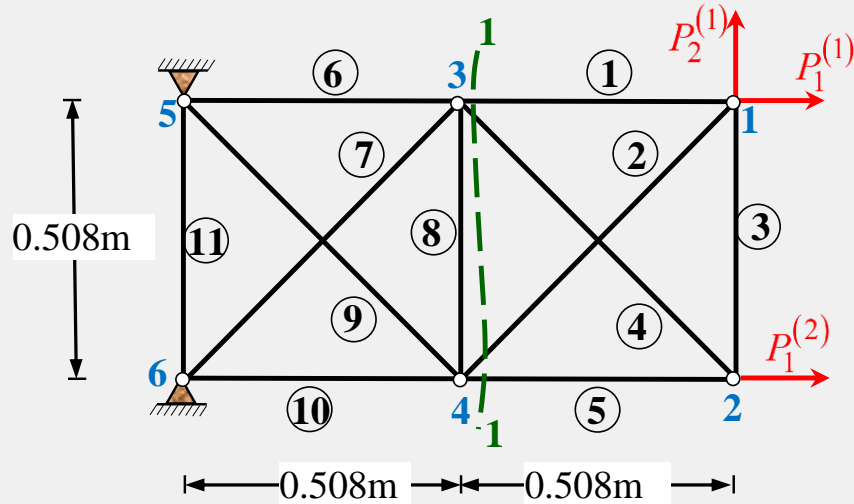
Βήμα 6. Επιλύεται η σχέση στιβαρότητας ως προς τις μετακινήσεις των υπερκόμβων $\{\mathbf{P}_c\} = [\mathbf{K}_c]\{\Delta_c\}$ και υπολογίζονται οι ενδοσυνοριακές μετακινήσεις

Βήμα 7. Υπολογίζονται οι μετακινήσεις των εσωτερικών βαθμών ελευθερίας των υπερστοιχείων από τις σχέσεις $\{\Delta_e^I\} = [\mathbf{K}_{ee}^I]^{-1} \left[\{\mathbf{P}_e^I\} - [\mathbf{K}_{ec}^I]\{\Delta_c^I\} \right]$

Βήμα 8. Υπολογίζονται τα εσωτερικά ενατικά μεγέθη των μελών του φορέα

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ



Χωρισμός σε υποφορείς, διαγράμματα ελεύθερου σώματος υποφορέων

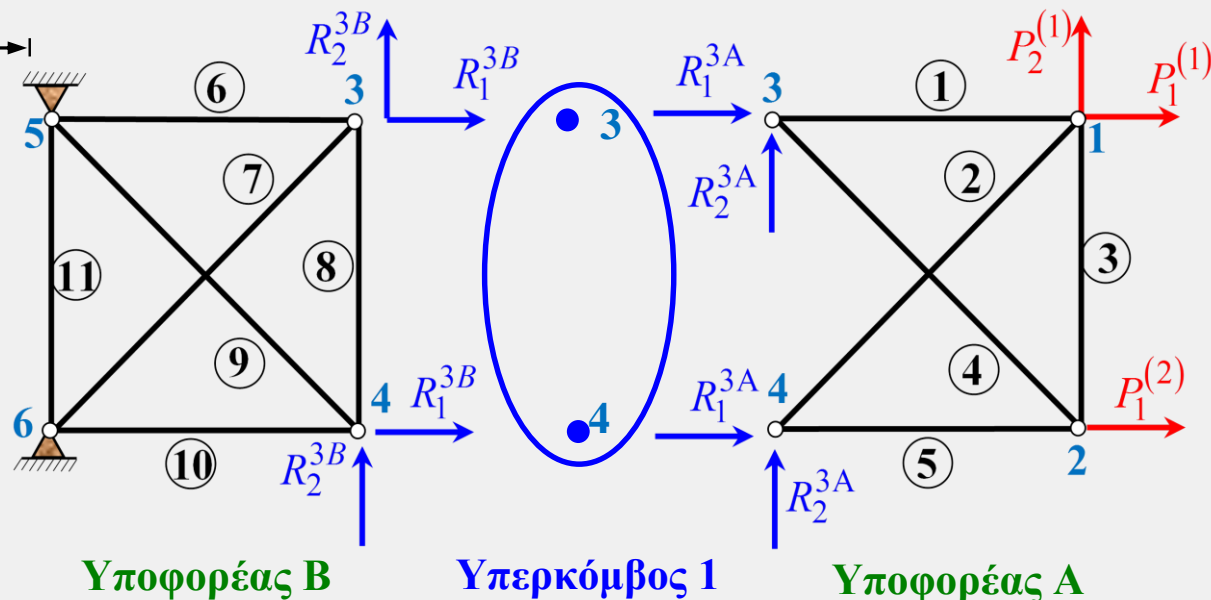
Εξεταζόμενο δικτύωμα

Στοιχεία γεωμετρίας και υλικού μελών

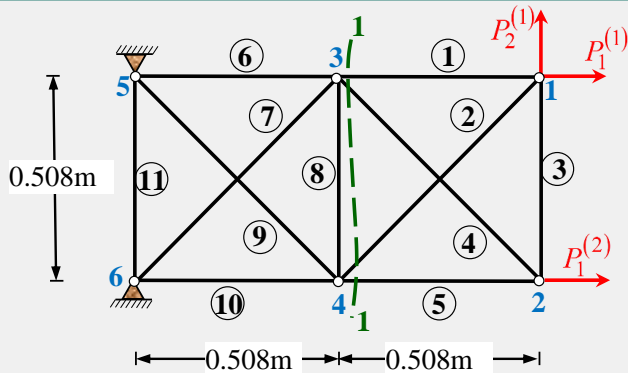
$$E = 6.89 \times 10^7 \text{ kN} / \text{m}^2$$

$$A_{1,3,5,6,8,10} = 6.45 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

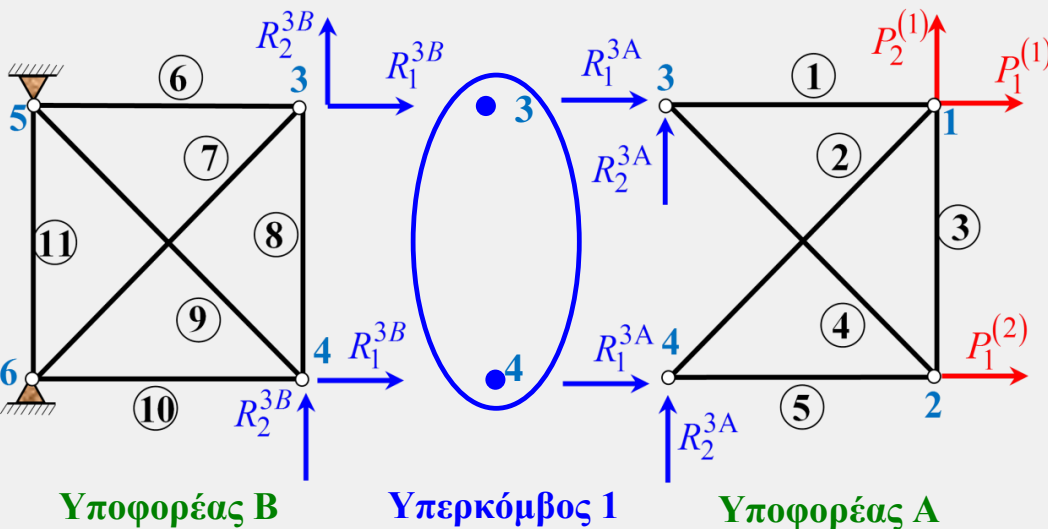
$$A_{2,4,7,9} = 4,56 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$



ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ



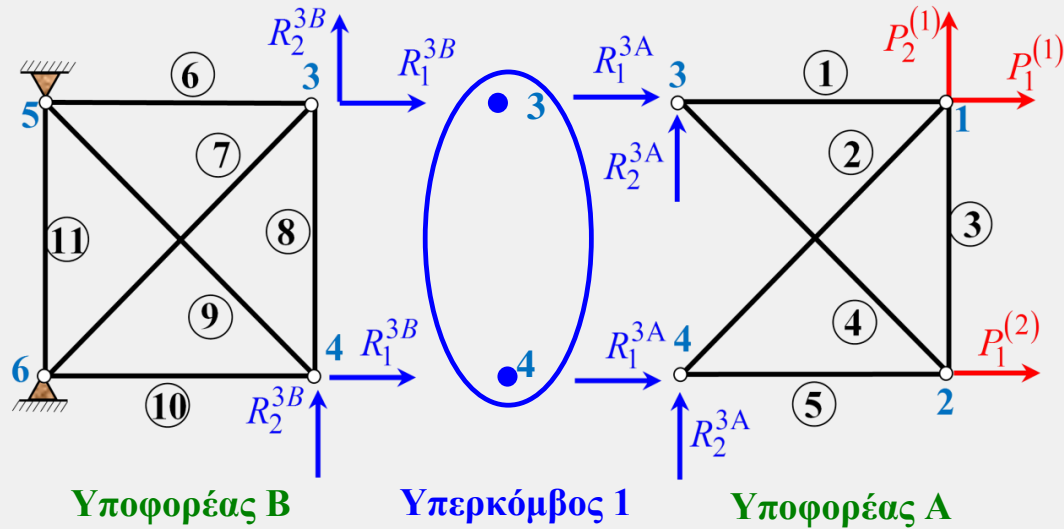
Μόρφωση αναδιατεταγμένων μητρώων στιβαρότητας υποφορέων (υπερτοιχείων)



$$\begin{bmatrix} \{P_e^A\} \\ \{R^A + P_{cc}^A\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ee}^A] & [K_{ec}^A] \\ [K_{ce}^A] & [K_{cc}^A] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Delta_e^A\} \\ \{\Delta_c^A\} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \{P_e^B\} \\ \{R^B + P_{cc}^B\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ee}^B] & [K_{ec}^B] \\ [K_{ce}^B] & [K_{cc}^B] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Delta_e^B\} \\ \{\Delta_c^B\} \end{bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ



Μόρφωση αναδιατεταγμένων μητρώων στιβαρότητας υποφορέων (υπερστοιχείων)

$[K_{ee}^A]$ $[K_{ec}^A]$
 #1 #2 #3 #4

5									
1	5								
0	0	5							
0	-4	-1	5						
-4	0	-1	1	5					
0	0	1	-1	-1	1				
-1	-1	-4	0	0	0	5			
-1	-1	0	0	0	0	0	1	1	

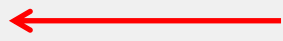
$[K_{ce}^A]$ $[K_{cc}^A]$

Στατική συμπίκνωση εσωτερικών βαθμών ελευθερίας υποφορέων

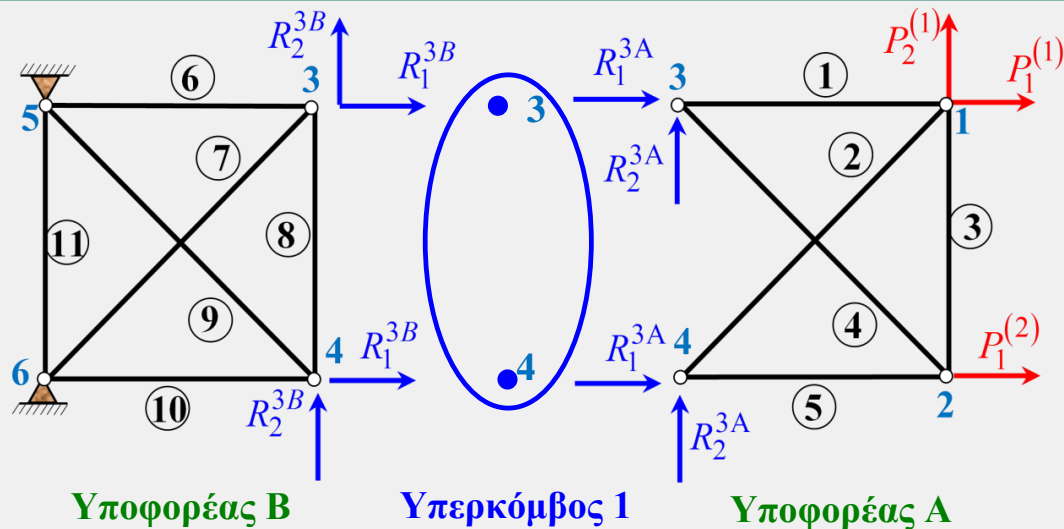
$[K_c^A] = 7.96 \times 10^6 \cdot$

0	0	0	0
0	1	0	-1
0	0	0	0
0	-1	0	1

$[K^A] = 21.89 \times 10^6 \cdot$



ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ



Μόρφωση αναδιατεταγμένων μητρώων στιβαρότητας υποφορέων (υπερστοιχείων)

Υποφορέας Β
 Στατική συμπίκνωση εσωτερικών βαθμών ελευθερίας υποφορέων

$$[K_c^B] = 21.89 \times 10^6 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & -4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$[K^B] = 21.89 \times 10^6 \cdot$$

$$[K_{ee}^B] = [K_{ec}^B] = [K_{ce}^B] = [0]$$

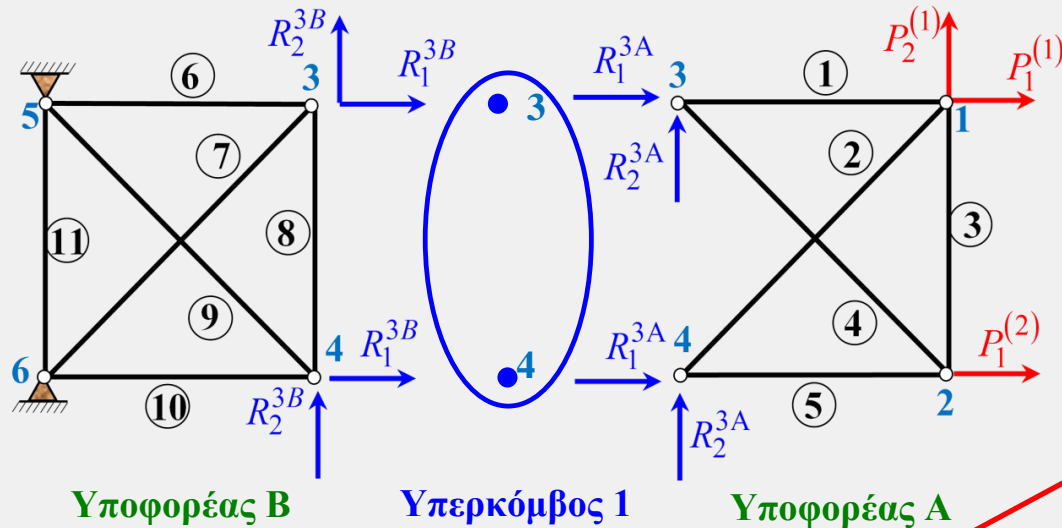
$$[K_{cc}^B] = [K^B]$$

$$[K_{cc}^B]$$

	#3	#4	#5	#6			
5	5						
1	5						
0	0	5					
0	-4	-1	5				
-4	0	-1	1	5			
0	0	1	-1	-1	5		
-1	-1	-4	0	0	0	5	
-1	-1	0	0	0	-4	1	5

όπου το συμπυκνωμένο μητρώο έχει προκύψει από το αναδιατεταγμένο μ.σ. του υποφορέα Β, μετά την αφαίρεση των δεσμευμένων βαθμών ελευθερίας των κόμβων 5, 6.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ



Μόρφωση μητρώου στιβαρότητας ως προς τους υπερκόμβους του φορέα

$$[K_c^{A11}] = [K_c^A] \quad [K_c^{B11}] = [K_c^B]$$

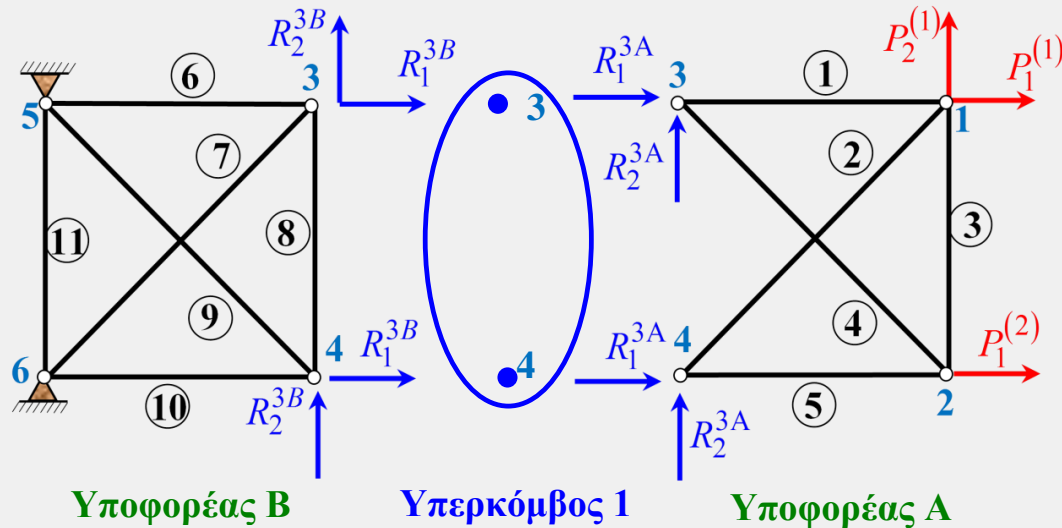
όπου

$$[K_c^{IIm}] \quad (I=A, B) \quad m=1$$

είναι οι δράσεις που αναπτύσσονται από το υπερστοιχείο I και ασκούνται στους βαθμούς ελευθερίας του υπερκόμβου 1 λόγω μοναδιαίων και μοναδικών μετακινήσεων στους βαθμούς ελευθερίας του υπερκόμβου $m=1$

$$[K_c] = [K_c^{A11}] + [K_c^{B11}] = 1.99 \times 10^6 \cdot \begin{bmatrix} 55 & 11 & 0 & 0 \\ 11 & 59 & 0 & -48 \\ 0 & 0 & 55 & -11 \\ 0 & -48 & 11 & 59 \end{bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ



Υπολογισμός δράσεων υπερκόμβων ισοδύναμου φορέα

Λαμβάνοντας υπόψη ότι ο υπερκόμβος του εξεταζόμενου δικτυώματος είναι μόνο ένας

$$\{P_c\} = \{P_c^1\}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι

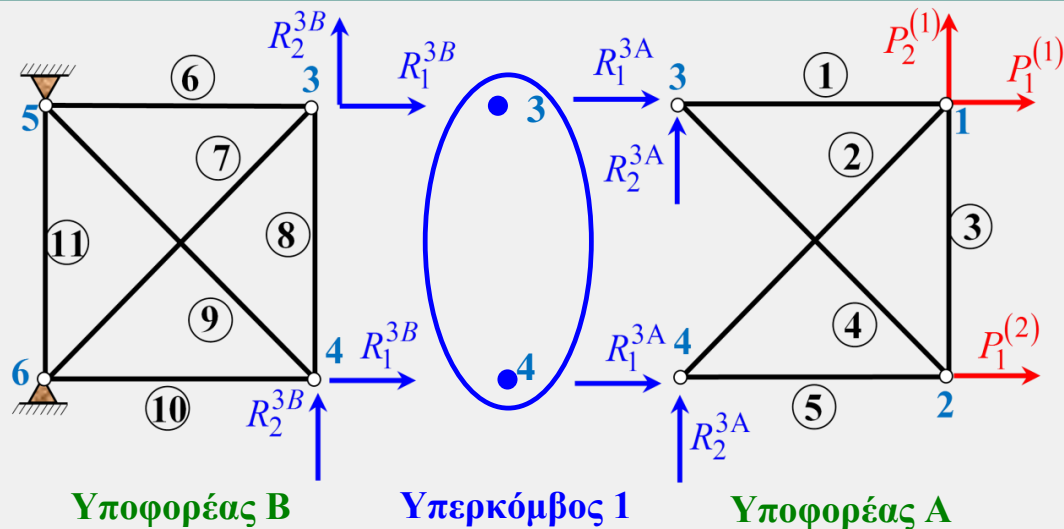
$$\{R^{A1} + R^{B1}\} = \{0\}$$

$$\begin{aligned} \{P_c^1\} &= \{P_c^{A1} + P_c^{B1}\} = \\ &= \{R^{A1} + P_{cc}^{A1} - R_c^{A1} + R^{B1} + P_{cc}^{B1} - R_c^{B1}\} = \\ &= \{P_{cc}^{A1} - R_c^{A1} + P_{cc}^{B1} - R_c^{B1}\} \end{aligned}$$

$$\{R_c^A\} = \{P_{cc}^A\} - [K_{ce}^A][K_{ee}^A]^{-1}\{P_e^A\}$$

όπου λόγω της στατικής συμπίκνωσης των εσωτερικών β.ε. του υποφορέα Α (κατά τους οποίους υπάρχει εξωτερική φόρτιση), οι συμπυκνωμένες εξωτερικές δράσεις του προκύπτουν μετά την αντικατάσταση στη σχέση

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ



Υπολογισμός δράσεων υπερκόμβων ισοδύναμου φορέα

$$\{P_c\} = \{P_c^1\}$$

$$\{P_c^1\} = \{P_{cc}^{A1} - R_c^{A1} + P_{cc}^{B1} - R_c^{B1}\}$$

όπου λόγω της στατικής συμπίκνωσης των εσωτερικών β.ε. του υποφορέα Α (κατά τους οποίους υπάρχει εξωτερική φόρτιση), οι συμπυκνωμένες εξωτερικές δράσεις του προκύπτουν μετά την αντικατάσταση στη σχέση

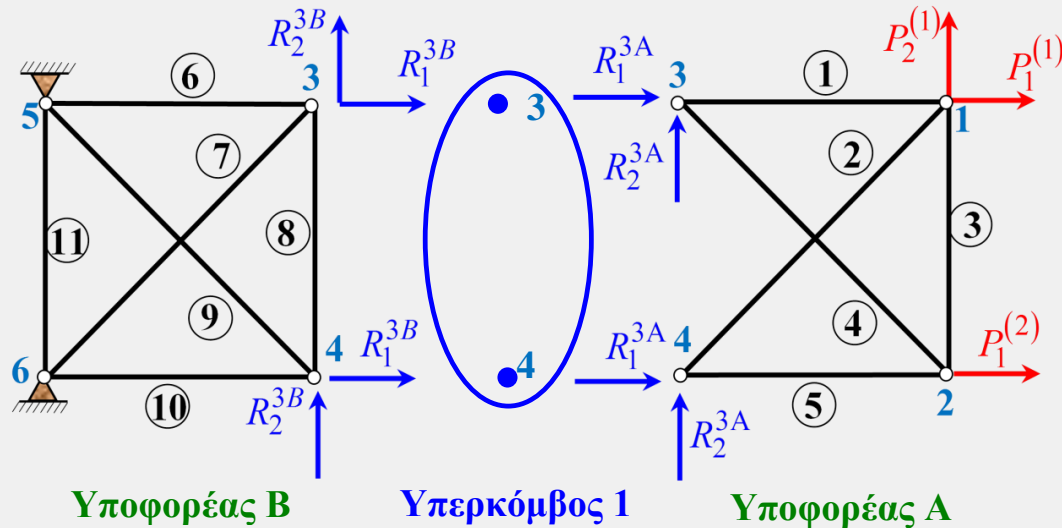
$$\{R_c^A\} = \{P_{cc}^A\} - [K_{ce}^A][K_{ee}^A]^{-1}\{P_e^A\} \quad \leftarrow$$

όπου

$$\{P_{cc}^A\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{P_e^A\} = \begin{Bmatrix} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \\ P_1^{(2)} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{και} \quad \{P_c\} = -\{R_c^A\} = -\frac{1}{11} \cdot \begin{bmatrix} 11 & -11 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & 11 & 11 \\ 1 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \\ P_1^{(2)} \end{Bmatrix}$$

μια και $\{R_c^B\} = \{P_{cc}^B\} = \{0\}$ $\{P_c^1\} = -\{R_c^{A1}\}$ $\{P_{cc}^{A1}\} = \{P_{cc}^A\}$ $\{R_c^{A1}\} = \{R_c^A\}$ $\{P_{cc}^{B1}\} = \{P_{cc}^B\}$ $\{R_c^{B1}\} = \{R_c^B\}$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ



Μόρφωση και επίλυση εξίσωσης στιβαρότητας ως προς τους υπερκόμβους του φορέα

Λαμβάνοντας υπόψη **το μητρώο στιβαρότητας** $[K_c]$ και **το διάνυσμα επικόμβιων δράσεων** $\{P_c\}$ ως προς τους υπερκόμβους του ισοδύναμου φορέα

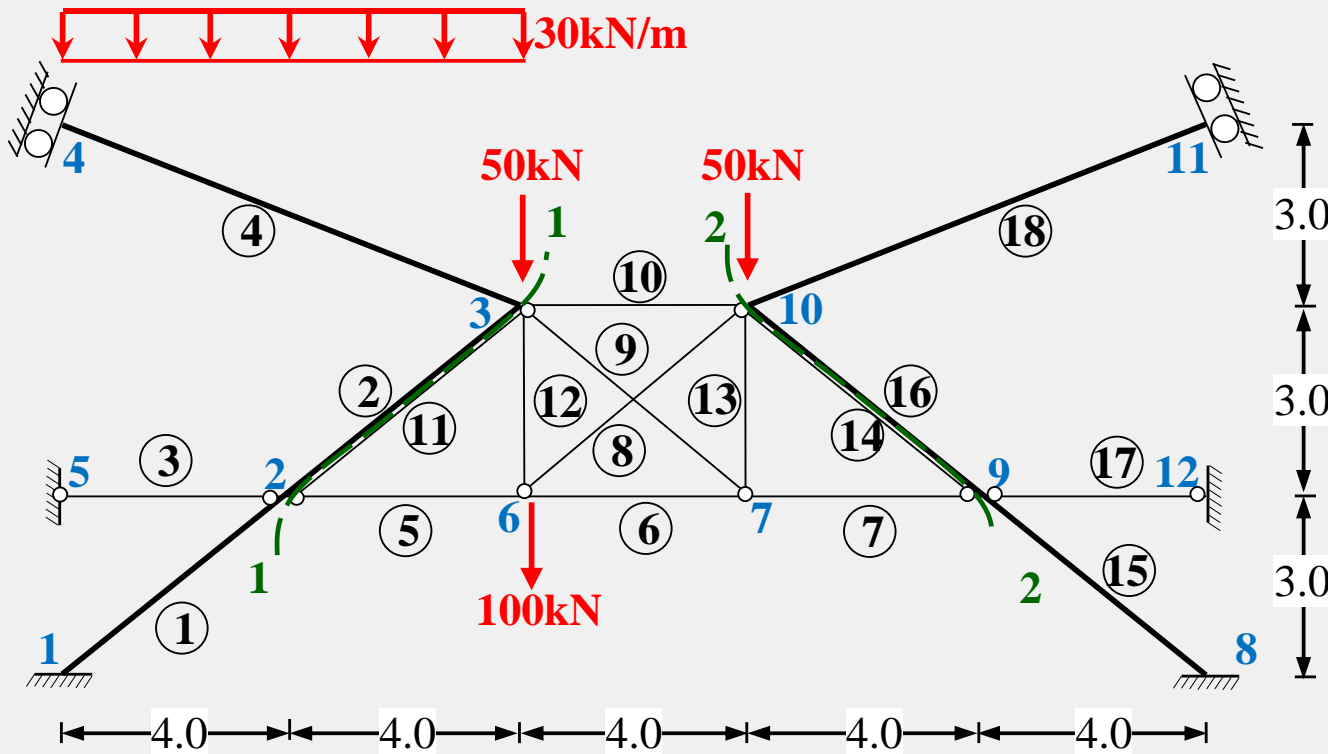
η εξίσωση στιβαρότητας γράφεται ως

$$\frac{1}{11} \cdot \begin{bmatrix} 11 & -11 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & 11 & 11 \\ 1 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \\ P_1^{(2)} \end{Bmatrix} = 1.99 \times 10^6 \cdot \begin{bmatrix} 55 & 11 & 0 & 0 \\ 11 & 59 & 0 & -48 \\ 0 & 0 & 55 & -11 \\ 0 & -48 & 11 & 59 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1^{(3)} \\ \Delta_2^{(3)} \\ \Delta_1^{(4)} \\ \Delta_2^{(4)} \end{Bmatrix}$$

από την **επίλυση** της οποίας προκύπτει $\rightarrow \begin{Bmatrix} \Delta_1^{(3)} \\ \Delta_2^{(3)} \\ \Delta_1^{(4)} \\ \Delta_2^{(4)} \end{Bmatrix} = 8.72 \times 10^{-11} \cdot \begin{bmatrix} 120 & -196 & -11 \\ -71 & 456 & 55 \\ -11 & 197 & 120 \\ -55 & 461 & 76 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \\ P_1^{(2)} \end{Bmatrix}$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΜΙΚΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΜΙΚΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ



Εξεταζόμενος
μικτός φορέας

Χωρισμός σε
υποφορείς

Στοιχεία γεωμετρίας και υλικού μελών

$$E_b = 2.1 \times 10^7 \text{ kN} / \text{m}^2$$

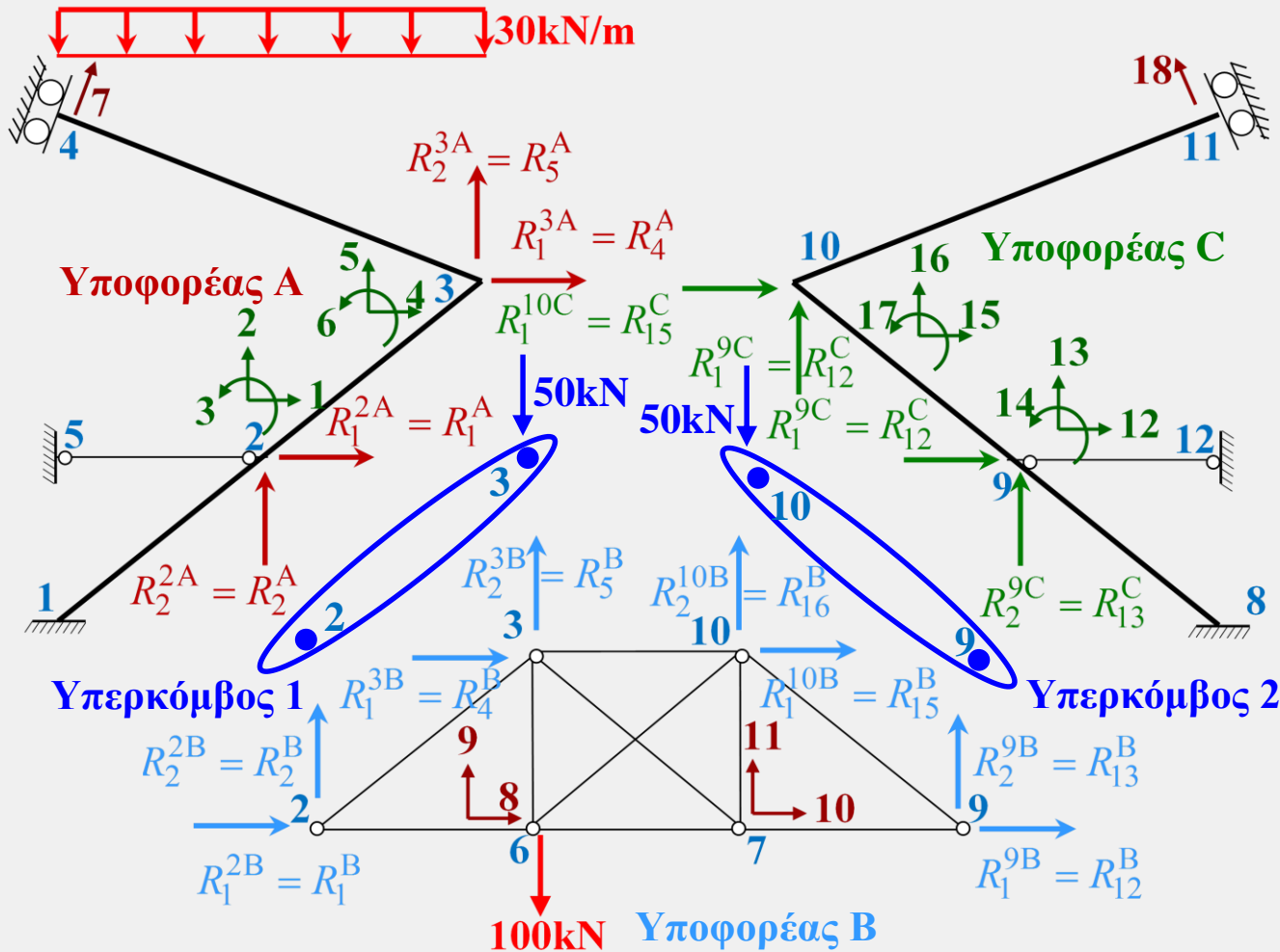
$$E_s = 2.1 \times 10^8 \text{ kN} / \text{m}^2$$

$$A_{1,2,15,16} = 0.30 \text{ m} \times 0.70 \text{ m}$$

$$A_{4,18} = 0.30 \text{ m} \times 1.00 \text{ m}$$

$$A_{3,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,17} = 10^{-3} \text{ m}^2$$

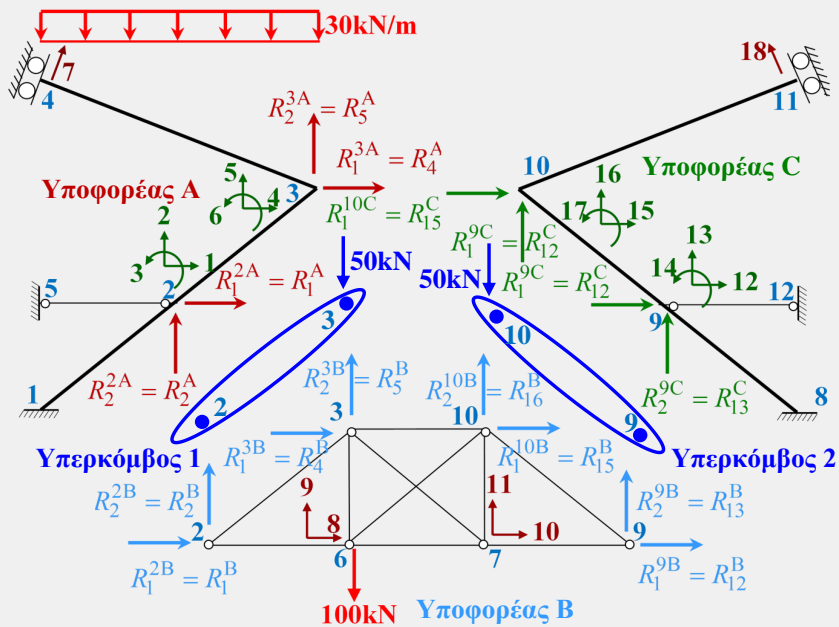
ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΜΙΚΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ



Χωρισμός σε υποφορείς, διαγράμματα ελεύθερου σώματος υποφορέων

Αρίθμηση κόμβων, καθολικό σύστημα αξόνων, βαθμοί ελευθερίας

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΜΙΚΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ



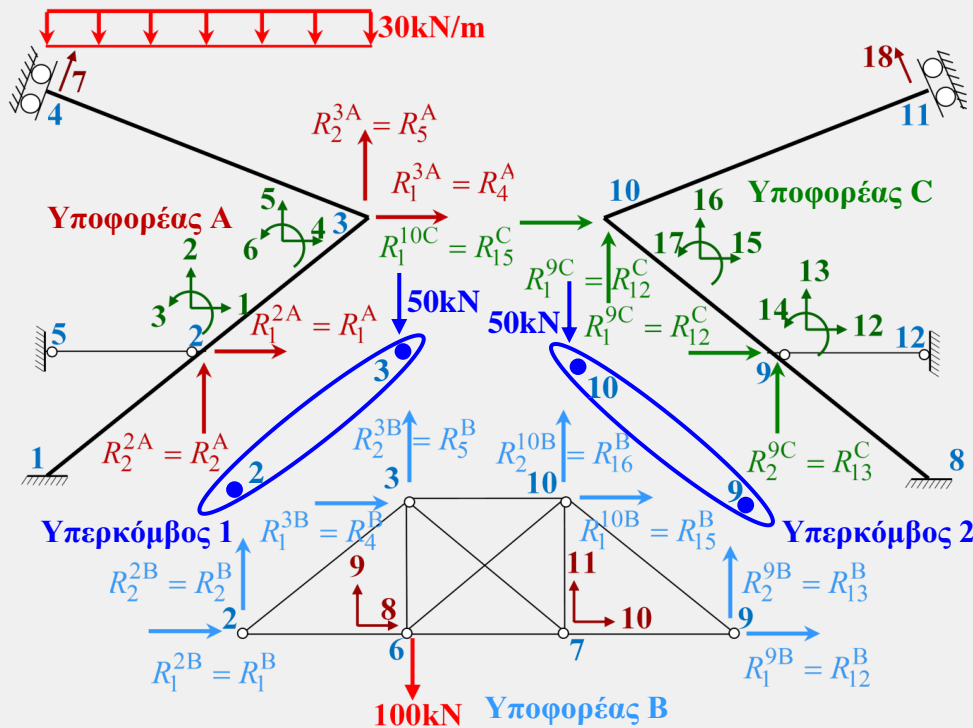
Στοιχεία γεωμετρίας και υλικού μελών

i	$E^i (kN/m^2)$	$L^i (m)$	$A^i (m^2)$	$I^i (m^4)$	$\theta^i (^\circ)$	$\sin \theta^i$	$\cos \theta^i$
1	2.1×10^7	5.0	0.21	0.008575	36.8699	0.6	0.8
2	2.1×10^7	5.0	0.21	0.008575	36.8699	0.6	0.8
3	2.1×10^8	4.0	0.001	-	0.0	0.0	1.0
4	2.1×10^7	8.544	0.30	0.025	159.444	0.3511	-0.9364

Χωρισμός σε υποφορείς, υπερκόμβοι, εσωτερικοί β.ε., ενδοσυνοριακοί β.ε.

	Υπερκόμβοι	Εσωτερικοί β.ε.	Ενδοσυνοριακοί β.ε.
Υποφορέας Α	1	3, 6, 7	1, 2, 4, 5 (υπερκόμβος 1)
Υποφορέας Β	1, 2	8, 9, 10, 11	1, 2, 4, 5 (υπερκόμβος 1) 12, 13, 15, 16 (υπερκόμβος 2)
Υποφορέας C	2	14, 17, 18	12, 13, 15, 16 (υπερκόμβος 2)

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΜΙΚΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ



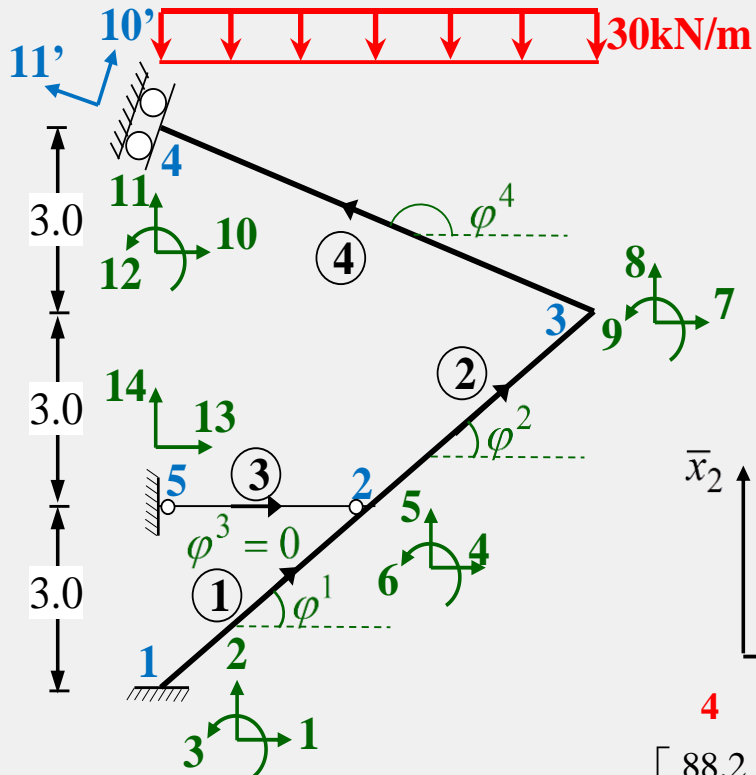
Μόρφωση αναδιατεταγμένων μητρώων στιβαρότητας υποφορέων (υπερστοιχείων)

$$\begin{bmatrix} \{P_e^I\} \\ \{R^I + P_{cc}^I\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ee}^I] & [K_{ec}^I] \\ [K_{ce}^I] & [K_{cc}^I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Delta_e^I\} \\ \{\Delta_c^I\} \end{bmatrix}$$

(I=A, B, C)

Στα επόμενα θα υπολογιστεί αναλυτικά το αναδιατεταγμένο μητρώο στιβαρότητας του υποφορέα A, ενώ θα δοθούν τα αντίστοιχα μητρώα για τους υπόλοιπους δύο υποφορείς μια και ο υπολογισμός τους δεν παρουσιάζει κάποια ιδιαίτερη δυσκολία (ο υποφορέας B είναι απλό δικτύωμα), ενώ ο υποφορέας C είναι συμμετρικός του A και επομένως ο υπολογισμός του μητρώου είναι ανάλογος αυτού του A).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΜΙΚΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ - Ανάλυση Υποφορέα Α



Αρίθμηση κόμβων, μελών, καθολικό και τοπικά συστήματα αξόνων, βαθμοί ελευθερίας

$[k^1] = 10^4$

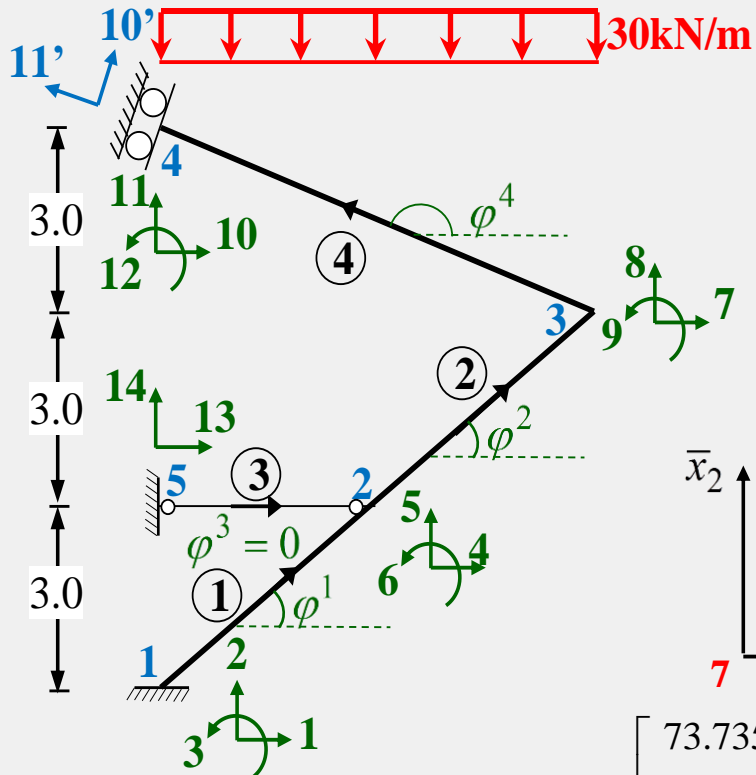
	1	2	3	4	5	6	
1	88.2						1
2	0	1.72872					2
3	0	4.3218	14.406				3
4	-88.2	0	0	88.2			4
5	0	-1.72872	-4.5218	0	1.72872		5
6	0	4.3218	7.203	0	-4.3218	14.406	6

$[k^2] = 10^4$

	4	5	6	7	8	9	
4	88.2						4
5	0	1.72872					5
6	0	4.3218	14.406				6
7	-88.2	0	0	88.2			7
8	0	-1.72872	-4.5218	0	1.72872		8
9	0	4.3218	7.203	0	-4.3218	14.406	9

Τοπικά μητρώα στιβαρότητας μελών

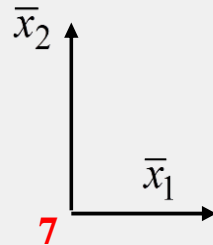
ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΜΙΚΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ - Ανάλυση Υποφορέα Α



Αρίθμηση κόμβων, μελών, καθολικό και τοπικά συστήματα αξόνων, βαθμοί ελευθερίας

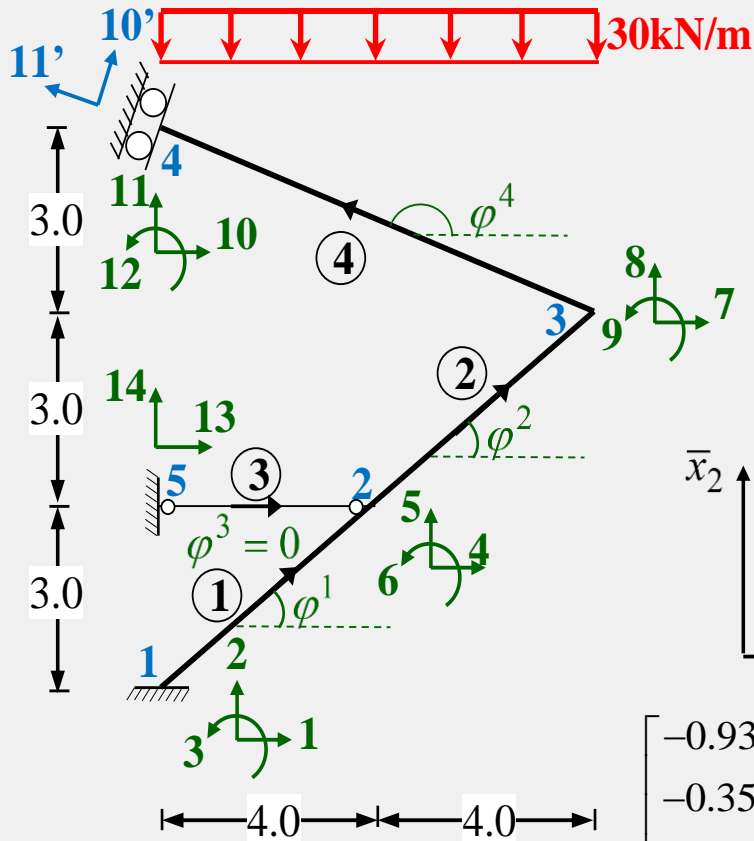
$$[k^3] = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 5.25 & -5.25 \\ -5.25 & 5.25 \end{bmatrix} \begin{matrix} 13 \\ 4 \end{matrix}$$

Τοπικά μητρώα στιβαρότητας μελών



$$[k^4] = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 73.73592 & & & & & \\ 0 & 1.01008 & & & & \\ 0 & 4.31507 & 24.57864 & & & \\ -73.73592 & 0 & 0 & 73.73592 & & \\ 0 & -1.01008 & -4.31507 & 0 & 1.01008 & \\ 0 & 4.31507 & 42.28932 & 0 & -4.31507 & 24.57864 \end{bmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΜΙΚΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ - Ανάλυση Υποφορέα Α



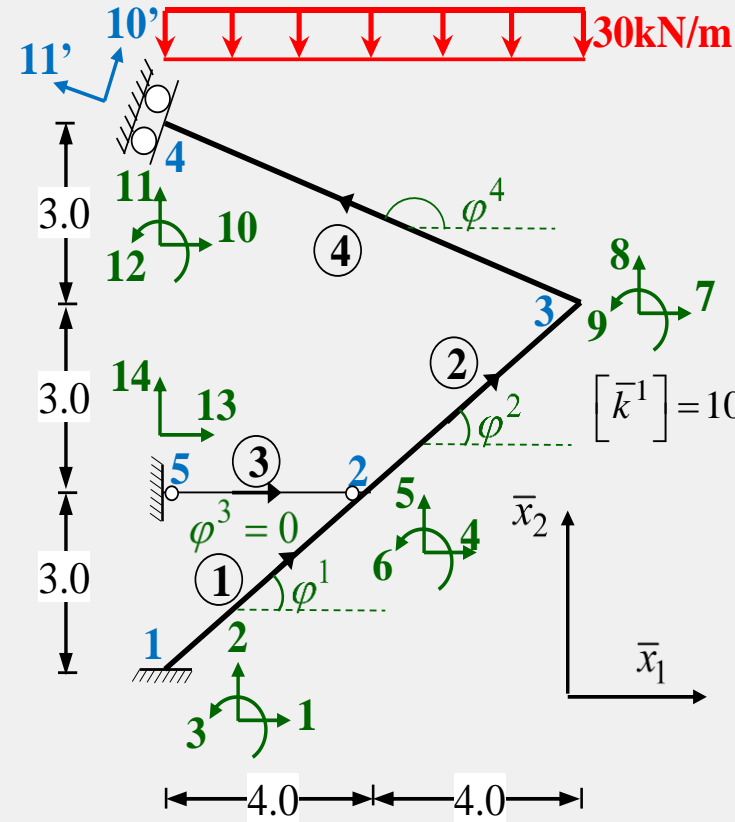
Μητρώα μετασχηματισμού μελών

$$[\Lambda_{PF}^1] = [\Lambda_{PF}^2] = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 & & & \\ -0.6 & 0.8 & 0 & & & [0] \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \hline & & & 0.8 & 0.6 & 0 \\ [0] & & & -0.6 & 0.8 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\Lambda_{PT}^3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I]$$

$$[\Lambda_{PF}^4] = \begin{bmatrix} -0.93633 & 0.35112 & 0 & & & \\ -0.35112 & -0.93633 & 0 & & & [0] \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \hline & & & -0.93633 & 0.35112 & 0 \\ [0] & & & -0.35112 & -0.93633 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΜΙΚΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ - *Ανάλυση Υποφορέα Α*



Καθολικά μητρώα στιβαρότητας μελών

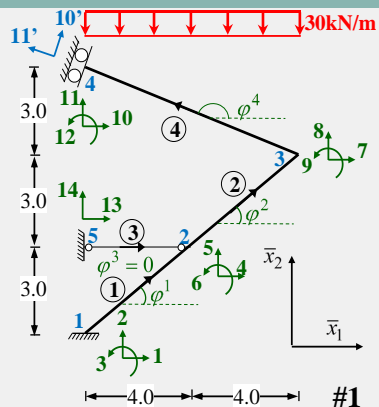
$[\bar{k}^1] = 10^4$

1	2	3	4	5	6
57.07034					
41.50621	32.85838				
-2.59308	3.45744	14.406			
-57.07034	-41.50621	2.59308	57.07034		
-41.50621	-32.85838	-3.45744	41.50621	32.85838	
-2.59308	3.45744	7.203	2.59308	-3.45744	14.406

$[\bar{k}^2] = 10^4$

4	5	6	7	8	9
57.07034					
41.50621	32.85838				
-2.59308	3.45744	14.406			
-57.07034	-41.50621	2.59308	57.07034		
-41.50621	-32.85838	-3.45744	41.50621	32.85838	
-2.59308	3.45744	7.203	2.59308	-3.45744	14.406

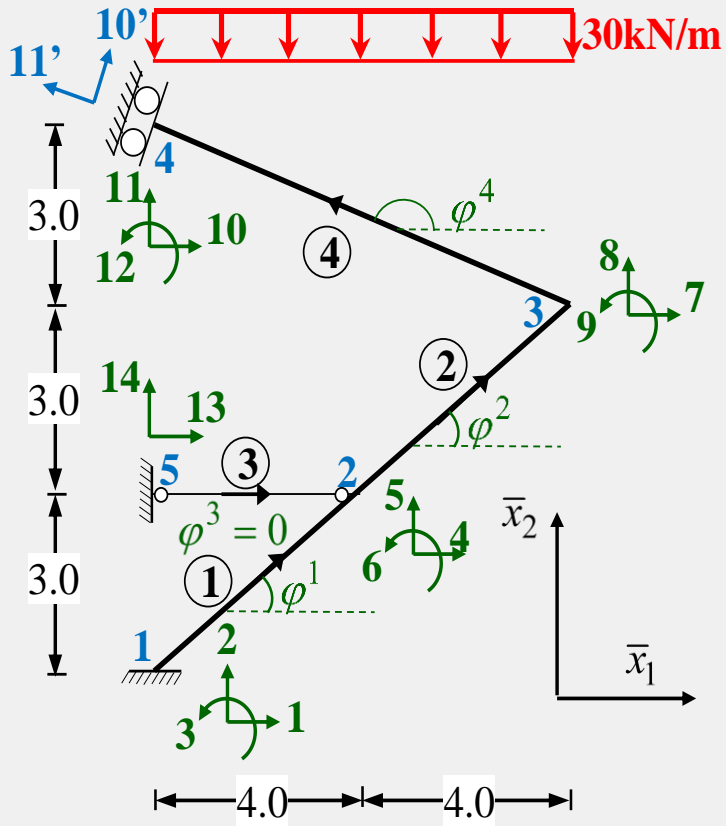
ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΜΙΚΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ - Ανάλυση Υποφορέα Α



Μόρφωση καθολικού μητρώου στιβαρότητας υποφορέα Α

		#1				#2		#3			#4		#5		
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$[K] = 10^4 \cdot$	1	57.07034													
	2	41.50621	32.85838												
	3	-2.59308	3.45744	14.406											
	4	-57.07034	-41.50621	2.59308	119.3907										
	5	-41.50621	-32.85838	-3.45744	83.0124	65.7168									
	6	-2.59308	3.45744	7.203	0	0	28.8120								
	7	0	0	0	-57.0703	-41.5062	2.5931	121.8401							
	8	0	0	0	-41.5062	-32.8584	-3.4574	17.5963	42.8347						
	9	0	0	0	-2.5931	3.45744	7.2030	1.0780	-7.4978	38.9846					
	10	0	0	0	0	0	0	-64.7697	23.9099	1.51512	64.7697				
	11	0	0	0	0	0	0	23.9099	-9.9763	-4.5218	-23.9099	9.97628			
	12	0	0	0	0	0	0	-1.51512	-4.0403	12.2893	1.51512	4.04032	24.57864		
	13	0	0	0	-5.25	0	0	0	0	0	0	0	0	5.25	
	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΜΙΚΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ - *Ανάλυση Υποφορέα Α*



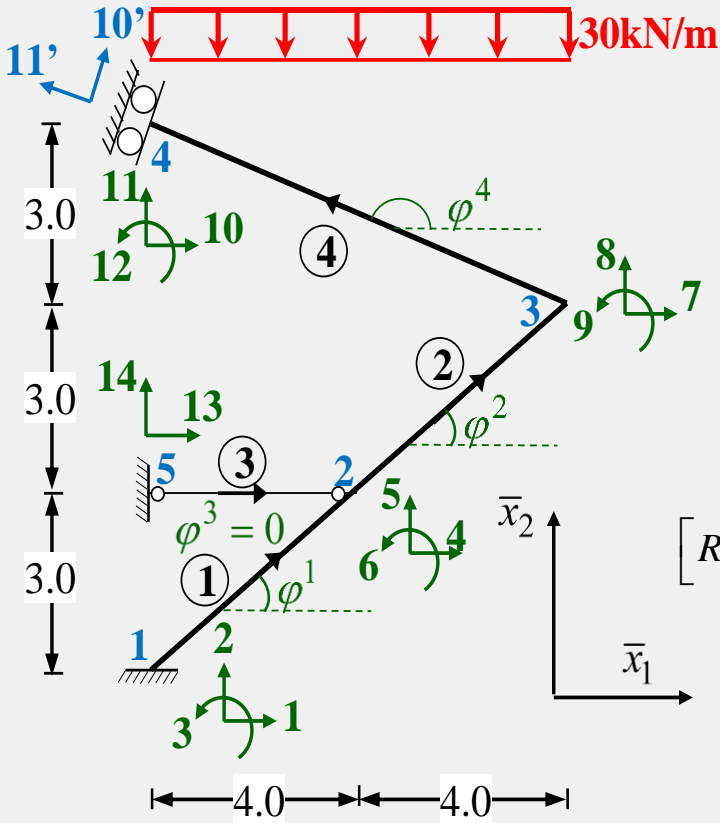
Τροποποίηση καθολικού μητρώου στιβαρότητας υποφορέα Α λόγω κεκλιμένης στήριξης

$$\varphi^4 = 90^\circ - \arctan(3.0/8.0) = 69.444^\circ$$

$$[r^4] = \begin{bmatrix} \cos 69.444^\circ & \sin 69.444^\circ & 0 \\ -\sin 69.444^\circ & \cos 69.444^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΜΙΚΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ - *Ανάλυση Υποφορέα Α*

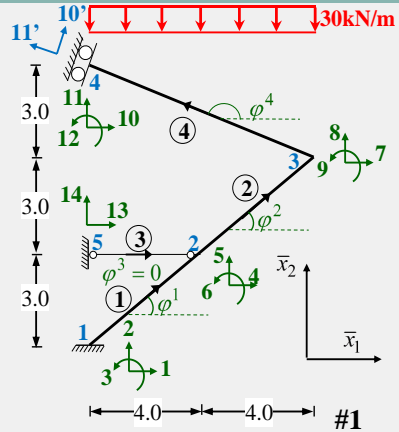
Τροποποίηση καθολικού μητρώου στιβαρότητας υποφορέα Α λόγω κεκλιμένης στήριξης



$$[R^4] =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
10'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.35112	0.93633	0	0	0
11'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.93633	0.35112	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΜΙΚΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ - Ανάλυση Υποφορέα Α



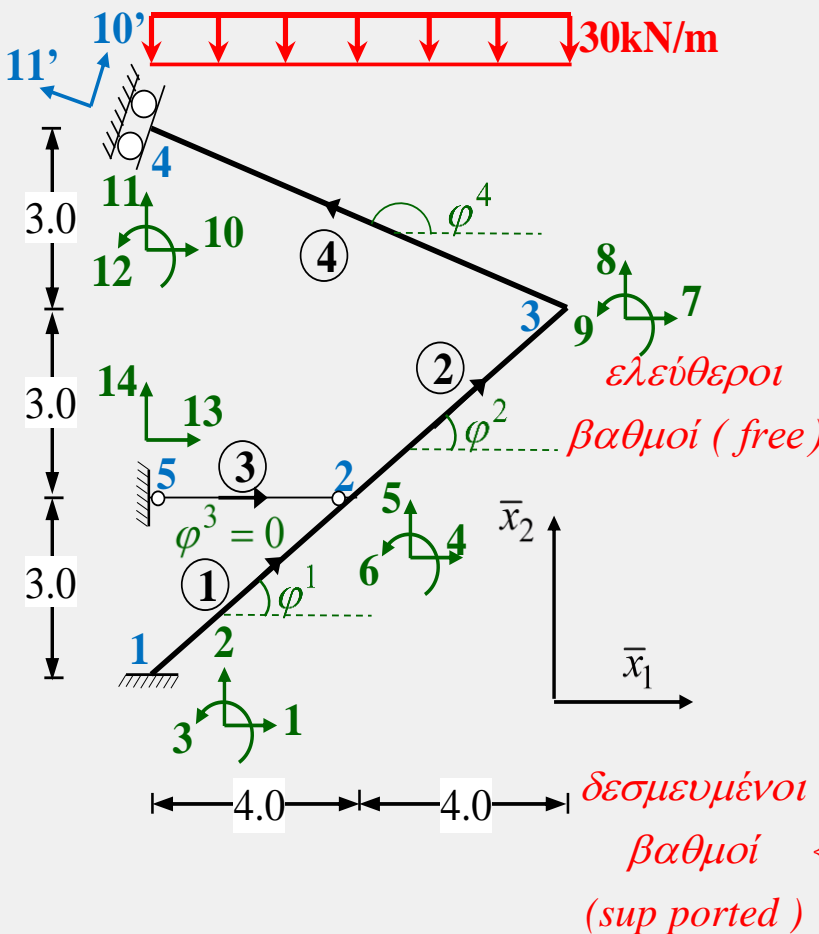
Τροποποιημένο (λόγω περιστροφής του καθολικού συστήματος αξόνων στον κόμβο 4) καθολικό μητρώο στιβαρότητας υποφορέα Α

$$[\bar{K}_m] = [R^4][\bar{K}][R^4]^T$$

		#1		#2		#3		#4		#5					
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10'	11'	12	13	14
$[\bar{K}_m] = 10^4 \cdot$	1	57.07034													
	2	41.50621	32.85838												
	3	-2.59308	3.45744	14.406											
	4	-57.07034	-41.50621	2.59308	119.3907										
	5	-41.50621	-32.85838	-3.45744	83.0124	65.7168									
	6	-2.59308	3.45744	7.203	0	0	28.8120								
	7	0	0	0	-57.0703	-41.5062	2.5931	121.8401							
	8	0	0	0	-41.5062	-32.8584	-3.4574	17.5963	42.8347						
	9	0	0	0	-2.5931	3.45744	7.2030	1.0780	-7.4978	38.9846					
	10'	0	0	0	0	0	0	-0.34721	-0.94886	-3.70326	1.010623				
	11'	0	0	0	0	0	0	69.06049	-25.8976	-3.0068	0.007951	73.77729			
	12	0	0	0	0	0	0	-1.51512	-4.0403	12.2893	4.316274	-0.00047	24.57864		
	13	0	0	0	-5.25	0	0	0	0	0	0	0	0	5.25	
	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

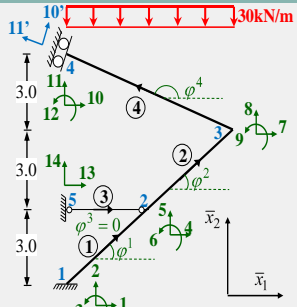
ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΜΙΚΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ - *Ανάλυση Υποφόρα Α*

Αναδιάταξη καθολικού μητρώου στιβαρότητας υποφόρα Α



4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
10'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10'
11'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	11'
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	13
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	14

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΜΙΚΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ - Ανάλυση Υποφορέα Α

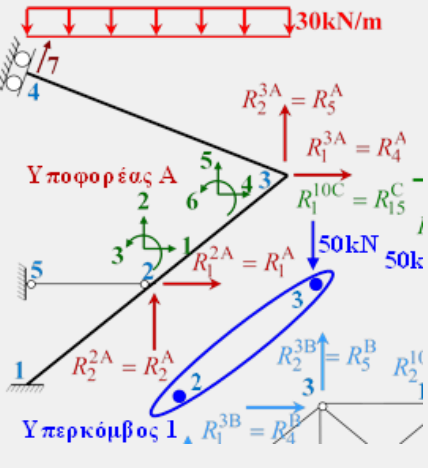


Αναδιατεταγμένο (λόγω συνθηκών στήριξης) καθολικό μητρώο στιβαρότητας υποφορέα Α

$$[\bar{K}_{nm}] = [V][\bar{K}_m][V]^T = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{ff}] & [\bar{K}_{fs}] \\ [\bar{K}_{sf}] & [\bar{K}_{ss}] \end{bmatrix} =$$

	4	5	6	7	8	9	10'	1	2	3	11'	12	13	14
$\times 10^4$	119.3907													
	83.0124	65.7168												
	0	0	28.8120											
	-57.0703	-41.50621	2.59308	121.8401										
	-41.50621	-32.85838	-3.45744	17.5963	42.8347									
	-2.5931	3.45744	7.203	1.0780	-7.4978	38.9846								
	0	0	0	-0.34721	-0.94886	-3.70326	1.010623							
	-57.07034	-41.50621	-2.59308	0	0	0	0	57.07034						
	-41.50621	-32.85838	3.45744	0	0	0	0	41.50621	32.85838					
	2.59308	-3.45744	7.203	0	0	0	0	-2.59308	3.45744	14.406				
	0	0	0	69.06049	-25.8976	-3.0068	0.007951	0	0	0	73.77729			
	0	0	0	-1.51512	-4.0403	12.2893	4.316274	0	0	0	-0.00047	24.57864		
	-5.25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5.25	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΜΙΚΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ - *Ανάλυση Υποφορέα Α*



Υπολογισμός αναδιατεταγμένου μ.σ. υπερστοιχείου Α

	Υπερκόμβοι	Εσωτερικοί β.ε.	Ενδοσυνοριακοί β.ε.
Υποφορέας Α	1	3, 6, 7	1, 2, 4, 5 (υπερκόμβος 1)
Υποφορέας Β	1, 2	8, 9, 10, 11	1, 2, 4, 5 (υπερκόμβος 1) 12, 13, 15, 16 (υπερκόμβος 2)
Υποφορέας C	2	14, 17, 18	12, 13, 15, 16 (υπερκόμβος 2)

$$[K_{ee}^A]$$

$$[K_{ec}^A]$$

3

6

7

1

2

4

5

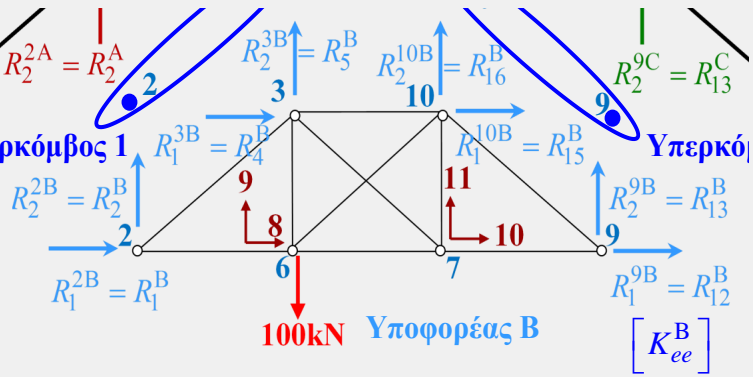
$$[K^A] = 10^4 \cdot$$

28,812										3
7,203	38,98464									6
0	4,31507	1,01008								7
0	-2,59308	0	119,39068							1
0	3,45744	0	83,01243	65,71676						2
2,59308	1,07796	-0,35466	-57,07034	-41,50621	121,84006					4
-3,45744	-7,49776	-0,94577	-41,50621	-32,85838	17,59635	42,83466				5

$$[K_{ce}^A]$$

$$[K_{cc}^A]$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΜΙΚΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ - Ανάλυση Υποφορέα Β



	Υπερκόμβοι	Εσωτερικοί β.ε.	Ενδοσυνοριακοί β.ε.
Υποφορέας Α	1	3, 6, 7	1, 2, 4, 5 (υπερκόμβος 1)
Υποφορέας Β	1, 2	8, 9, 10, 11	1, 2, 4, 5 (υπερκόμβος 1) 12, 13, 15, 16 (υπερκόμβος 2)
Υποφορέας C	2	14, 17, 18	12, 13, 15, 16 (υπερκόμβος 2)

Όμοια με τα προηγούμενα

$[K^B] = 10^4 \cdot$

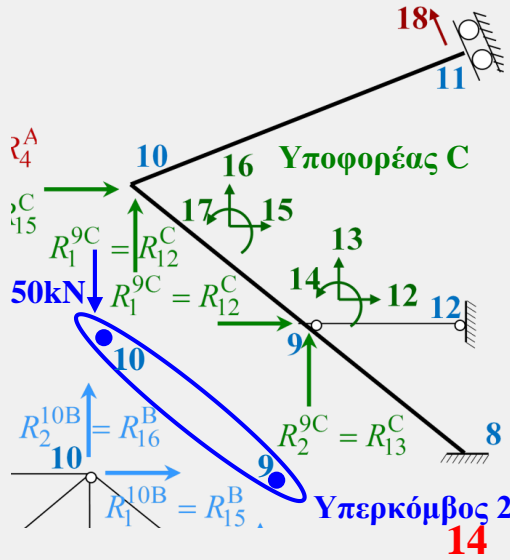
Υπολογισμός αναδιατεταγμένου μ.σ. υπερστοιχείου Β

	8	9	10	11	1	2	4	5	12	13	15	16
	2,512											
	0,384	1,621										
	-1	0	2,512									
	0	0	-0,384	1,621								
	-1	0	0	0	1,512							
	0	0	0	0	0,384	0,288						
	0	0	-0,512	0,384	-0,512	-0,384	2,024					
	0	-1,335	0,384	-0,288	-0,384	-0,288	0	1,509				
	0	0	0	-1	0	0	0	0	1,512			
	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,384	0,288		
	-0,512	-0,384	0	0	0	0	-1	0	-0,512	0,384	2,024	
	-0,384	-0,288	0	-1,353	0	0	0	0	0,384	-0,288	0	1,909

$[K_{ee}^B]$

$[K_{cc}^B]$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΜΙΚΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ - Ανάλυση Υποφορέα C



	Υπερκόμβοι	Εσωτερικοί β.ε.	Ενδοσυνοριακοί β.ε.
Υποφορέας A	1	3, 6, 7	1, 2, 4, 5 (υπερκόμβος 1)
Υποφορέας B	1, 2	8, 9, 10, 11	1, 2, 4, 5 (υπερκόμβος 1) 12, 13, 15, 16 (υπερκόμβος 2)
Υποφορέας C	2	14, 17, 18	12, 13, 15, 16 (υπερκόμβος 2)

$$[K_{ee}^C]$$

$$[K_{ec}^C]$$

	17	18	12	13	15	16			
28,812								14	
7,203	38,98464							17	
0	-4,31507	1,01008						18	
0	-2,59308	0	119,39068					12	
0	-3,45744	0	-83,01243	65,71676				13	
2,59308	1,07796	0,35466	-57,07034	41,50621	121,84006			15	
3,45744	7,49776	-0,94577	41,50621	-32,85838	-17,59635	42,83466		16	

Όμοια με τα προηγούμενα

$$[K^C] = 10^4 \cdot$$

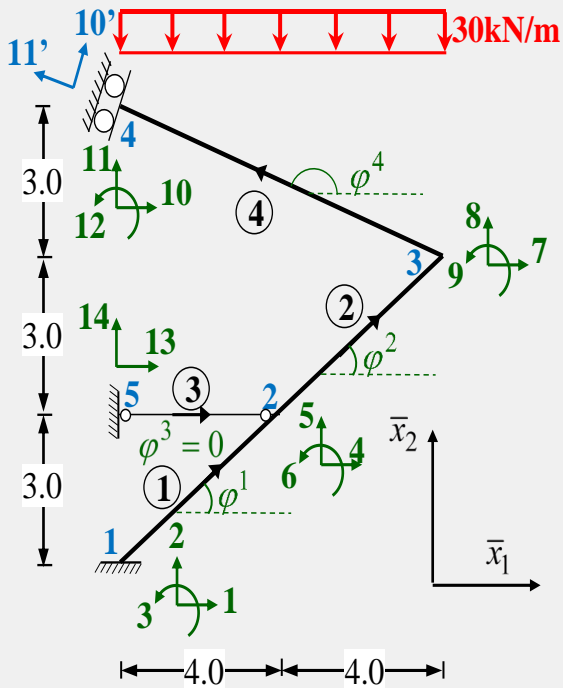
Υπολογισμός αναδιατεταγμένου μ.σ. υπερστοιχείου C

$$[K_{ce}^C]$$

$$[K_{cc}^C]$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΜΙΚΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ - *Ανάλυση Υποφορέα Α*

Στατική συμπίκνωση εσωτερικών βαθμών ελευθερίας υποφορέα Α

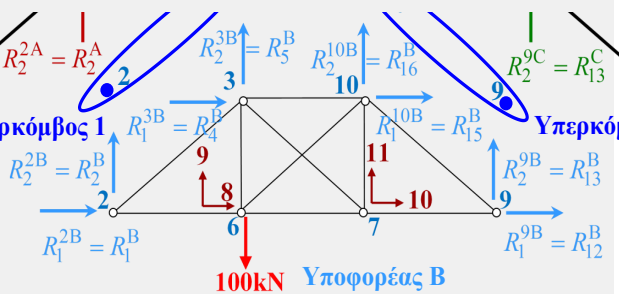


**Συμπυκνωμένο
μ.σ.
υπερστοιχείου Α**

	Υπερκόμβοι	Εσωτερικοί β.ε.	Ενδοσυννοριακοί β.ε.
Υποφορέας Α	1	3, 6, 7	1, 2, 4, 5 (υπερκόμβος 1)
Υποφορέας Β	1, 2	8, 9, 10, 11	1, 2, 4, 5 (υπερκόμβος 1) 12, 13, 15, 16 (υπερκόμβος 2)
Υποφορέας C	2	14, 17, 18	12, 13, 15, 16 (υπερκόμβος 2)

$$[K_c^A] = [K_c^{A11}] = 10^4 \cdot \begin{matrix} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ \begin{matrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 119.0321 & 83.49059 & -56.8014 & -41.8648 \\ 83.49059 & 65.07921 & -41.8648 & -32.3802 \\ -56.8014 & -41.8648 & 121.2804 & 17.8444 \\ -41.8648 & -32.3802 & 17.8444 & 41.1756 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΜΙΚΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ - Ανάλυση Υποφορέα Β



	Υπερκόμβοι	Εσωτερικοί β.ε.	Ενδοσυνοριακοί β.ε.
Υποφορέας Α	1	3, 6, 7	1, 2, 4, 5 (υπερκόμβος 1)
Υποφορέας Β	1, 2	8, 9, 10, 11	1, 2, 4, 5 (υπερκόμβος 1) 12, 13, 15, 16 (υπερκόμβος 2)
Υποφορέας Γ	2	14, 17, 18	12, 13, 15, 16 (υπερκόμβος 2)

**Στατική
συμπύκνωση
εσωτερικών
βαθμών
ελευθερίας
υποφορέα Β**

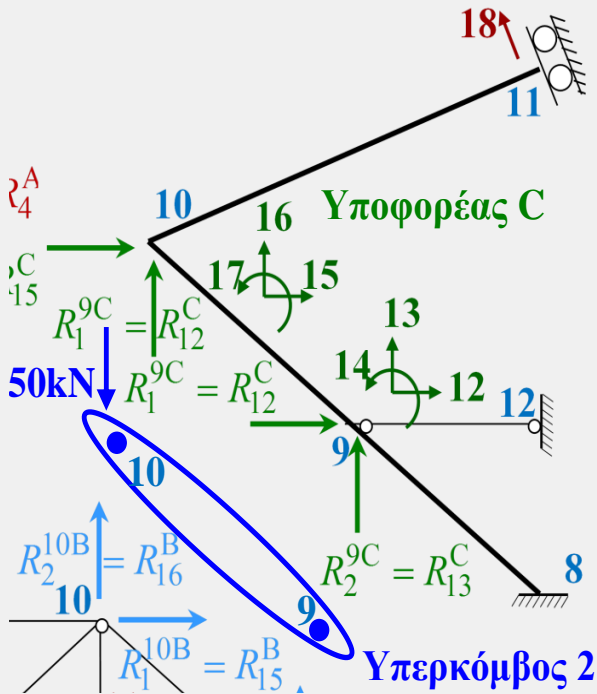
$$[K_c^B] = 10^4 \cdot$$

**Συμπυκνωμένο
μ.σ.
υπερστοιχείου Β**

	$[K_c^{B11}]$				$[K_c^{B12}]$				
	1	2	4	5	12	13	15	16	
	1.013989	0.384	-0.59861	-0.16155	-0.04873	0	-0.20968	-0.22319	1
	0.384	0.288	-0.384	-0.288	0	0	0	0	2
	-0.59861	-0.384	1.844752	0.161826	0.18722	0	-1.03646	0.22596	4
	-0.16155	-0.288	0.161826	0.21782	-0.125	0	-0.22259	-0.33607	5
	-0.04873	0	0.18722	-0.125	0.86715	-0.384	-0.53252	-0.50387	12
	0	0	0	0	-0.384	0.288	0.384	-0.288	13
	-0.20968	0	-1.03646	-0.22259	-0.53252	0.384	1.844752	-0.1622	15
	-0.22319	0	0.22596	-0.33607	-0.50387	-0.288	-0.1622	0.586066	16
	$[K_c^{B21}]$				$[K_c^{B22}]$				

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΜΙΚΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ - Ανάλυση Υποφορέα C

Στατική συμπίκνωση εσωτερικών βαθμών ελευθερίας υποφορέα C



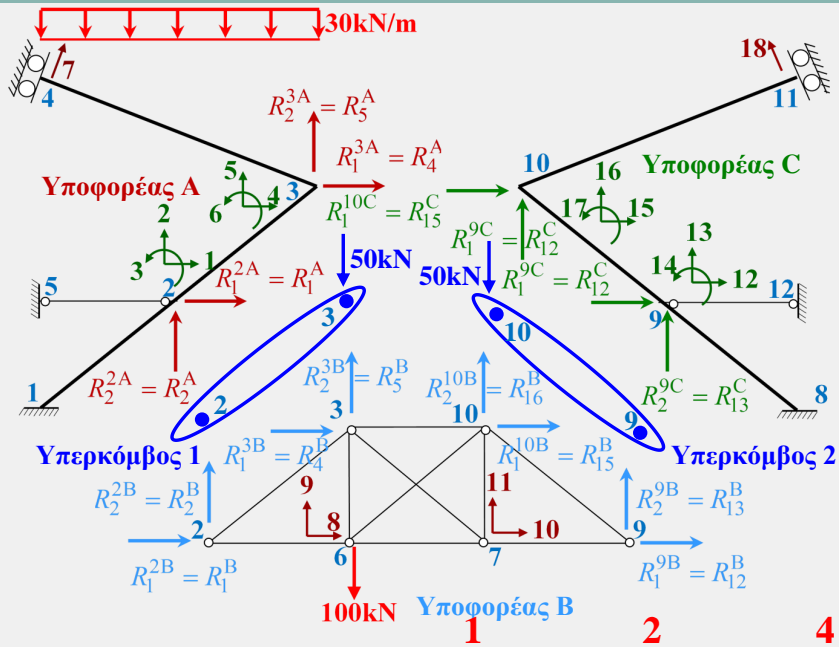
	Υπερκόμβοι	Εσωτερικοί β.ε.	Ενδοσυννοριακοί β.ε.
Υποφορέας A	1	3, 6, 7	1, 2, 4, 5 (υπερκόμβος 1)
Υποφορέας B	1, 2	8, 9, 10, 11	1, 2, 4, 5 (υπερκόμβος 1) 12, 13, 15, 16 (υπερκόμβος 2)
Υποφορέας C	2	14, 17, 18	12, 13, 15, 16 (υπερκόμβος 2)

Συμπικνωμένο
μ.σ.
υπερστοιχείου C

$$[K_c^C] = [K_c^{C22}] = 10^4 \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 119.0321 & -83.4906 & -56.8014 & 41.86483 \\ -83.4906 & 65.07921 & 41.86483 & -32.3802 \\ -56.8014 & 41.86483 & 121.2804 & -17.8444 \\ 41.86483 & -32.3802 & -17.8444 & 41.1756 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{12} \\ \mathbf{13} \\ \mathbf{15} \\ \mathbf{16} \end{matrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΜΙΚΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ



Μόρφωση μητρώου στιβαρότητας ως προς τους υπερκόμβους του φορέα

Σύνθεση μητρώων στιβαρότητας υπερστοιχείων φορέα

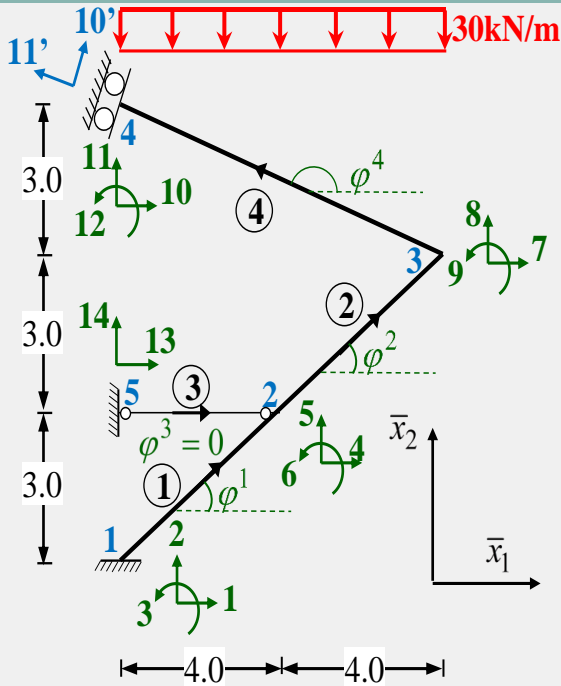
$$[K_c] = \begin{bmatrix} [K_c^{A11}] + [K_c^{B11}] & [K_c^{B12}] \\ [K_c^{B21}] & [K_c^{B22}] + [K_c^{C22}] \end{bmatrix}$$

$[K_c] = 10^4 \cdot$	120.0461									1
	83.8746	65.3672								2
	-57.4000	-42.2488	123.1252							4
	-42.0264	-32.6682	18.0058	41.3934						5
	-0.04873	0	0.18722	-0.125	119.8993					12
	0	0	0	0	-83.8746	65.3672				13
	-0.20968	0	-1.03646	-0.22259	-57.3339	42.2488	123.1252			15
	-0.22319	0	0.22596	-0.33607	41.3610	-32.6682	-18.0066	41.7617		16

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΜΙΚΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ - Ανάλυση Υποφορέα Α

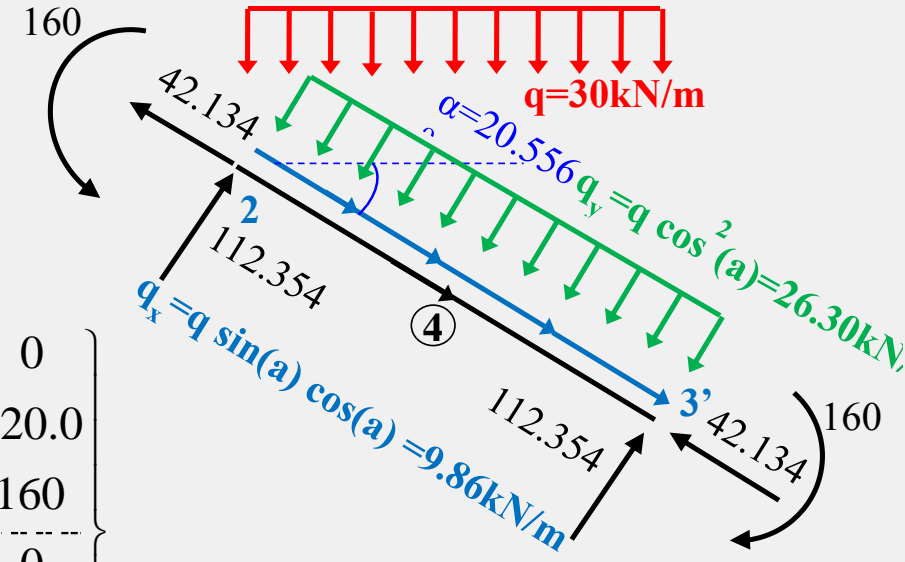
Υπολογισμός δράσεων υπερκόμβων ισοδύναμου υποφορέα Α

Υπολογισμός δράσεων παγίωσης κόμβων παγιωμένου υποφορέα Α



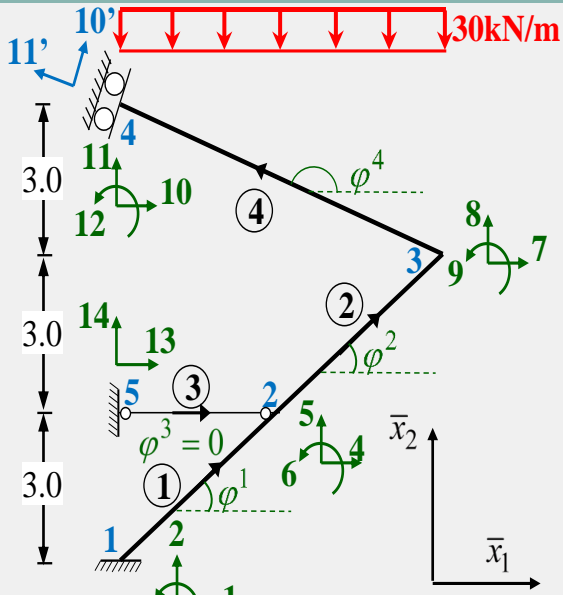
$$\begin{Bmatrix} -4 \\ A_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -4j \\ A_r \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} -4k \\ A_r \end{Bmatrix} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \bar{F}_1^{4j} \\ \bar{F}_2^{4j} \\ \bar{M}_3^{4j} \\ \bar{F}_1^{4k} \\ \bar{F}_2^{4k} \\ \bar{M}_3^{4k} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{F}_7 \\ \bar{F}_8 \\ \bar{M}_9 \\ \bar{F}_{10} \\ \bar{F}_{11} \\ \bar{M}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 120.0 \\ 160 \\ 0 \\ 120.0 \\ -160 \end{Bmatrix}$$



καθολικό διάνυσμα ακραίων δράσεων του μέλους 4

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΜΙΚΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ - Ανάλυση Υποφορέα Α



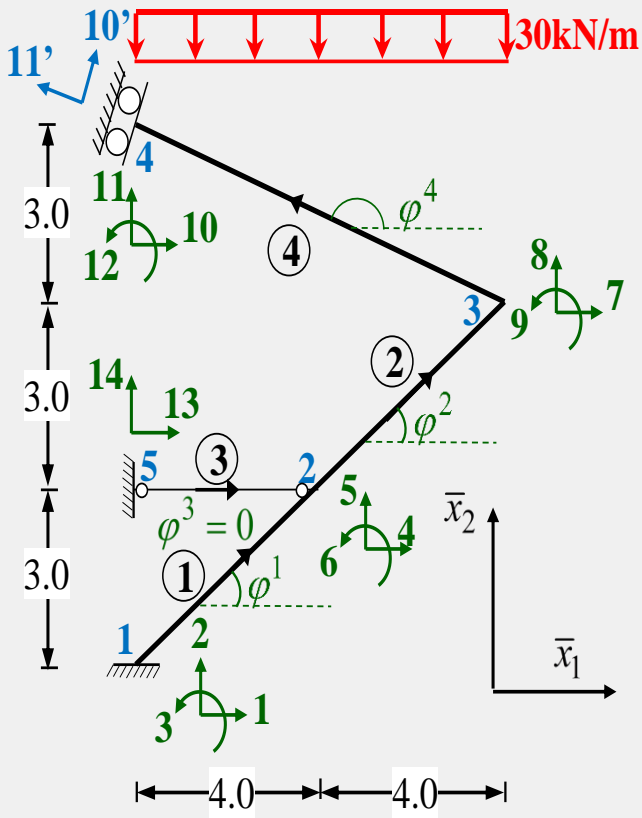
**Υπολογισμός δράσεων υπερκόμβων
ισοδύναμου υποφορέα Α**

**Υπολογισμός δράσεων παγίωσης
κόμβων παγιωμένου υποφορέα Α**

**Τροποποιημένο καθολικό διάνυσμα ακραίων
δράσεων του μέλους 4 (λόγω κεκλιμένης
στήριξης)**

$$\begin{Bmatrix} \bar{A}_r^{-4} \end{Bmatrix}_m = \begin{Bmatrix} \bar{F}_7 \\ \bar{F}_8 \\ \bar{M}_9 \\ \bar{F}_{10'} \\ \bar{F}_{11'} \\ \bar{M}_{12} \end{Bmatrix} = [r^4] \begin{Bmatrix} \bar{A}_r^{-4} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos 69.444^\circ & \sin 69.444^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin 69.444^\circ & \cos 69.444^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 120.0 \\ 160 \\ 0 \\ 120.0 \\ -160 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 120.0 \\ 160.0 \\ 112.36 \\ 42.134 \\ -160.0 \end{Bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΜΙΚΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ - Ανάλυση Υποφορέα Α



**Υπολογισμός δράσεων υπερκόμβων
ισοδύναμου υποφορέα Α**

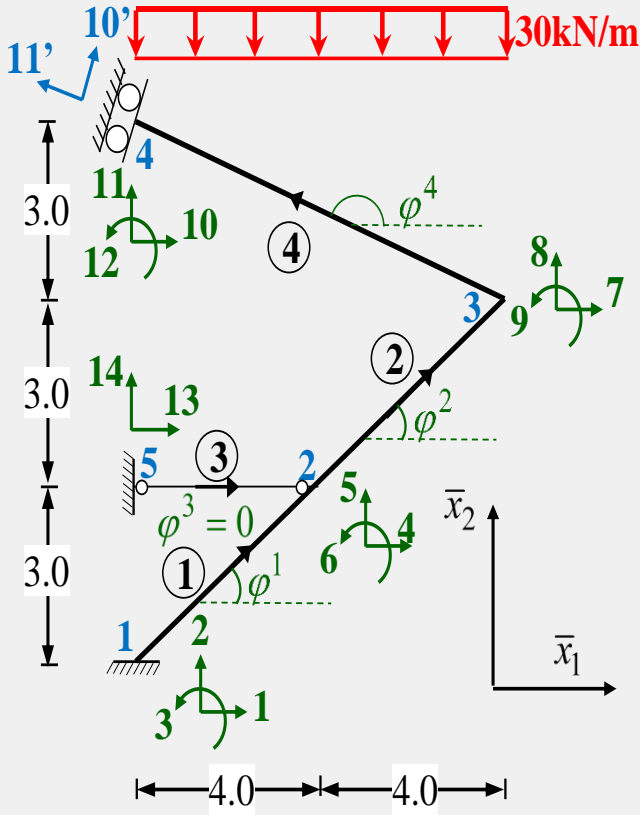
**Υπολογισμός δράσεων παγίωσης
κόμβων παγιωμένου υποφορέα Α**

$$\{\bar{S}^{(1)}\} = \{\bar{A}_r^{1j}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{\bar{S}^{(2)}\} = \{\bar{A}_r^{1k}\} + \{\bar{A}_r^{2j}\} + \{\bar{A}_r^{3k}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{S}^{(3)}\} = \{\bar{A}_r^{2k}\} + \{\bar{A}_r^{4j}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 120.0 \\ 160.0 \end{Bmatrix} \quad \{\bar{S}^{(4)}\} = \{\bar{A}_r^{4k}\} = \begin{Bmatrix} 112.36 \\ 42.134 \\ -160.0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{S}^{(5)}\} = \{\bar{A}_r^{3j}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΜΙΚΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ - *Ανάλυση Υποφορέα Α*



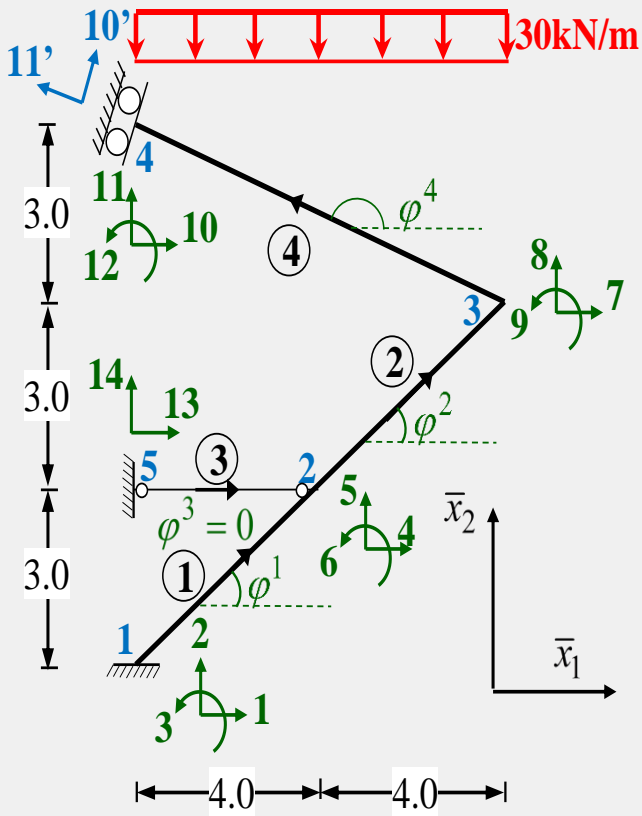
Υπολογισμός δράσεων υπερκόμβων ισοδύναμου υποφορέα Α

$$\{\bar{P}_{mm}\} = \{\bar{P}_{mm}^{nodal} - \bar{S}_{mm}\} = \begin{bmatrix} \{\bar{P}_f\} \\ \{\bar{P}_s\} \end{bmatrix}$$

Μόρφωση διανύσματος ισοδύναμων δράσεων υποφορέα Α

\bar{P}_4	0	4
\bar{P}_5	0	5
\bar{M}_6	0	6
\bar{P}_7	0	7
\bar{P}_8	-120.0	8
\bar{P}_9	-160.0	9
\bar{M}_9	-112.36	10'
<hr/>		
$\bar{P}_{10'}$	$\bar{R}_1^{(1)}$	1
\bar{P}_1	$\bar{R}_2^{(1)}$	2
\bar{P}_2	$\bar{R}_3^{(1)}$	3
\bar{M}_3		
$\bar{P}_{11'}$	$\bar{R}_{2'}^{(4)} - 42.134$	11'
\bar{M}_{12}	$\bar{R}_{3'}^{(4)} + 160.0$	12
\bar{P}_{13}	$\bar{R}_1^{(5)}$	13
\bar{P}_{14}	$\bar{R}_2^{(5)}$	14

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΜΙΚΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ - *Ανάλυση Υποφορέα Α*

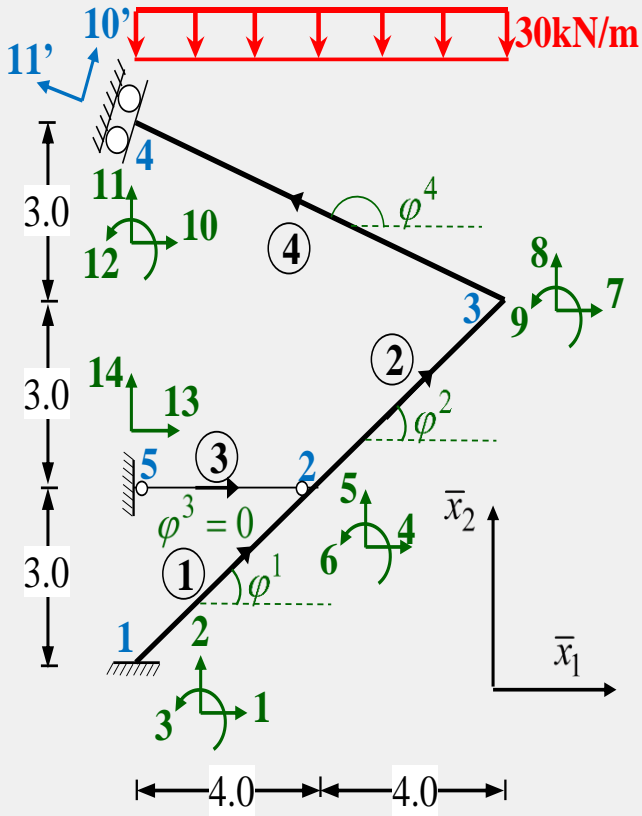


Υπολογισμός διανύσματος μετακινήσεων υπερκόμβων ισοδύναμου υποφορέα Α

$$\{\bar{\Delta}_{mm}\} = \begin{bmatrix} \{\bar{\Delta}_f\} \\ \{\bar{\Delta}_s\} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Theta}_9 \\ \bar{\Delta}_{10'} \\ \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_{11'} \\ \bar{\Delta}_{12} \\ \bar{\Delta}_{13} \\ \bar{\Delta}_{14} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Theta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Theta}_9 \\ \bar{\Delta}_{10'} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10' \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 11' \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{matrix}$$

Μόρφωση διανύσματος επικόμβιων μετακινήσεων υποφορέα Α

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΜΙΚΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ - *Ανάλυση Υποφορέα Α*

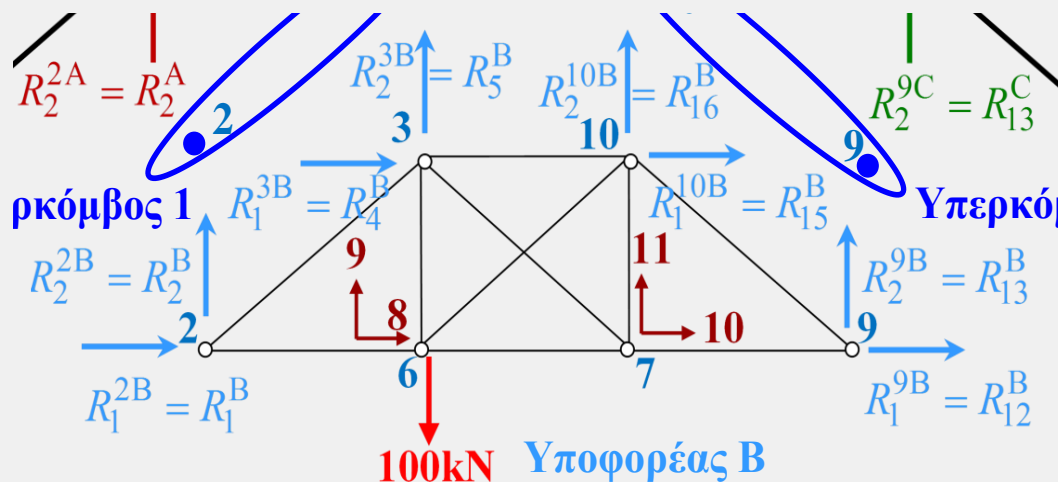


**Αναδιατεταγμένα
διανύσματα ισοδύναμων
δράσεων και επικόμβιων
μετακινήσεων του
υποφορέα Α**

$$\left[\begin{array}{c} \{\Delta_e^A\} \\ \{\Delta_c^A\} \end{array} \right] = \left\{ \begin{array}{c} \Theta_3^A \quad \mathbf{3} \\ \Theta_6^A \quad \mathbf{6} \\ \Delta_7^A \quad \mathbf{7} \\ \hline \Delta_1^A \quad \mathbf{1} \\ \Delta_2^A \quad \mathbf{2} \\ \Delta_4^A \quad \mathbf{4} \\ \Delta_5^A \quad \mathbf{5} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{c} \{P_e^A\} \\ \{R^A + P_{cc}^A\} \end{array} \right] = \left\{ \begin{array}{c} M_3^A \\ M_6^A \\ P_7^A \\ \hline P_1^A \\ P_2^A \\ P_4^A \\ P_5^A \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -160.0 \\ -112.36 \\ \hline R_1^A \\ R_2^A \\ R_4^A \\ R_5^A - 170 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{3} \\ \mathbf{6} \\ \mathbf{7} \\ \hline \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \end{array} \right.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΜΙΚΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ - Ανάλυση Υποφορέα Β



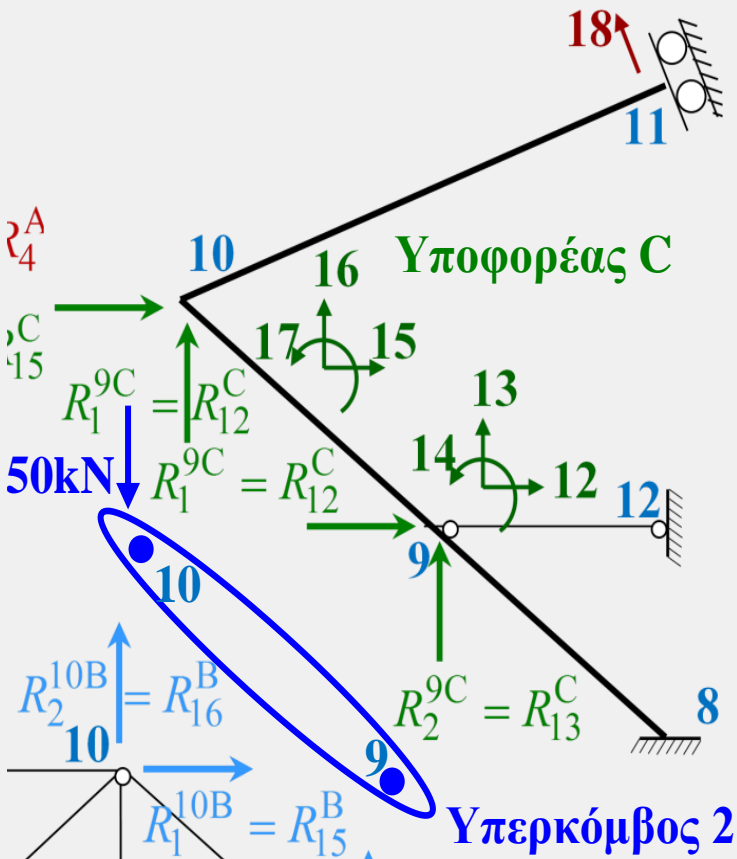
Όμοια με τα προηγούμενα

Αναδιατεταγμένα
διανύσματα ισοδύναμων
δράσεων και επικόμβιων
μετακινήσεων του
υποφορέα Β

$$\begin{bmatrix} \{P_e^B\} \\ \{R^B + P_{cc}^B\} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} P_8^B \\ P_9^B \\ P_{10}^B \\ P_{11}^B \\ P_1^B \\ P_2^B \\ P_4^B \\ P_5^B \\ P_{12}^B \\ P_{13}^B \\ P_{15}^B \\ P_{16}^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -100.0 \\ 0 \\ 0 \\ R_1^B \\ R_2^B \\ R_4^B \\ R_5^B \\ R_{12}^B \\ R_{13}^B \\ R_{15}^B \\ R_{16}^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 12 \\ 13 \\ 15 \\ 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{ \Delta_e^B \} \\ \{ \Delta_c^B \} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_8^B \\ \Delta_9^B \\ \Delta_{10}^B \\ \Delta_{11}^B \\ \Delta_1^B \\ \Delta_2^B \\ \Delta_4^B \\ \Delta_5^B \\ \Delta_{12}^B \\ \Delta_{13}^B \\ \Delta_{15}^B \\ \Delta_{16}^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 12 \\ 13 \\ 15 \\ 16 \end{bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΜΙΚΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ - Ανάλυση Υποφορέα C

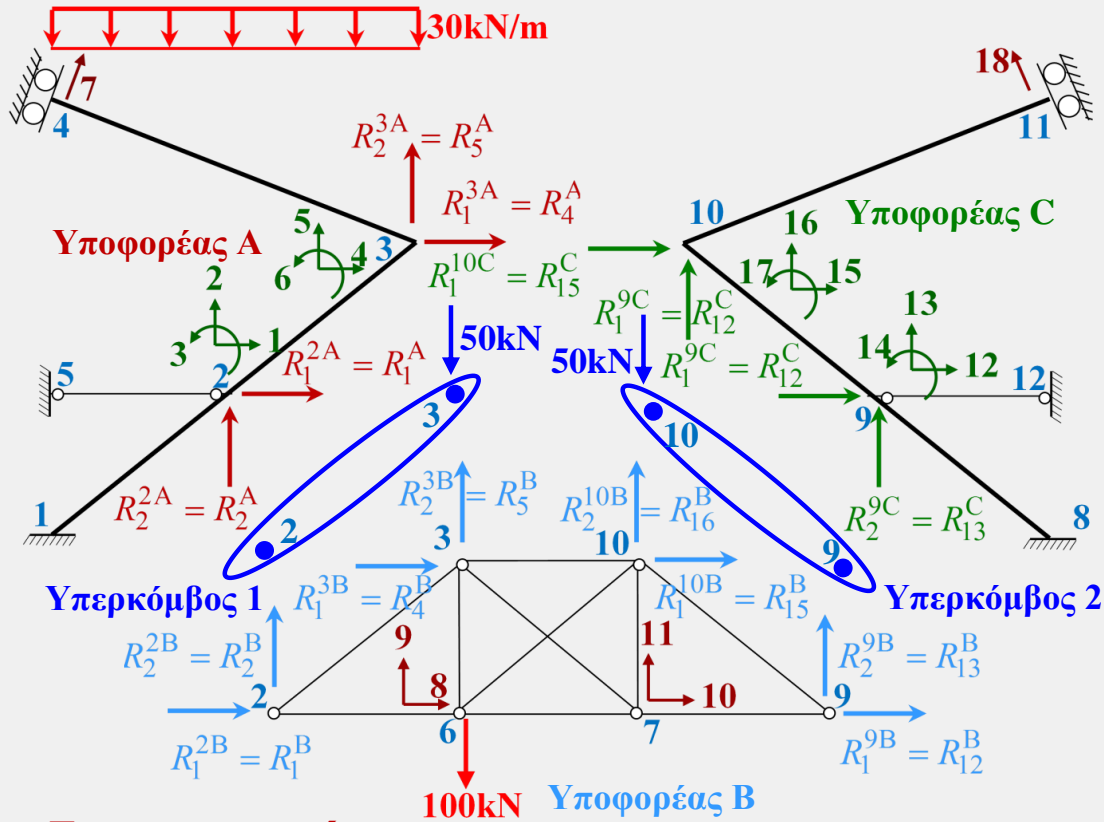


Όμοια με τα προηγούμενα

Αναδιατεταγμένα διανύσματα ισοδύναμων δράσεων και επικόμβιων μετακινήσεων του υποφορέα C

$$\begin{bmatrix} \{P_e^C\} \\ \{R^C + P_{cc}^C\} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{14}^C \\ M_{17}^C \\ P_{18}^C \\ \hline P_{12}^C \\ P_{13}^C \\ P_{15}^C \\ P_{16}^C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline R_{12}^C \\ R_{13}^C \\ R_{15}^C \\ R_{16}^C - 50 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 14 \\ 17 \\ 18 \\ \hline 12 \\ 13 \\ 15 \\ 16 \end{matrix} \begin{bmatrix} \{\Delta_e^C\} \\ \{\Delta_c^C\} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Theta_{14}^C \\ \Theta_{17}^C \\ \hline \Delta_{12}^C \\ \Delta_{13}^C \\ \Delta_{15}^C \\ \Delta_{16}^C \end{Bmatrix} \begin{matrix} 14 \\ 17 \\ \hline 12 \\ 13 \\ 15 \\ 16 \end{matrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΜΙΚΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ - Ανάλυση Υποφορέα Α

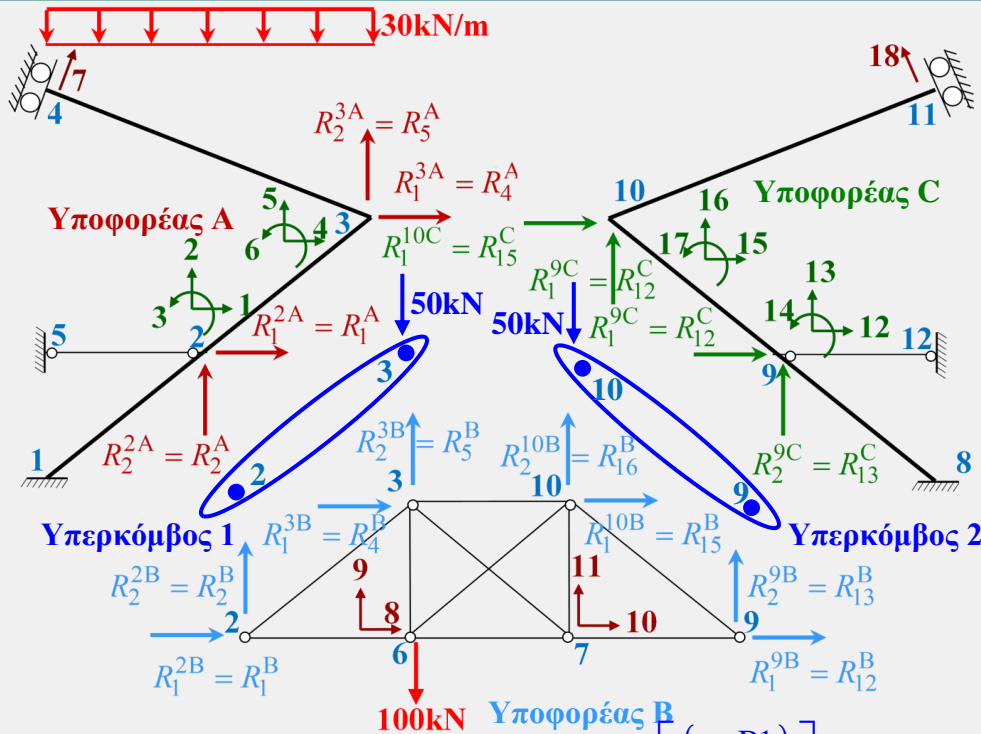


Στατική συμπύκνωση επικόμβιων δράσεων υπερκόμβων ισοδύναμου φορέα λόγω απαλοιφής των εσωτερικών βαθμών ελευθερίας των υποφορέων

**Συμπυκνωμένο
διάνυσμα
επικόμβιων
δράσεων του
υπερστοιχείου Α**

$$\{P_c^{A1}\} = \{R^A\} + \{P_{cc}^A\} - [K_{ce}^A] [K_{ee}^A]^{-1} \{P_e^A\} = \begin{cases} R_1^A + 44.2559 & \mathbf{1} \\ R_2^A - 59.0079 & \mathbf{2} \\ R_4^A - 72.6437 & \mathbf{4} \\ R_5^A - 230.9506 & \mathbf{5} \end{cases}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΜΙΚΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ - Ανάλυση Υποφορέα Β



Στατική συμπίκνωση επικόμβιων δράσεων υπερκόμβων ισοδύναμου φορέα λόγω απαλοιφής των εσωτερικών βαθμών ελευθερίας των υποφορέων

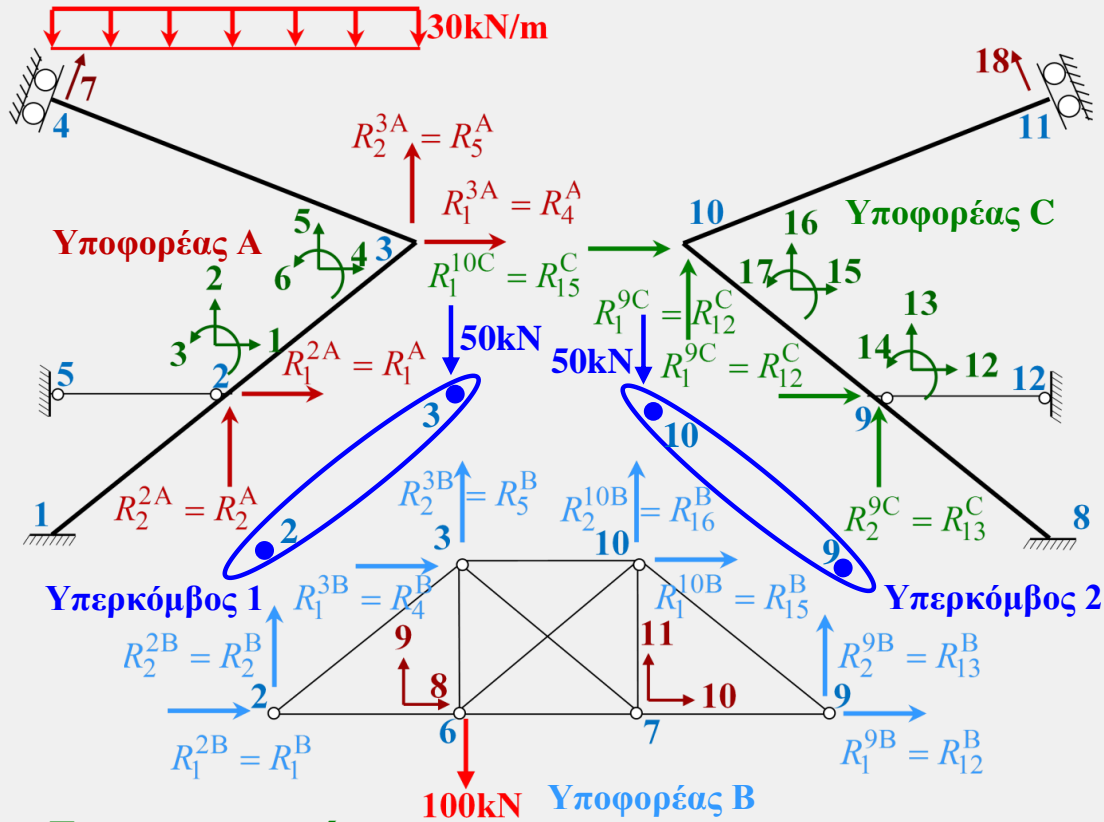
Συμπικνωμένο
διάνυσμα
επικόμβιων
δράσεων του
υπερστοιχείου Β

$$\begin{Bmatrix} P_c^{B1} \\ \dots \\ P_c^{B2} \end{Bmatrix}$$

$$= \{R^B\} + \{P_{cc}^B\} - [K_{ce}^B] [K_{ee}^B]^{-1} \{P_e^B\} =$$

$$\begin{Bmatrix} R_1^B + 11.7974 \\ R_2^B \\ R_4^B + 2.05165 \\ R_5^B - 87.62624 \\ R_{12}^B + 1.15434 \\ R_{13}^B \\ R_{15}^B - 18.72196 \\ R_{16}^B - 12.47965 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 12 \\ 13 \\ 15 \\ 16 \end{matrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΜΙΚΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ - Ανάλυση Υποφορέα C

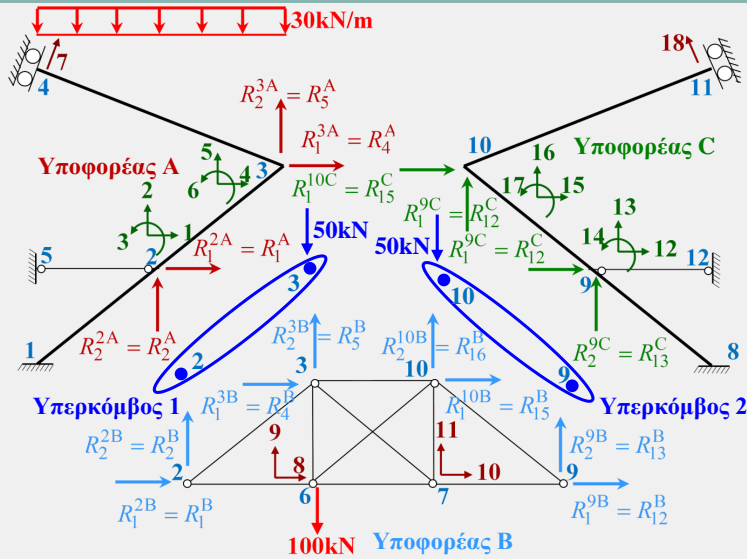


Στατική συμπύκνωση επικόμβιων δράσεων υπερκόμβων ισοδύναμου φορέα λόγω απαλοιφής των εσωτερικών βαθμών ελευθερίας των υποφορέων

**Συμπυκνωμένο
διάνυσμα
επικόμβιων
δράσεων του
υπερστοιχείου C**

$$\{P_c^{C2}\} = \{R^C\} + \{P_{cc}^C\} - [K_{ce}^C] [K_{ee}^C]^{-1} \{P_e^C\} = \begin{cases} R_{12}^C & \mathbf{12} \\ R_{13}^C & \mathbf{13} \\ R_{15}^C & \mathbf{15} \\ R_{16}^C - 50 & \mathbf{16} \end{cases}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΜΙΚΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ



Μόρφωση τελικής μητρικής εξίσωσης στιβαρότητας ως προς τις μετακινήσεις των υπερκόμβων του επίπεδου μικτού φορέα

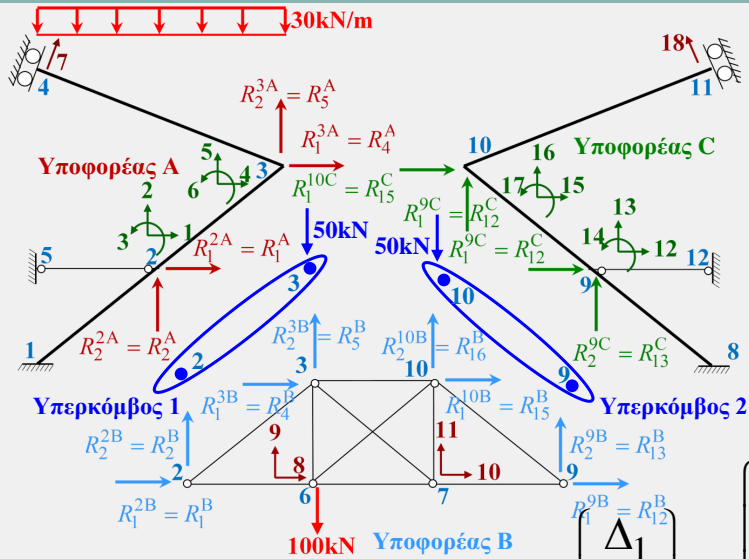
$$\{P_c\} = [K_c]\{\Delta_c\}$$

$$\begin{bmatrix} \{P_c^{A1}\} + \{P_c^{B1}\} \\ \{P_c^{B2}\} + \{P_c^{C2}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_c^{A11}] + [K_c^{B11}] & [K_c^{B12}] \\ [K_c^{B21}] & [K_c^{B22}] + [K_c^{C22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Delta_c^1\} \\ \{\Delta_c^2\} \end{bmatrix}$$

1 2 4 5 12 13 15 16

$$\begin{bmatrix} 56.0533 \\ -59.0079 \\ -70.5921 \\ -318.5768 \\ 1.15434 \\ 0 \\ -18.7220 \\ -62.4797 \end{bmatrix} = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 120.0461 & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\ 83.8746 & 65.3672 & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\ -57.4000 & -42.2488 & 123.1252 & & & & & & & & & & & & & & & & \\ -42.0264 & -32.6682 & 18.0058 & 41.3934 & & & & & & & & & & & & & & & \\ -0.04873 & 0 & 0.18722 & -0.125 & 119.8993 & & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -83.8746 & 65.3672 & & & & & & & & & & & & & \\ -0.20968 & 0 & -1.03646 & -0.22259 & -57.3339 & 42.2488 & 123.1252 & & & & & & & & & & & & \\ -0.22319 & 0 & 0.22596 & -0.33607 & 41.3610 & -32.6682 & -18.0066 & 41.7617 & & & & & & & & & & & \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_4 & \Delta_5 & \Delta_{12} & \Delta_{13} & \Delta_{15} & \Delta_{16} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 12 \\ 13 \\ 15 \\ 16 \end{matrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΜΙΚΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ



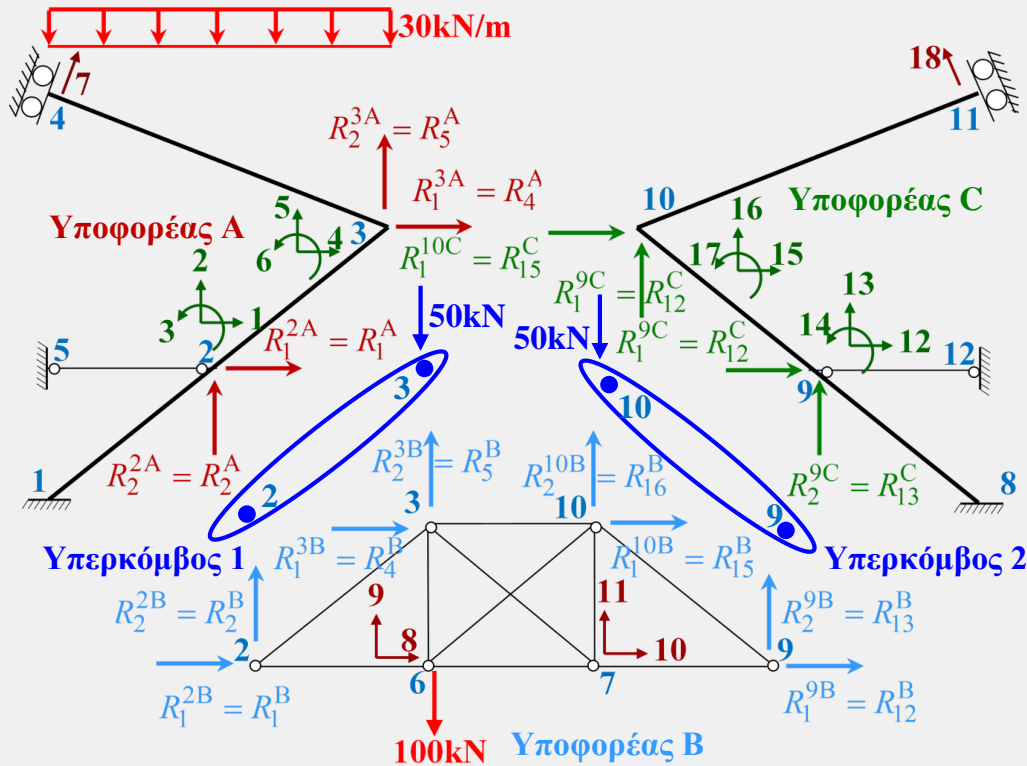
Μόρφωση τελικής μητρικής εξίσωσης στιβαρότητας ως προς τις μετακινήσεις των υπερκόμβων του επίπεδου μικτού φορέα

$$\{P_c\} = [K_c] \{\Delta_c\}$$

όπου κατά τη μόρφωση της τελικής εξίσωσης έχουν ληφθεί υπόψη οι σχέσεις συμβιβαστού παραμορφώσεων και αρχής δράσης – αντίδρασης

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1^B \\ \Delta_2^B \\ \Delta_4^B \\ \Delta_5^B \\ \Delta_{12}^B \\ \Delta_{13}^B \\ \Delta_{15}^B \\ \Delta_{16}^B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_1^B \\ \Delta_2^B \\ \Delta_4^B \\ \Delta_5^B \\ \Delta_{12}^B \\ \Delta_{13}^B \\ \Delta_{15}^B \\ \Delta_{16}^B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_1^A & 1 \\ \Delta_2^A & 2 \\ \Delta_4^A & 4 \\ \Delta_5^A & 5 \\ \Delta_{12}^C & 12 \\ \Delta_{13}^C & 13 \\ \Delta_{15}^C & 15 \\ \Delta_{16}^C & 16 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \{R^{A1}\} + \{R^{B1}\} \\ \{R^{B2}\} + \{R^{C2}\} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1^A + R_1^B \\ R_2^A + R_2^B \\ R_4^A + R_4^B \\ R_5^A + R_5^B \\ R_{12}^B + R_{12}^C \\ R_{13}^B + R_{13}^C \\ R_{15}^B + R_{15}^C \\ R_{16}^B + R_{16}^C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 12 \\ 13 \\ 15 \\ 16 \end{matrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΜΙΚΤΟΥ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ



Απομένοντα βήματα για την πλήρη επίλυση του επίπεδου μικτού φορέα

- Επίλυση για τον υπολογισμό των άγνωστων ενδοσυνοριακών μετακινήσεων των υπερκόμβων 1, 2.
- Υπολογισμός των άγνωστων μετακινήσεων των εσωτερικών βαθμών ελευθερίας κάθε υποφορέα.
- Υπολογισμός των ακραίων δράσεων και των διαγραμμάτων εντατικών μεγεθών των μελών του μικτού φορέα.